Canad. J. Math. Vol. **61** (5), 2009 pp. 961–1049

Transfert des intégrales orbitales pour les algèbres de Lie classiques

Florent Bernon

Résumé. Dans cet article, on considère un groupe semi-simple G classique réel et connexe. On suppose de plus que G possède un sous-groupe de Cartan compact. On définit une famille de sous-algèbres de Lie associée à $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, de même rang que $\mathfrak{g}$ dont tous les facteurs simples sont de rang 1 ou 2. Soit $\mathfrak{g}'$ une telle sous-algèbre de Lie. On construit alors une application de transfert des intégrales orbitales de $\mathfrak{g}'$ dans l'espace des intégrales orbitales de $\mathfrak{g}$. On montre que cette application est définie dès que $\mathfrak{g}$ ne possède pas de facteur simple réel de type CI de rang supérieur ou égal à 3. Si de plus, $\mathfrak{g}$ ne possède pas de facteur simple de type BI de rang supérieur à 3, on montre la surjectivité de cette application de transfert.

On utilise cette application de transfert pour obtenir une formule de réduction de l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra pour les paires duales d'algèbres de Lie réductives $\big(\mathrm{U}(p,q), \mathrm{U}(r,s)\big)$ et $\big(\mathrm{Sp}(p,q), \mathrm{O}^*(2n)\big)$ avec $p+q=r+s=n$.

Introduction

Soit G un groupe semi-simple classique réel connexe. On suppose que G possède un sous-groupe de Cartan compact que l'on note $H_{\varnothing}$. On peut alors construire une famille de groupes que R. Herb appelle les 2-structures de G. Soit G′ une telle 2-structure. Il y a alors une correspondance naturelle entre certaines orbites semi-simples régulières de G et G′. Cette correspondance permet à R. Herb de montrer que si G ne possède pas de facteur simple de type A_{2n}, alors les caractères des séries discrètes de G se décomposent via la correspondance orbitale en somme de caractères de séries discrètes des 2-structures de G [5, théorème 6.4].

La correspondance des orbites semi-simples régulières entre G et G′ peut aussi être considérée au niveau des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$. Il s'agit de construire une intégrale orbitale de $\mathfrak{g}$ à partir d'une intégrale orbitale de $\mathfrak{g}'$ en utilisant la correspondance des orbites semi-simples régulières entre $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}$. Introduisons quelques notations.

Soit Σ un système de racines positives de $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}})$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et Σ^{nc} (resp. Σ^{r}) l'ensemble des racines imaginaires non compactes (resp. réelles) de Σ. On note $\Delta(\mathfrak{g})$ l'ensemble des parties de Σ^{nc} constituées d'éléments deux à deux fortement orthogonaux (définition 2.1). A chaque élément $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on peut associer de manière naturelle un sous-espace de Cartan $H_{\mathcal{S}}$ de G, on pose $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Lie}(H_{\mathcal{S}})$. On considère la relation d'équivalence suivante sur $\Delta(\mathfrak{g})$:

$$\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}' \text{ si } \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \text{ et } \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'} \text{ sont conjuguées sous G.}$$

Reçu par la rédaction le 1 septembre, 2005; revu le 16 février, 2007.
Ce travail a été rédigé pendant un séjour à l'Institut de Mathématiques de Göttingen.
Classification (AMS) par sujet: Primary: 22E30; secondary: 22E46.

Pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, on note $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ l'ensemble des applications $\mathrm{Ad}(g)|\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ telles que $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$ où $g \in \mathrm{G}$. À chaque $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on associe une application appelée transformée de Cayley $c_{\mathcal{S}}$. Cette application induit en particulier un isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}}$. On considère ensuite le système de racines positives $\Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ définit par $\Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \{\alpha \circ c_{\mathcal{S}}^{-1} \mid \alpha \in \Sigma(\mathfrak{h}_{\varnothing})\}$.

Soit f une fonction lisse à support compact de $\mathfrak{g}$. On pose pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ semi-simple régulier :

$$\theta_{\mathcal{S}}(x) = \mathrm{sign}\Big(\prod_{\alpha \in \Sigma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} \alpha(x)\Big) \prod_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} \alpha(x) \int_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_{\mathcal{S}}} f(g.x)\, d\dot{g},$$

où $\Sigma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ l'ensemble des racines réelles de $\Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. La fonction $\theta_{\mathcal{S}}$ est appelée l'intégrale orbitale de Harish-Chandra. On considère alors la famille de fonctions $\theta = (\theta_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})}$ et on note $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des familles de fonctions θ ainsi obtenues. Les propriétés des fonctions $\theta_{\mathcal{S}}$ sont connues et l'espace $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ est caractérisé (*cf.* [2, théorème 4.1.2]). On sait en particulier que la fonction $\theta_{\mathcal{S}}$ est une fonction lisse sur l'ouvert des éléments réguliers de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ qui possède des discontinuités suivant les hyperplans associés aux racines imaginaires non compactes de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ dans $\mathfrak{g}$ et seulement suivant ces hyperplans. Ensuite, pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, il existe une fonction $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} \colon W(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \to \{\pm 1\}$ telle que l'on ait les relations

$$u.\theta_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\theta_{\mathcal{S}'}$$

pour tout $u \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. On appelle ces relations, les propriétés d'invariance. Les fonctions $\theta_{\mathcal{S}}$ vérifient ensuite des relations de saut qui déterminent les discontinuités de $\theta_{\mathcal{S}}$ suivant les hyperplans associés aux racines imaginaires non compactes.

Si $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$, on observe qu'il peut exister des racines imaginaires non compactes de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ dans $\mathfrak{g}'$ qui sont compactes en tant que racines de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ dans $\mathfrak{g}$. On est donc amené à modifier la définition de 2-structure. On définit la notion de c-structure (définition 1.1). En terme de système de racines, les c-structures de Φ sont des sous-systèmes de racines clos de Φ maximaux tels que tous les facteurs irréductibles soient de type A_1 ou B_2. Une c-structure de $\mathfrak{g}$ est alors une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ possèdant $\mathfrak{h}_{\varnothing}$ comme sous-algèbre de Cartan compacte et dont le système de racines relativement à $\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}$ est une c-structure de Φ. Au niveau des groupes, une c-structure de G est un sous-groupe de G connexe dont l'algèbre de Lie est une c-structure de $\mathfrak{g}$. On peut montrer que si G ne possède pas de composante simple de type BI alors les notions de c-structure et 2-structure [4, section 2] coïncident.

On considère le transfert des intégrales orbitales pour les groupes d'isométrie réels qui possèdent un sous-groupe de Cartan compact, cela exclut en particulier les formes réelles de type DI_b. On montre que le transfert est défini (théorème 5.25) dès que G ne possède pas de fact eur simple de type CI et de rang supérieur à 3. Cette condition découle du fait que certains signes qui apparaissent dans les relations de sauts caractérisant les intégrales invariantes ne coïncident pas pour les c-structures des facteurs simples de type CI et de rang supérieur à 3. Le théorème s'écrit ainsi.

Théorème *Soit* $\phi = (\phi_{\mathcal{S}'})_{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}')} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}')$. *Pour* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, *on pose*

$$\psi_{\mathcal{S}} = \frac{1}{N_{\mathcal{S}}} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}') \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}}} \sum_{u \in W(\mathcal{S}', \mathcal{S})} \omega_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}(u) u.\phi_{\mathcal{S}'}.$$

Alors la famille de fonctions $\psi = (\psi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})}$ *appartient à* $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$.

Dans l'expression précédente $N_{\mathcal{S}}$ est un entier (définition 5.2). Comme $\mathfrak{g}'$ est définie à partir d'un sous-système de racines clos de Φ, on a l'inclusion $\Delta(\mathfrak{g}') \subset \Delta(\mathfrak{g})$ ainsi l'expression de $\psi_{\mathcal{S}}$ est bien définie. On montre ensuite (corollaire 6.30) que pour les formes réelles de type AIII, CII et DIII, l'application de transfert se simplifie de la manière suivante :

$$\psi_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{w \in W(\mathfrak{h}_{\varnothing})} \omega_{w^{-1}*\mathcal{S}, \mathcal{S}}(w) w.\phi_{w^{-1}*\mathcal{S}},$$

où $W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ désigne le groupe de Weyl de $\mathfrak{h}_{\varnothing}$ en tant que sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $w^{-1} * \mathcal{S} = \{\pm\alpha \circ w \mid \alpha \in \mathcal{S}\} \cap \Sigma$. Cette dernière égalité permet de définir une action de $W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ sur $\Delta(\mathfrak{g})$.

Il existe certaines *c*-structures dites maximales qui intersectent toutes les orbites semi-simple régulières de $\mathfrak{g}$. On peut montrer pour l'action naturelle de $W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ sur Φ, qu'il existe une unique *c*-structure maximale de Φ à conjuguaison près par le groupe de Weyl $W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ (proposition 6.11). On montre ensuite que dès que la *c*-structure est maximale alors l'application de transfert est surjective si $\mathfrak{g}$ ne possède pas de facteur simple de type CI ou BI de rang supérieur à 3, théorème 6.21.

On applique ensuite ce résultat pour obtenir une formule de réduction de l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra (**Chc**) introduite par T. Przebinda *cf.* [8]) pour les paires duales réductives $\big(\mathrm{U}(p,q), \mathrm{U}(r,s)\big)$ et $\big(\mathrm{Sp}(p,q), \mathrm{O}^*(2n)\big)$ avec $p+q = r+s = n$ (théorème 8.18). Il s'agit de mettre en relation le **Chc** d'une paire duale réductive $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ avec celui de paires duales réductives $(\mathrm{G}_1', \mathrm{G}_2')$ où G_1' est une *c*-structure maximale de G_1 et G_2' est une *c*-structure de G_2. On montre que $(\mathrm{G}_1', \mathrm{G}_2')$ possède une structure de paire duale réductive naturelle (en général non irréductible). Le théorème 8.18 montre que l'étude de **Chc** peut être restreinte à des paires duales de petits rangs (1 ou 2). Cela est fondamental dans le cadre de l'étude de **Chc** commencé dans [8].

Le plan de cette article est le suivant : Dans la première partie, on définit les sous-groupes (resp. sous-algèbres et sous-systèmes) de racines de G (resp. $\mathfrak{g}$ et Φ) que l'on appelle les *c*-structures. Pour certains systèmes de racines classiques, appelés systèmes pleins (définition 1.5), on introduit une application τ (définition 1.6) qui met en relation certaines racines entre elles. On considère ensuite pour tout système de racines classique un plongement de celui-ci dans un système plein. Cette construction sera utilisée tout au long de l'article, une première application est la description du système de racines engendré par une famille de racines orthogonales, une autre application est la proposition 2.10 qui caractérise les classes d'équivalence de sous-algèbres de Cartan.

Dans la deuxième partie, on détermine explicitement la structure de l'espace des intégrales invariantes, $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$. Il y a essentiellement trois éléments intervenant pour caractériser cet espace :

(i) la structure du groupe de Weyl pour toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$,
(ii) la valeur d'un entier (définition 3.7) que l'on note $d(\mathcal{S},\alpha)$ qui prend la valeur 1 ou 2,
(iii) un signe que l'on note $\epsilon(\mathcal{S},\alpha)$ (définition 3.7).

On peut alors identifier l'espace des intégrales invariantes à l'espace des familles de fonctions $(\theta_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ (théorème 3.12) vérifiant les propriétés d'invariance décrites précédemment et les relations de saut qui s'écrivent :

$$\langle \partial(\nu)\theta_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha} = id(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\partial\big(c_{\alpha}(\nu)\big)\,\theta_{\mathcal{S}_{\alpha}}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_{\alpha},$$

où ν appartient à l'algèbre de symétrique de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ que l'on note $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}})$. Cette algèbre s'identifie naturellement à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$. L'expression $\langle \partial(\nu)\theta_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha}$ signifie que l'on prend la différence des limites de part et d'autre de $\partial(\nu)\theta_{\mathcal{S}}$ le long de l'hyperplan $\ker(\alpha)$ plus précisément, on a

$$\langle \partial(\nu)\theta_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha}(x) = \lim_{t\longrightarrow 0_+}\partial(\nu)\theta_{\mathcal{S}}(x+itH_{\alpha}) - \lim_{t\longrightarrow 0_+}\partial(\nu)\theta_{\mathcal{S}}(x-itH_{\alpha}),$$

où H_{α} est le covecteur de α. L'élément $\mathcal{S}_{\alpha}$ de $\Delta(\mathfrak{g})$ est tel que la racine α soit réelle sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_{\alpha}}$ (définition 2.8). L'application c_{α} est une transformée de Cayley, c'est en particulier un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}}$ dans $c_{\alpha}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}})$ qui induit un isomorphisme d'algèbres entre $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}})$ et $\mathrm{Sym}\big(c_{\alpha}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}})\big)$. L'application $u(\mathcal{S},\alpha)$ est un isomorphisme linéaire entre $c_{\alpha}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}})\cap\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_{\alpha},\mathbb{C}}$ (définition 2.6). L'application j_{α} est l'injection canonique de $\ker(\alpha)$ dans $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_{\alpha}}$.

L'étude du transfert nécessite une étude approfondée des trois éléments énoncés précédemment. On obtient tout d'abord un résultat de décomposition du groupe de Weyl d'une sous-algèbre de Cartan (propositions 4.11, 4.12 et 4.13). Ce résultat permet de déterminer la valeur de l'entier $d(\mathcal{S},\alpha)$ (théorème 4.19). On définit ensuite un entier $d(\mathcal{S})$ qui vérifie la propriété suivante (proposition 4.24):

$$\frac{d(\mathcal{S})d(\mathcal{S},\alpha)}{d(\mathcal{S}_{\alpha})} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \text{ est fortement orthogonal à } \mathcal{S},\\ 2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On note cet entier $D(\mathcal{S},\alpha)$. L'introduction de l'entier $D(\mathcal{S},\alpha)$ permet de résoudre une obstruction pour définir le transfert. En effet, les entiers $d(\mathcal{S},\alpha)$ et $d_{\mathfrak{g}'}(\mathcal{S},\alpha)$ ne coïncident pas en général. D'après ce qui précède, les entiers $D(\mathcal{S},\alpha)$ et $D_{\mathfrak{g}'}(\mathcal{S},\alpha)$ coïncident. Quitte à multiplier la fonction $\theta_{\mathcal{S}}$ par $d(\mathcal{S})$, on peut alors identifier l'espace des intégrales invariantes à un espace de familles de fonctions $\theta = (\theta_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ qui vérifient toujours les relations d'invariances évoquées précédemment et qui vérifient les relations de saut de la forme :

$$\langle \partial(\nu)\theta_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha} = iD(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\partial\big(c_{\alpha}(\nu)\big)\,\theta_{\mathcal{S}_{\alpha}}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_{\alpha}.$$

On s'intéresse enfin à déterminer la valeur de $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)$. Celle-ci se détermine facilement si α est adaptée à $\mathcal{S}$ (définition 3.9 et lemme 4.37). En utilisant le lemme 4.41 qui exprime une propriété d'invariance de $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)$ par l'action du groupe de Weyl, on obtient la valeur de $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)$ dans tous les cas (théorème 4.44).

La troisième partie porte sur le transfert des intégrales invariantes. On montre dans la première section que ce transfert est défini si le groupe ne possède pas de facteur de type CI et de rang supérieur à 3. La principale étape pour obtenir ce résultat est la proposition 5.10 qui montre essentiellement que si l'on considère une famille de fonctions $(\theta_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ qui ne vérifie que les relations de saut alors, en prenant la moyenne des fonctions $\theta_{\mathcal{S}}$ afin d'obtenir des fonctions vérifiant les propriétés d'invariance, la famille de fonctions ainsi définie vérifie encore les relations de saut. On s'intéresse ensuite à montrer que pour certains groupes, l'application de transfert est surjective dès que la c-structure est maximale (théorème 6.21). Pour obtenir ce résultat, on définit un projecteur sur un espace contenant à la fois l'espace des intégrales invariantes de $\mathfrak{g}$ et l'espace des intégrales invariantes des c-structures de $\mathfrak{g}$ (définition 6.6). Ce projecteur permet de décomposer les intégrales invariantes suivant les c-structures maximales (lemme 6.29). On montre ensuite que l'application de transfert dans certains cas peut se simplifier par une simple moyenne suivant le groupe de Weyl associé à la sous-algèbre de Cartan compacte, $\mathfrak{h}_{\varnothing}$ (corollaire 6.30).

Dans la dernière partie, on s'intéresse à appliquer le transfert des intégrales invariantes à l'étude de l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra pour les paires

$$(U(p,q), U(r,s)), \quad (O^*(2n), \mathrm{Sp}(p,q))$$

avec $p+q=r+s=n$. Soit $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ l'une de ces paires duales réductives. On note $\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2}$ l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra associée à la paire duale réductive $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ [8]. On montre alors que les paires $(\mathrm{G}_1', \mathrm{G}_2')$ formées de c-structures de G_1 et G_2 peuvent être considérées de manière naturelle comme des paires duales réductives (lemme 7.2). On montre ensuite qu'il existe une relation entre $\mathbf{Chc}^{\mathrm{G},\mathrm{G}'}$ et $\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1',\mathrm{G}_2'}$ qui permet de réduire l'étude de $\mathbf{Chc}^{\mathrm{G},\mathrm{G}'}$ au cas des paires de groupes $(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$ avec $\mathrm{rang}(\mathrm{G}) = \mathrm{rang}(\mathrm{G}') = 2$ (théorème 8.18). Pour les paires duales de groupes unitaires, cette formule de réduction formalise la méthode de réduction dévéloppée dans [1].

Partie 1 Préliminaires

Dans la première section, on définit la notion de c-structure pour les systèmes de racines. Il s'agit essentiellement des sous-systèmes de racines dont tous les facteurs irréductibles sont de rang 1 ou 2 et maximaux (définition 1.1). On définit ensuite la notion de c-structure pour les algèbres de Lie (définition 1.22) puis pour les groupes (définition 1.23). Dans la seconde section, on rappelle la construction des sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie réductive en terme de transformées de Cayley et de systèmes de racines fortement orthogonales. On introduit ensuite la notion de c-structure maximale (définition 2.13).

Tous les systèmes de racines considérés dans cette partie n'ont pas de facteur irréductible *exceptionnel* et sont réduits. On utilise les notations de [3] pour les systèmes de racines.

1 c-structures et systèmes pleins

Dans cette section, on introduit la notion de c-structure pour un système de racines que l'on compare avec celle de 2-structure. On introduit aussi les notions de système plein (définition 1.12) et d'une application τ (définition 1.6). Ces notions permettent de déterminer le système de racines engendré par une famille de racines deux à deux orthogonales. Ce résultat sera utile pour l'étude ultérieure des groupes de Weyl des sous-algèbres de Cartan dans la partie suivante.

1.1 c-structures de Φ et systèmes pleins

Dans cette sous-section, on désigne par V un espace vectoriel réel de dimension finie, V^* le dual de V et $\Phi \subset V^*$ un système de racines réduit non trivial. On considère sur V une structure euclidienne compatible avec Φ.

Pour $\alpha, \beta \in \Phi$, on note $\alpha \perp\!\!\!\!\perp_\Phi \beta$ (resp. $\alpha \mathcal{R}_\Phi \beta$) si $\alpha \perp \beta$ et si $\alpha \pm \beta \notin \Phi$ (resp. $\alpha \pm \beta \in \Phi$). On peut remarquer que pour $\alpha, \beta \in \Phi$ tels que $\alpha \perp \beta$, on a $\alpha + \beta \in \Phi$ si et seulement si $\alpha - \beta \in \Phi$. Si $\alpha \perp\!\!\!\!\perp_\Phi \beta$, on dit que α et β sont fortement orthogonaux. On note $W(\Phi)$ le groupe de Weyl du système de racines Φ. Pour $\alpha \in V^*$, on note $s_{V,\alpha}$ ou plus simplement s_α, la réflexion associée. On rappelle qu'un sous-ensemble P de Φ est clos dans Φ si pour $\alpha, \beta \in P$ tels que $\alpha + \beta \in \Phi$, on a $\alpha + \beta \in P$, (*cf.* [3, définition 4, p. 160]). La définition d'une c-structure est la suivante.

Définition 1.1 Soit ϕ un sous-système de racines de Φ. On dit que ϕ est une c-structure[1] de Φ si ϕ est un sous-système de racines de cardinal maximal parmi les sous-systèmes de racines clos dans Φ dont les composantes irréductibles sont de type A_1 ou B_2. On note $\mathrm{Str}(\Phi)$ l'ensemble des c-structures de Φ.

Remarque Par définition, l'ensemble $\mathrm{Str}(\Phi)$ est non vide. Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. Pour $\alpha, \beta \in \phi$ tels que $\alpha \perp\!\!\!\!\perp_\phi \beta$, on a $\alpha \perp\!\!\!\!\perp_\Phi \beta$.

On souhaite étudier l'unicité à conjugaison pris par $W(\Phi)$ des c-structures pour un système de racines donné. Pour cela, on utilise le fait que les notions de c-structure et de 2-structure coïncident en partie. On rappelle la définition des 2-structures.

Définition 1.2 [5, p. 2558] Soit ϕ un sous-système de racines de Φ. On dit que ϕ est une 2-structure de Φ si on a les propriétés suivantes :

(i) les facteurs irréductibles de ϕ sont de type A_1 ou B_2,

(ii) soit ϕ^+ un système de racines positives de ϕ. Si $w \in W(\Phi)$ vérifie $w.\phi^+ = \phi^+$, alors $\det(w) = 1$.

La proposition suivante donne le type des 2-structures suivant le type de Φ.

[1] Le 'c' de c-structure rappelle qu'il s'agit de sous-systèmes de racines *clos*.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Proposition 1.3 [4, Section 2] *Soit Φ un système de racines. Le groupe $W(\Phi)$ agit transitivement sur l'ensemble des 2-structures de Φ et si Φ est irréductible alors ϕ est du type suivant :*

Φ	A_n	B_{2n}	B_{2n+1}	C_{2n}	C_{2n+1}	D_n
ϕ	$A_1^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$	B_2^n	$B_2^n \times A_1$	B_2^n	$B_2^n \times A_1$	$A_1^{2\lfloor n/2 \rfloor}$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.4 *Soit Φ un système de racines. Le groupe $W(\Phi)$ agit transitivement sur* $\mathrm{Str}(\Phi)$ *et si Φ est irréductible, alors ϕ est du type suivant :*

Φ	A_n	B_n	C_{2n}	C_{2n+1}	D_n
ϕ	$A_1^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$	$A_1^{2\lfloor n/2 \rfloor - 2} \times B_2$	B_2^n	$B_2^n \times A_1$	$A_1^{2\lfloor n/2 \rfloor}$

.

Démonstration On se ramène au cas où Φ est irréductible. Si Φ est de type A_n, une c-structure ne peut avoir que des facteurs de type A_1 et au plus $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ facteurs. On pose

$$\Phi = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \text{ et } \phi = \{\pm(e_{2i-1} - e_{2i}) \mid 1 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor\}.$$

On observe que ϕ est une c-structure de Φ.

Si Φ est de type D_n, de nouveau une c-structure ne peut avoir que des facteurs de type A_1 et au plus $2\lfloor n/2 \rfloor$ facteurs. On pose

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \text{ et } \phi = \{\pm e_{2i-1} \pm e_{2i} \mid 1 \leq i \leq 2\lfloor n/2 \rfloor\}.$$

On observe que ϕ est bien une c-structure de Φ.

Si Φ est de type B_n, on pose

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

et on considère $\psi = \{\pm e_1, \pm e_2\} \cup \{\pm e_{2i-1} \pm e_{2i} \mid 1 \leq i \leq n/2\}$. On observe alors que ψ est un sous-système de racines clos de Φ du type $A_1^{2\lfloor n/2 \rfloor - 2} \times B_2$ et on a $\mathrm{Card}(\psi) = 4\lfloor n/2 \rfloor + 4$. Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. Comme les racines courtes non égales au signes près sont non fortement orthogonales, soit ϕ possède un unique facteur de type B_2 et alors les autres facteurs sont constitués de racines longues soit ϕ ne contient que des facteurs de type A_1 et au plus l'un de ces facteurs contient des racines courtes. Supposons que ϕ contient un facteur de type A_1 constitué de racines courtes; on a alors d'après ce qui précède que ϕ est de type A_1^p. De plus, comme le cardinal de ϕ est maximal, on a $p = 1 + 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et $\mathrm{Card}(\phi) = 2 + 4\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Comme $\mathrm{Card}(\psi) > \mathrm{Card}(\phi)$, on obtient une contradiction ainsi tous les facteurs de type A_1 de ϕ sont constitués de racines longues. Supposons à présent que ϕ ne possède pas de facteur de type B_2. On a alors ϕ de type A_1^p ou $p = 4\lfloor n/2 \rfloor$. De nouveau, on a $\mathrm{Card}(\phi) < \mathrm{Card}(\psi)$, ce qui est absurde. On en déduit que ϕ possède un unique facteur de type B_2 et $\psi \in \mathrm{Str}(\Phi)$.

Si Φ est de type C_n. On pose

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

et on considère

$$\psi = \{\pm e_{2i-1} \pm e_{2i} \mid 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

On remarque que ψ est un sous-système de racines clos de Φ de type $B_2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ si n est pair et $B_2^{\lfloor n/2 \rfloor} \times A_1$ si n est impair. Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On a alors que ϕ est de type $A_1^{p+r} \times B_2^s$ où p (resp. r) est le nombre de facteurs de type A_1 de ϕ associés à des racines longues (resp. courtes) de Φ. On a nécessairement l'inégalité $p + r + 2s \leq n$. Supposons que $r \neq 0$. Soit α une racine courte de Φ appartenant à un facteur de type A_1 de ϕ. Il existe une unique racine courte β de Φ au signe près telle que α et β engendrent un sous-système de type B_2 de Φ. Si $\beta \notin \phi$ alors le cardinal de ϕ n'est pas maximal ce qui est absurde. Si $\beta \in \phi$, alors β appartient aussi à un facteur de type A_1 de ϕ. Comme un système de type B_2 possède plus d'éléments qu'un système de type A_1^2, on en déduit que ϕ n'est pas maximal. On obtient que l'on a nécessairement $r = 0$. Comme chaque paire de racines longues non égales au signe près engendre un sous-système clos de type B_2 de Φ et $\mathrm{Card}(A_1^2) < \mathrm{Card}(B_2)$, par maximalité, on a $p = 0$ ou 1. On en déduit que ϕ est nécessairement du type annoncé et $\psi \in \mathrm{Str}(\Phi)$.

D'après ce qui précède et la proposition 1.3, si Φ est irréductible de type différent de B, les notions de c-structure et de 2-structure coïncident ainsi, d'après la proposition 1.3, le groupe de Weyl $W(\Phi)$ opère transitivement sur $\mathrm{Str}(\Phi)$. Supposons que Φ est de type B_n. On note E l'ensemble des couples (σ, P) ou σ est une involution de $\{1, \dots, n\}$ qui possède au plus un point fixe et P une partie de cardinal 2 de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\sigma(P) = P$. On observe alors que l'on a la bijection suivante :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathrm{Str}(\Phi), \\ (\sigma, P) &\overset{\simeq}{\longmapsto} \bigcup_{i \neq \sigma(i)} \{\pm e_i \pm e_{\sigma(i)}\} \bigcup_{i \in P} \{\pm e_i\}. \end{aligned}$$

On observe ensuite que le groupe $W(\Phi)$ agit de manière naturelle et transitive sur l'ensemble E, on en déduit le résultat. La proposition est démontrée. ∎

Si l'on considère une partie P de Φ constituée de racines deux à deux orthogonales, alors le sous-système de racines de Φ engendré par P ne se décrit pas de manière aisée. Ce problème est posé dès que l'on veut déterminer l'ensemble des racines réelles d'une sous-algèbre de Cartan associée à un système de racines fortement orthogonales. Le lemme 1.15 donne une description du système de racines engendré par une partie P. Pour obtenir ce résultat, il est plus aisé de considérer le système de racines Φ comme un sous-système de racines d'un système de racines Φ' particulier (définition 1.5). On est alors ramené à déterminer le système de racines engendré par P dans Φ'. Pour cela, on définit une involution τ sur Φ' (définition 1.6).

Définition 1.5 On dit que Φ est plein si les composantes irréductibles de Φ sont de type A_1, B_n ou C_n avec $n \geq 2$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Définition 1.6 Soient Φ un système plein et Σ un ordre sur Φ. Une involution $\tau\colon \Phi \to \Phi$ est dite Σ-admissible si elle vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\tau(\Sigma) \subset \Sigma$,
(2) pour $\alpha \in \Phi$, on a $\tau(-\alpha) = -\tau(\alpha)$,
(3) soient $\alpha, \beta \in \Phi$ tels que $\alpha \perp \beta$, on a alors $\alpha = \pm\tau(\beta)$ ou $\alpha \perp \tau(\beta)$,
(4) soit Ψ un sous-système de racines de Φ de type B_2. On a alors $\tau(\Psi) = \Psi$, $\tau|_\Psi \neq \mathrm{id}$ et $\tau|_\Psi$ fixe au moins un élément de Ψ.

Remarque D'après cette définition, l'involution τ permute les composantes irréductibles de type A_1 et fixe les composantes irréductibles de rang supérieur ou égal à 2.

Définition 1.7 Soit Φ un système de racines. On note $R(\Phi)$ la réunion des composantes irréductibles de Φ de type A_1 et pour $\alpha \in \Phi$, on désigne par Φ^α la composante irréductible de Φ contenant α et on pose $\Phi_\alpha = \{\beta \in \Phi \mid \beta \perp \alpha\}$.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Lemme 1.8 *Soient Φ un système plein et Σ un ordre sur Φ. Alors, il existe une involution Σ-admissible τ de Φ. De plus, si Φ est irréductible de type B_n ou C_n avec $n \geq 3$ alors τ est unique.*

Démonstration Supposons qu'il existe une involution Σ-admissible τ. Pour $w \in W(\Phi)$, l'application $w \circ \tau \circ w^{-1}$ est $w(\Sigma)$-admissible. Cela montre que l'existence ne dépend pas de l'ordre choisi. D'après la remarque qui suit la définition 1.6, on peut se ramener au cas où $R(\Phi) = \Phi$ ou $R(\Phi) = \varnothing$. Si $\Phi = A_1^p$, l'existence est claire, il suffit de prendre $\tau = \mathrm{id}$. Si $\Phi = B_n$ avec $n \geq 2$, on considère l'ordre

$$\Sigma = \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

et on pose $\tau(\pm e_i) = \pm e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau(\pm e_i \pm e_j) = \pm e_i \mp e_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$. On vérifie alors que τ est Σ-admissible. Si $\Phi = C_n$, la construction précédente, en remplaçant les racines $\pm e_i$ par $\pm 2e_i$ définit une involution Σ-admissible τ. L'existence de τ est montré pour tout système plein.

Montrons à présent l'unicité. On suppose que $\Phi = B_n$ avec $n \geq 3$ et on considère une involution Σ-admissible τ, où l'ordre Σ est celui défini précédemment. Soit α une racine courte de Φ. Il existe deux sous-systèmes de racines Ψ_1 et Ψ_2 de type B_2 tels que $\Psi_1 \cap \Psi_2 = \{\pm\alpha\}$. D'après les points 2 et 4 de la définition précédente, on obtient que $\tau(\alpha) = \alpha$. Soit α une racine longue. Il existe alors un unique sous-système Ψ de type B_2 de Φ tel que $\alpha \in \Psi$. Comme les racines courtes de Ψ ont fixées, on en déduit d'après le point 4 que τ échange les racines longues positives de Ψ et l'application τ est unique. Par les mêmes arguments, on peut montrer que τ est unique pour Φ de type C_n avec $n \geq 3$. ■

Remarque Si $\Phi = B_n$ ou C_n avec $n \geq 3$, on a

$$\tau(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ est courte} & \text{si } \Phi \text{ est de type } B_n, \\ \alpha \text{ est longue} & \text{si } \Phi \text{ est de type } C_n. \end{cases}$$

Si Φ est de type A_1^p ou B_2, l'involution τ n'est pas unique. Dans le premier cas, on montre aisément que l'ensemble des involutions Σ-admissibles s'identifie avec l'ensemble des permutations de Σ d'ordre 2. Dans le deuxième cas, on a le lemme suivant :

Lemme 1.9 *Soient Φ de type* B_2*, Σ un ordre de Φ et τ une involution Σ-admissible. Alors τ conserve la longueur des racines. L'involution τ fixe les racines courtes (resp. longues) si et seulement si τ permute les racines longues (resp. courtes).*

Démonstration On pose $\Phi = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_1 \pm e_2\}$ et $\Sigma = \{e_1, e_2, e_1 \pm e_2\}$. On sait alors d'après le point 3 de la définition que l'involution τ permute les racines e_1, e_2 et les racines $e_1 \pm e_2$. Comme $\tau \neq \mathrm{id}$ et τ possède au moins un point fixe, on en déduit qu'il y a exactement 2 involutions Σ-admissibles. ■

Les deux lemmes suivants fournissent quelques propriétés de l'involution τ.

Lemme 1.10 *Soient Φ un système plein, Σ un système de racines positives de Φ et τ une involution Σ-admissible. On considère $\alpha, \beta \in \Phi$ tels que $\alpha \perp \beta$. On a alors $\tau(\alpha) \perp \tau(\beta)$.*

Démonstration Si $\alpha, \beta \in R(\Phi)$ alors $\tau(\alpha), \tau(\beta) \in R(\Phi)$ et appartiennent à des composantes irréductibles différentes de $R(\Phi)$. On en déduit que $\tau(\alpha) \perp \tau(\beta)$. Si $\alpha \in R(\Phi)$ et $\beta \notin R(\Phi)$, on a alors $\tau(\alpha) \in R(\Phi)$ et $\tau(\beta) \notin R(\Phi)$ ainsi $\tau(\alpha) \perp \tau(\beta)$. Par le même argument, on obtient le résultat si α et β appartiennent à des composantes irréductibles de rang supérieur à 2 différentes. Ensuite, on peut supposer que Φ est irréductible de rang au moins 2. Le cas où Φ est de type B_2 est immédiat d'après le lemme 1.9. Sinon, l'involution τ est unique pour un ordre donné sur Φ. Supposons par exemple que Φ est de type B_n avec $n \geq 3$. Si α est courte, on a $\tau(\alpha) = \alpha$. Si β est courte le résultat est évident. Si β est longue, il existe un unique sous-système de racines Ψ de Φ, de type B_2 contenant β. Et on a nécessairement $\alpha \perp \Psi$, on en déduit que $\alpha \perp \tau(\beta)$. Il reste à considérer le cas où α et β sont longues. On note Ψ_1 (resp. Ψ_2) l'unique sous-système de racines de Φ, de type B_2 contenant α (resp. β). Si $\Psi_1 = \Psi_2$, le résultat est clair d'après le lemme 1.9. Si $\Psi_1 \neq \Psi_2$, on a nécessairement $\Psi_1 \perp \Psi_2$ et on en déduit le résultat. Par les même arguments, on montre que le lemme est aussi vérifié pour Φ de type C_n avec $n \geq 3$. Le lemme est démontré. ■

Lemme 1.11 *On conserve les notations du lemme précédent. Pour $\alpha \in \Phi$ et $w \in W(\Phi)$, on a la relation $\tau(w\alpha) = \pm w\tau(\alpha)$.*

Démonstration On se ramène au cas où $\Phi = R(\Phi)$ ou Φ irréductible. Si Φ est de type A_1^p, il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\tau(w\alpha) = \tau(\epsilon\alpha) = \epsilon\tau(\alpha) = \pm w\tau(\alpha)$. On suppose maintenant que Φ est irréductible. Considérons l'involution τ' définie par

$$\tau'(\alpha) = \pm w^{-1}\tau(w\alpha)$$

pour $\alpha \in \Phi$ où le signe est de telle sorte que $\tau'(\alpha)$ et α sont de même signe (positifs ou négatifs). On observe alors que τ' est Σ-admissible. Supposons tout d'abord que Φ est de type B_n ou C_n avec $n \geq 3$. D'après le lemme 1.8, on a par unicité $\tau = \tau'$. Si

Φ est de type B_2, l'involution τ laisse fixe les racines courtes (resp. les racines longues) si et seulement si τ' fait de même. On en déduit que $\tau = \tau'$ grâce au lemme 1.9. On en déduit alors le résultat. ∎

On souhaite à présent définir la notion de clôture pleine d'un système de racines. Il s'agit de considérer tout système de racines comme un sous-système de racines d'un système de racines plein.

Définition 1.12 Soient Φ, Φ' deux systèmes de racines. On considère la décomposition en composantes irréductibles de Φ' : $\Phi' = \Phi'_1 \cup \cdots \cup \Phi'_p$. On dit que Φ' est une clôture pleine de Φ si :

(1) Φ est un sous-système de racines de Φ' et Φ' est plein.
(2) Les systèmes de racines $\Phi \cap \Phi'_i$ sont les composantes irréductibles de Φ.
(3) Le type de Φ'_i est donné par le type de $\Phi \cap \Phi'_i$ suivant le tableau suivant :

Φ'_i	$\Phi \cap \Phi'_i$
A_1	A_1
B_n	A_{n-1}, B_n ou D_n, $n \geq 3$
C_n	$C_n (n \geq 2)$.

Remarque • Il est clair que pour un système de racines donné Φ, il existe un système de racines Φ' tel que Φ' soit une clôture pleine de Φ.
• On remarque aussi que Φ et Φ' ont le même nombre de composantes irréductibles.

On souhaite à présent montrer que l'injection de Φ dans une clôture pleine Φ' de Φ est unique à conjugaison près.

Lemme 1.13 *Soit Φ' une clôture pleine de Φ. Alors Φ est l'unique sous-système de racines de Φ' isomorphe à Φ à conjugaison près par $W(\Phi')$. Si Φ est irréductible et de type* D *alors Φ est l'ensemble des racines non τ-invariantes de Φ'.*

Démonstration Si Φ est plein, ce résultat est évident. On suppose que Φ est non plein. Ensuite, il suffit de montrer le résultat dans le cas où Φ est irréductible. On désigne par Φ'_l (resp. Φ'_c) l'ensemble des racines longues (resp. courtes) de Φ'. Comme toutes les racines de Φ sont de même longueur, on a

$$\Phi \subset \Phi'_l \text{ ou } \Phi \subset \Phi'_c.$$

Cas 1 Si Φ est de type D_n et $\Phi' = B_n$, on a $\mathrm{Card}(\Phi) = \mathrm{Card}(\Phi'_l)$ et $\mathrm{Card}(\Phi'_c) < \mathrm{Card}(\Phi'_l)$ ainsi $\Phi = \Phi'_l$.

Cas 2 De même, si Φ est de type D_n et $\Phi' = C_n$, on a $\mathrm{Card}(\Phi) = \mathrm{Card}(\Phi'_c)$ et $\mathrm{Card}(\Phi'_l) < \mathrm{Card}(\Phi'_c)$ ainsi $\Phi = \Phi'_c$.

Cas 3 Si $\Phi = A_{n-1}$ et $\Phi' = B_n$, comme les racines courtes de Φ' non égales au signe près sont orthogonales, on a nécessairement $\Phi \subset \Phi'_l$. On considère ensuite deux sous-cas :

Sous-cas 1 Si $n = 3$, pour $\alpha, \beta \in \Phi$, on a $\alpha \not\perp \beta$ ainsi $\tau(\Phi) \cap \Phi = \varnothing$. Comme $2\,\mathrm{Card}(\Phi) = \mathrm{Card}(\Phi'_l)$, on en déduit qu'il existe $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq 3} \in \{\pm 1\}^3$ tels que

$$\Phi = \{\epsilon_i e_i - \epsilon_j e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 3\}.$$

Le résultat est obtenu pour $n = 3$.

Sous-cas 2 On suppose $n \geq 4$. Soient α et β deux racines de Φ orthogonales. On observe qu'il existe alors $\gamma \in \Phi$ telle que α, β et γ forment une base du sous-système de racines de Φ engendré par α, β et γ et tel que ce système soit de type A_3. Supposons que $\tau(\alpha) = \pm\beta$. On a alors nécessairement $\gamma \not\perp \alpha$ et $\gamma \not\perp \beta$ ce qui implique que $\gamma \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$. Ceci est absurde. On en déduit que $\alpha \neq \pm\tau(\beta)$ et il existe une famille $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n} \in \{\pm 1\}^n$ telle que $\Phi = \{\epsilon_i e_i - \epsilon_j e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$. On en déduit le résultat. ∎

Définition 1.14 Soient P et Q des parties de Φ, Φ' une clôture pleine de Φ, Σ' un ordre de Φ' et τ une involution Σ'-admissible de Φ'. On pose

$$\langle P\rangle_Q = (\mathrm{Vect}_{V^*} P) \cap Q, \qquad P^\tau = \{\alpha \in P \mid \tau(\alpha) \in P\}.$$

où $\mathrm{Vect}_{V^*}(P)$ désigne l'espace vectoriel engendré par P dans V^*.

Lemme 1.15 *Avec les notations de la définition précédente, soit P une partie de Φ constituée d'éléments deux à deux orthogonaux. On a alors*

$$\langle P\rangle_\Phi = \langle P^\tau\rangle_\Phi \ \dot\cup\ \{\pm\alpha \in \Phi \mid \alpha \in P\backslash\tau(P)\}.$$

Démonstration Supposons que le résultat est démontré si Φ plein (*i.e.*, $\Phi = \Phi'$). Montrons que cela implique que le résultat est vérifié pour tout Φ. En effet comme Φ est un sous-système de racines de Φ', on a l'égalité

$$\langle P\rangle_{\Phi'} = \langle P^\tau\rangle_{\Phi'} \ \dot\cup\ \{\pm\alpha \in \Phi' \mid \alpha \in P\backslash\tau(P)\}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\langle P\rangle_\Phi &= \langle P\rangle_{\Phi'} \cap \Phi = (\langle P^\tau\rangle_{\Phi'} \cap \Phi) \ \dot\cup\ (\{\pm\alpha \in \Phi' \mid \alpha \in P\backslash\tau(P)\} \cap \Phi)\\ &= \langle P\rangle_\Phi \ \dot\cup\ \{\pm\alpha \in \Phi \mid \alpha \in P\backslash\tau(P)\}\end{aligned}$$

Le lemme est vérifié. Il reste à montrer le résultat dans le cas où Φ est plein. On remarque que l'on peut se restreindre au cas où $\Phi = R(\Phi)$ ou Φ irréductible. Si Φ est de type A_1^p, on a

$$\begin{aligned}\langle P\rangle_\Phi &= P \cup -P = \{\pm\alpha \mid \alpha \in P^\tau\} \ \dot\cup\ \{\pm\alpha \mid \alpha \in P\backslash\tau(P)\}\\ &= \langle P^\tau\rangle_\Phi \ \dot\cup\ \{\pm\alpha \in \Phi \mid \alpha \in P\backslash\tau(P)\}.\end{aligned}$$

On suppose à présent que Φ est de type B_n ou C_n. A partir de l'égalité $P = P^\tau \ \dot\cup\ (P\backslash P^\tau)$, on obtient :

$$\langle P\rangle_\Phi = \langle P^\tau\rangle_\Phi \ \dot\cup\ \{\pm\alpha \in \Phi \mid \alpha \in P\backslash P^\tau\}.$$

On en déduit le résultat. ∎

Lemme 1.16 *On conserve les hypothèses du lemme précédent. Si $P = P^\tau$, $P \neq \varnothing$ et Φ irréductible alors le système de racines $\langle P\rangle_\Phi$ est irréductible. De plus, si Φ est plein alors $\langle P\rangle_\Phi$ est aussi plein.*

Démonstration On suppose tout d'abord que Φ est plein. Si Φ est de type A_1, le résultat est évident. Si Φ est de type B_n (resp. C_n) avec $n \geq 3$, en utilisant la remarque suivant le lemme 1.8, on observe qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\langle P\rangle_\Phi$ soit de type B_p (resp. C_p) ainsi on a le résultat. Dans le cas où Φ est de type B_2, on a $\langle P\rangle_\Phi = \Phi$ si $\mathrm{Card}(P) = 2$ et $\langle P\rangle_\Phi$ de type A_1 sinon.

On suppose à présent Φ non plein. Si Φ est de type A_{n-1} avec $n \geq 3$, on a, d'après les lemmes 1.13 et 1.11, l'égalité $P^\tau = \varnothing$. Si Φ est de type D_n, on a alors $\langle P\rangle_{\Phi'}$ de type B_p avec $p \in \mathbb{N}$ d'après ce qui précède. Comme Φ est l'ensemble des racines non τ-invariantes de Φ' d'après le lemme 1.13, on en déduit que $\langle P\rangle_\Phi$ est de type D_p et le lemme est démontré. ■

Exemple On suppose que $\Phi = \mathrm{B}_4$ et $P = \{e_1 \pm e_2, e_3 + e_4, e_5\}$. On a alors $P^\tau = \{e_1 \pm e_2, e_5\}$, où $\langle P^\tau\rangle_\Phi$ est un système irréductible de type B_3 et

$$\langle P\rangle_\Phi = \langle P^\tau\rangle_\Phi \cup \{\pm(e_3 + e_4)\}.$$

On souhaite à présent montrer le lien entre les notions de c-structure, de système plein et d'involution admissible. Soient Φ un système de racines, Φ' une clôture pleine de Φ, Σ' un ordre sur Φ' et τ une involution Σ'-admissible. On pose $\Sigma = \Sigma' \cap \Phi$, Σ est alors un ordre sur Φ. Le principal résultat est le lemme 1.21 qui prouve qu'il existe une involution admissible induite sur une c-structure par τ. Précisons que par définition une c-structure est un système plein. On montre tout d'abord que les c-structures d'un système plein sont $\tau-$invariantes.

Lemme 1.17 *Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi')$. On a alors $\tau(\phi) = \phi$.*

Démonstration D'après le lemme 1.11 et la proposition 1.4, s'il existe une C-structure de Φ' qui vérifie la propriété alors par conjugaison par $W(\Phi')$ toutes les c-structures de Φ' vérifient la propriété. On peut supposer que Φ' vérifie $R(\Phi') = \Phi'$ ou $R(\Phi') = \varnothing$. Si $\Phi' = \mathrm{A}_1^p$, on a $\phi = \Phi'$ et le résultat est évident. Si $\Phi' = \mathrm{B}_n$ avec $n \geq 2$, on considère l'ordre

$$\Sigma = \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

On pose

$$\phi = \{\pm e_1, \pm e_2\} \cup \{\pm e_{2i-1} \pm e_{2i} \mid 1 \leq i \leq n/2\}.$$

On observe alors que ϕ est une c-structure $\tau-$invariante. De même, on peut construire une c-structure $\tau-$invariante dans le cas où $\Phi' = \mathrm{C}_n$. ■

Lemme 1.18 *Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$ alors il existe $\phi' \in \mathrm{Str}(\Phi')$ telle que $\phi' \cap \Phi = \phi$.*

Démonstration Si Φ est plein, on a $\Phi = \Phi'$ et le résultat est évident. Sinon, on peut se ramener au cas où Φ est irréductible. D'après la proposition 1.4 et l'inclusion

$W(\Phi) \subset W(\Phi')$, il suffit de montrer le résultat pour une seule c-structure de Φ. Si $\Phi = \mathrm{A}_{n-1}$ avec $n \geq 3$, on considère la c-structure suivante :

$$\phi = \{\pm(e_{2i-1} - e_{2i}) \mid 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor\}.$$

On a $\Phi' = \mathrm{B}_n$, et on pose $\phi' = \{\pm e_1, \pm e_2\} \cup \{\pm e_{2i-1} \pm e_{2i} \mid 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor\}$. On observe alors que ϕ' est une c-structure de Φ' telle que $\phi = \Phi \cap \phi'$. De même, on montre le résultat pour Φ de type D_n. ■

Lemme 1.19 *Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On a l'inclusion suivante : $\tau(\phi) \cap \Phi \subset \phi$.*

Démonstration D'après le lemme 1.18, il existe $\phi' \in \mathrm{Str}(\Phi')$ telle que $\phi = \phi' \cap \Phi$. Le lemme 1.17 permet alors d'écrire

$$\tau(\phi) \cap \Phi = \tau(\phi' \cap \Phi) \cap \Phi \subset \phi' \cap \tau(\Phi) \cap \Phi \subset \phi.$$

■

Par définition tout élément de $\mathrm{Str}(\Phi)$ est un système de racines plein. La définition suivante définit une involution $\Sigma \cap \phi$-admissible (lemme 1.21) induite par τ.

Définition 1.20 Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On pose pour $\alpha \in \phi$:

$$\tau_\phi(\alpha) = \begin{cases} \tau(\alpha) & \text{si } \tau(\alpha) \in \Phi, \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque On remarque que $\Sigma \cap \phi$ est un ordre pour ϕ.

Lemme 1.21 *Avec les notations de la définition précédente, l'involution τ_ϕ est ϕ^+-admissible où $\phi^+ = \Sigma \cap \phi$.*

Démonstration D'après le lemme 1.19, on a $\tau_\phi(\phi) = \phi$. On en déduit que τ_ϕ est une involution. Les points 1 et 2 de la définition 1.6 sont vérifiés. Soient $\alpha, \beta \in \phi$. Si $\tau_\phi(\beta) = \beta$, le point 3 de la définition 1.6 est vérifié. Si $\tau_\phi(\beta) \neq \beta$, on a $\tau_\phi(\beta) = \tau(\beta)$ et comme τ est admissible, on en déduit que τ_ϕ vérifie le point 3 de la définition 1.6. Soit Ψ un sous-système de racines de type B_2 de ϕ. D'après le lemme 1.18, il existe $\phi' \in \mathrm{Str}(\Phi')$ tel que $\phi' \cap \Phi = \phi$. Alors Ψ est aussi un sous-système de racines de ϕ' et Φ'. On en déduit que $\tau(\Psi) = \Psi$ et $\tau_\phi|_\Psi = \tau|_\Psi$. Le point 4 est démontré. On a montré que τ_ϕ est ϕ^+-admissible. ■

1.2 c-structures d'une algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive réelle. On suppose que les facteurs simples de $\mathfrak{g}$ sont de type non exceptionnel et que $\mathfrak{g}$ possède une sous-algèbre de Cartan elliptique modulo le centre de $\mathfrak{g}$ que l'on note $\mathfrak{h}_\varnothing$. On note $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_\varnothing)$ le système de racines de $\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}$ (le complexifié de $\mathfrak{h}_\varnothing$) dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note Φ pour $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_\varnothing)$. Soit ψ un sous-système de racines clos de Φ. On peut alors associé à ψ une sous-algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}(\psi)$ de $\mathfrak{g}$. Si ψ est irréductible alors $\mathfrak{g}(\psi)$ est simple et on dit que ψ est de type CI (par exemple) si $\mathfrak{g}(\psi)$ est une forme réelle de type CI.

Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On considère la décomposition de ϕ en composantes irréductibles. $\phi = \phi_1 \cup \phi_2 \cup \cdots \cup \phi_n$, et on considère aussi

$$\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{h}_\varnothing \mid \alpha(x) = 0 \,\forall\, \alpha \in \phi\}.$$

On pose alors $\mathfrak{g}_\phi = \mathfrak{g}(\phi_0) + \mathfrak{g}(\phi_1) + \cdots + \mathfrak{g}(\phi_j)$. Comme ϕ est un sous-système de racines clos de Φ, $\mathfrak{g}_\phi$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.22 Avec les notations introduites ci-dessus, on dit que $\mathfrak{g}_\phi$ est une *c*-structure de $\mathfrak{g}$. On note $\mathrm{Str}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des algèbres de Lie de la forme $\mathfrak{g}_\phi$.

On donne ci-dessous la liste des systèmes de racines associés aux algèbres de Lie simples de type A, B, C ou D possèdant une sous-algèbre de Cartan compacte. On rappelle que les formes réelles de type DI se divisent en deux sous-classes DI_a et DI_b suivant qu'elles correspondent à un index pair ou impair (*cf.* [11, Remarque 4, p. 406]). On sait que les formes réelles de type DI_b ne possèdent pas de sous-algèbre de Cartan compacte. Pour chaque système, on fixe un ordre et on précise les racines compactes ou non compactes. Soient n, p des entiers tels que $p \leq n$. On considère les ensembles suivants :

$$A = \{1 \leq i \leq p\}, \qquad A' = \begin{cases} \{1 \leq i \leq 2p-1 \mid i \text{ impair}\} & \text{si } 2p \leq n, \\ \{1 \leq i \leq n \mid i \text{ impair ou } i \geq 2(n-p)\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$B = \{p+1 \leq i \leq n\}, \quad B' = \begin{cases} \{1 \leq i \leq n \mid i \text{ pair ou } i \geq 2p\} & \text{si } 2p \leq n, \\ \{1 \leq i \leq 2(n-p) \mid i \text{ pair}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un système de type AIII avec $p \leq \lfloor n/2 \rfloor$, on pose :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}, \\ \Phi^c &= \{\pm(e_i - e_j) \mid i, j \in A, i \neq j\} \cup \{\pm(e_i - e_j) \mid i, j \in B, i \neq j\}, \\ \Phi^{\mathrm{nc}} &= \{\pm(e_i - e_j) \mid i \in A, j \in B\}. \end{aligned}$$

Pour un système de type BI, on pose :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ \Phi^c &= \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \in A', i \neq j\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \in B', i \neq j\} \cup \{\pm e_i \mid i \in B'\}, \\ \Phi^{\mathrm{nc}} &= \{\pm e_i \pm e_j \mid i \in A', j \in B'\} \cup \{\pm e_i \mid i \in A'\}. \end{aligned}$$

Pour un système de type CI, on pose :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ \Phi^c &= \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}, \\ \Phi^{\mathrm{nc}} &= \{\pm(e_i + e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Pour un système de type CII avec $p \leq n/2$, on pose :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2e_i \mid 1 \leq i \leq n\},\\ \Phi^c &= \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \in A', i \neq j\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \in B', i \neq j\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\},\\ \Phi^{\mathrm{nc}} &= \{\pm e_i \pm e_j \mid i \in A', j \in B'\}.\end{aligned}$$

Pour un système de type DI_a, on pose :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\},\\ \Phi^c &= \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \in A', i \neq j\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j \in B', i \neq j\},\\ \Phi^{\mathrm{nc}} &= \{\pm e_i \pm e_j \mid i \in A',\ j \in B'\}.\end{aligned}$$

Pour un système de type DIII, on pose :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\},\\ \Phi^c &= \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\},\\ \Phi^{\mathrm{nc}} &= \{\pm(e_i + e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}.\end{aligned}$$

Soit Φ l'un des systèmes de racines ci-dessus. On considère l'action naturelle de $W(\Phi^c)$ sur le quotient de $\{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ par $\{\pm 1\}$. Sur cet espace, le groupe $W(\Phi^c)$ définit 1 ou 2 orbites. On note s_Φ le cardinal minimal de ces orbites. On obtient alors avec les notations introduites précédemment le résultat pour la valeur de s_Φ :

Φ	AIII	BI	CI	CII	DI_a	DIII
s_Φ	p	p	n	p	p	n

Les ordres définis précédemment seront utilisés dans la sous-section 4.4.

1.3 c-structures d'un groupe réductif

Soit G un groupe réductif réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $\mathrm{G}_\mathbb{C}$ le groupe adjoint (connexe) de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, la complexifiée de $\mathfrak{g}$. On note $D(\mathrm{G})$ le sous-groupe dérivé de G. On dit que G appartient à la classe $\tilde{\mathcal{H}}$ si on a les propriétés suivantes :

- G a nombre fini de composantes connexes.
- $\mathrm{Ad}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{G}_\mathbb{C}$ et $\mathrm{Ad}(\mathrm{G})$ est connexe.
- $D(\mathrm{G})$ est à centre fini.
- G possède un sous-groupe de Cartan compact modulo le centre.
- Les facteurs simples de $\mathfrak{g}$ sont classiques.

Soit G dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$. On observe que G est dans la classe de Harish-Chandra (*cf.* [12, p. 192]). Pour $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$, on note $W_\mathrm{G}(\mathfrak{h})$ (ou plus simplement $W(\mathfrak{h})$) le groupe de Weyl de $\mathfrak{h}$ dans G. Soit $\mathrm{H}_\varnothing$ un sous-groupe de Cartan fondamental de G. On note $\mathfrak{h}_\varnothing = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}_\varnothing)$ et Φ le système de racines du couple $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}})$. On remarque aussi que le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ n'appartient pas $\tilde{\mathcal{H}}$ si $n \geq 2$.

On considère $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On désigne par G_ϕ le sous-groupe réductif connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\phi$.

Définition 1.23 On désigne par Str(G) l'ensemble des groupes G_ϕ avec $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On dit que G_ϕ est une *c*-structure de G.

Pour $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$, le sous-espace $\mathfrak{h}_\varnothing$ est une sous-algèbre de Cartan compacte modulo le centre de $\mathfrak{g}_\phi$ et $\mathrm{H}_\varnothing$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de Cartan fondamental de G_ϕ compact modulo le centre de G_ϕ. On observe que G_ϕ est dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$.

Exemple: Structures d'un groupe symplectique On considère un $\mathbb{R}$-espace symplectique V de dimension $2n$. On note le produit symplectique sur V ainsi : $(\ ,\ )$. On note $\mathrm{G} = \mathrm{Sp}(V)$ le groupe des isométries du couple $(V, (\ ,\ ))$.

A présent, on souhaite construire un sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\phi$. Pour une racine α, on désigne par H_α la coracine de α. Soit $\phi = \phi_1 \cup \cdots \cup \phi_p \in \mathrm{Str}(\Phi)$ la décomposition en éléments irréductibles. On sait que les ϕ_i sont de type CI ou A_1 et qu'il existe au plus une composante du type A_1. On considère la décomposition de V en sous-module $\mathfrak{h}_\varnothing$-irréductibles : $V = V^1 \oplus \cdots \oplus V^n$. Pour $1 \leq i \leq p$, on pose

$$V_i = \Big(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ H_\alpha . V^j = 0,\ \forall\, \alpha \in \phi_i}} V^j \Big)^{\perp}.$$

Comme $\mathrm{rang}(\phi) = \mathrm{rang}(\Phi)$, on a $V = \bigoplus^{\perp}_{1 \leq i \leq p} V_i$ et $\mathrm{G}_\phi = \times_{1 \leq i \leq p} \mathrm{Sp}(V_i)$. Ce groupe a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\phi$.

2 Systèmes de racines et sous-algèbres de Cartan

2.1 Rappels pour un groupe réductif

On rappelle dans cette sous-section des résultats connus pour les groupes réductifs (cf. [9]). On considère un groupe G dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$. On note $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Car}(\mathrm{G})$) l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ (resp. des sous-groupes de Cartan de G). Pour $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$, on note $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'ensemble des racines du couple $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Pour une partie P de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on note P^i (resp. P^c, P^{co}, P^{nc} et P^r) l'ensemble des racines imaginaires (resp. compactes, complexes, non compactes et réelles) de P. On fixe un sous-groupe de Cartan $\mathrm{H}_\varnothing$ compact modulo le centre de G et on pose $\mathfrak{h}_\varnothing = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}_\varnothing)$. On désigne par θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}_\varnothing \subset \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta(x) = x\}$. On note K le sous-groupe compact maximal de G attaché à θ. Pour alléger les notations, quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe, on notera $\Phi(\mathfrak{h})$ (resp. Φ) pour désigner le système de racines $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (resp. $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_\varnothing)$).

Soit $\alpha \in \Phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h})$. On désigne par H_α la coracine de α. On fixe des vecteurs radiciels X_α et $X_{-\alpha}$ associés respectivement à α et $-\alpha$ qui vérifient les relations $[H_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2 X_{\pm\alpha}$, $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ et $\overline{X_\alpha} = X_{-\alpha}$. On considère la transformée de Cayley suivante : $c_\alpha = \exp -i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{ad}(X_\alpha + X_{-\alpha})$. L'espace $\ker(\alpha) \oplus i\mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})$ est alors une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ que l'on note $\mathfrak{h}'$ et c_α est un isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{h}'_\mathbb{C}$.

Définition 2.1 Soient $\alpha \in \Phi(\mathfrak{h})$ et une partie P de $\Phi(\mathfrak{h})$. On note $\alpha \perp_{\Phi(\mathfrak{h})} P$ si $\alpha \perp_{\Phi(\mathfrak{h})} \beta$ pour tout $\beta \in P$.

On fixe un système de racines positives Σ de $\Phi = \Phi(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On note $\Delta(\mathfrak{g})$ l'ensemble des systèmes de racines fortement orthogonales de $\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On note $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ la sous-algèbre de Cartan définie par $\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}} = c_\mathcal{S}\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}$, où $c_\mathcal{S} = \prod_{\alpha\in\mathcal{S}} c_\alpha$. L'application $c_\mathcal{S}$ induit une bijection de Φ dans $\Phi(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$:

$$\Phi \xrightarrow{\simeq} \Phi(\mathfrak{h}_\mathcal{S})\alpha \longmapsto \alpha \circ c_\mathcal{S}^{-1}.$$

Par la suite, on identifiera les racines de Φ et $\Phi(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ par cette application. Cette identification induit un ordre sur $\Phi(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ que l'on note $\Sigma(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. Pour une racine $\alpha \in \Phi$, on pose

$$\alpha_{\mathrm{pos}} = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \in \Sigma, \\ -\alpha & \text{si } \alpha \notin \Sigma. \end{cases}$$

Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$, on pose $w * \mathcal{S} = \{w(\alpha)_{\mathrm{pos}} \mid \alpha \in \mathcal{S}\}$. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$. On rappelle les faits suivants (*cf.* [9, Proposition 2.16]) :

(i) Les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$ sont conjuguées sous G si et seulement si il existe $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$.
(ii) Si $\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) = \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}) = \varnothing$, alors il existe $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$, on désigne par $s_{\alpha,\mathcal{S}}$ la réflexion de $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ associée à la racine α. On rappelle le résultat suivant de [9, Lemme 2.61] :

Proposition 2.2 *Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^i(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. On a l'alternative suivante :*

(i) *Soit $\alpha \perp_\Phi \mathcal{S}$. On a alors $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) \Leftrightarrow \alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$.*
(ii) *Soit $\alpha \not\perp_\Phi \mathcal{S}$. Il existe alors $\beta \in \mathcal{S}$ unique telle que $\alpha \mathcal{R}_\Phi \beta$ et on a*

$$\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) \Leftrightarrow \alpha \in \Sigma^c(\mathfrak{h}_\varnothing).$$

Lemme 2.3 *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$. On suppose que l'on a $\alpha\mathcal{R}_\Phi\beta$, $\alpha\mathcal{R}_\Phi\gamma$ et $\beta \perp \gamma$. Alors, on a $\beta\mathcal{R}_\Phi\gamma$.*

Démonstration On a $\alpha+\beta, \alpha+\gamma \in \Phi$ par hypothèse et $(\alpha+\beta, \alpha+\gamma) = (\alpha, \alpha) > 0$ ainsi, on a $\beta - \gamma \in \Phi$ et $\beta\mathcal{R}_\Phi\gamma$. ■

On rappelle qu'il existe 3 formes réelles d'algèbres de Lie simples de type C et de rang 2.

Formes réelles associées	Φ^c
CI, $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(2,3)$	$\{\pm(e_1 - e_2)\}$
CII, $\mathfrak{sp}(1,1) \simeq \mathfrak{so}(1,4)$	$\{\pm 2e_1, \pm 2e_2\}$
BI, $\mathfrak{sp}(2,0) \simeq \mathfrak{so}(5$	Φ

où $\Phi = \{\pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm e_1 \pm e_2\}$.

Lemme 2.4 *Soient* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ *et* $\beta \in \Sigma^{c}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ *tels que* $\alpha \mathcal{R}_{\Phi} \beta$. *On a alors* $\alpha \pm \beta \in \Phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$.

Démonstration Supposons tout d'abord que $\mathcal{S} = \varnothing$. Le sous-système de racines de Φ engendré par α et β est de type B_2 avec α non compacte et β compacte. On sait alors d'après (2.1) que cela implique que les racines longues $\alpha \pm \beta$ sont non compactes et le résultat est démontré. Montrons à présent que l'on peut toujours se ramener au cas précédent.

Supposons que $\alpha \not\perp_{\Phi} \mathcal{S}$. Alors il existe $\gamma \in \mathcal{S}$ telle que $\gamma \mathcal{R}_{\Phi} \alpha$. Comme on a aussi $\gamma \perp \beta$, d'après le lemme 2.3, on a $\gamma \mathcal{R}_{\Phi} \beta$. D'après la proposition 2.2, on a alors $\alpha \in \Sigma^{c}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ et $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$. D'après ce qui précède, on a $\alpha \pm \beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$. Comme $\alpha \pm \beta$ sont des racines longues, on a nécessairement $\alpha \pm \beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$.

Si $\alpha \perp_{\Phi} \mathcal{S}$, on a nécessairement aussi $\beta \perp_{\Phi} \mathcal{S}$ d'après le lemme 2.3. On conclut alors comme dans le cas précédent. ■

Définition 2.5 Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $\beta \in \Sigma^{c}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ tels que $\alpha \mathcal{R}_{\Phi} \beta$. On pose

$$\mathfrak{sp}(\alpha, \beta) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{X_{\pm\alpha}, X_{\pm\beta}, X_{\pm\alpha\pm\beta}, H_{\alpha}, H_{\beta}\} \cap \mathfrak{g}$$

et $\mathrm{Sp}(\alpha, \beta)$ le sous-groupe connexe du groupe adjoint de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(\alpha, \beta)$.

Définition 2.6 Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On pose $\mathfrak{h}_1 = c_{\alpha}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g}$. Si $\alpha \perp \mathcal{S}$, alors on pose $u(\mathcal{S}, \alpha) = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}_1}$. Si $\alpha \not\perp \mathcal{S}$, il existe $\beta \in \mathcal{S}$ telle que $\alpha \mathcal{R} \beta$. On pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \backslash \{\beta\}$. On a alors $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})$. On considère la sous-algèbre de Cartan suivante : $\mathfrak{h}_2 = c_{\alpha+\beta} \circ c_{(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}',\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g}$, et on désigne par $u(\mathcal{S}, \alpha)$ l'unique isomorphisme linéaire de $\mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{h}_{2,\mathbb{C}}$ qui vérifie

$$u(\mathcal{S}, \alpha)\big(c_{\alpha} \circ c_{\beta}(H_{\gamma})\big) = c_{\alpha+\beta} \circ c_{(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}}}(H_{\gamma})$$

pour tout $\gamma \in \Phi(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})$.

Lemme 2.7 *Avec les notations de la définition précédente, il existe* $g \in \mathrm{Sp}(\alpha, \beta)$ *vérifiant* $u = g|_{\mathfrak{h}_1}$,

Démonstration On considère pour $i = 1, 2$, les espaces $\mathfrak{h}_i' = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{sp}(\alpha, \beta)$. Les espaces $\mathfrak{h}_1'$ et $\mathfrak{h}_2'$ sont des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{sp}(\alpha, \beta)$. De plus, on observe qu'elles sont déployées, ainsi il existe $g \in \mathrm{Sp}(\alpha, \beta)$ tel que $g.\mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h}_2'$. Ensuite d'après l'introduction de cette sous-section, on a $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_i' \oplus \ker(\alpha) \cap \ker(\beta)$ pour $i = 1, 2$. Comme g agit trivialement sur $\ker(\alpha) \cap \ker(\beta)$, on en déduit que $g.\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. ■

Définition 2.8 Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on pose

$$\mathcal{S}_{\alpha} = \begin{cases} \mathcal{S} \cup \{\alpha\} & \text{si } \alpha \perp_{\Phi} \mathcal{S}, \\ \mathcal{S} \backslash \{\beta\} \cup \{\beta + \alpha, (\beta - \alpha)_{\mathrm{pos}}\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $c_{\mathcal{S},\alpha} = u(\mathcal{S}, \alpha) \circ c_{\alpha}$.

Le lemme suivant justifie la définition précédente.

Lemme 2.9 *Avec les notations de la définition précédente, pour* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, *on a* $\mathcal{S}_\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ *et* $c_{\mathcal{S},\alpha}\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha,\mathbb{C}}$.

Démonstration Si $\alpha \perp\!\!\!\perp_\Phi \mathcal{S}$, on a $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S} \cup \{\alpha\} \in \Delta(\mathfrak{g})$. De plus,

$$c_\alpha \mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}} = c_\alpha \prod_{\beta\in\mathcal{S}} c_\beta \mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha,\mathbb{C}}.$$

Si $\alpha \not\perp\!\!\!\perp_\Phi \mathcal{S}$, on pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S}\backslash\{\beta\}$. Comme $(\alpha \pm \beta) \perp \mathcal{S}$ et $\alpha \pm \beta$ sont longues, on a $\alpha \pm \beta \perp\!\!\!\perp_\Phi \mathcal{S}'$. De plus, d'après le lemme 2.4, on a $\beta \pm \alpha_{\mathrm{pos}} \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On en déduit que $\mathcal{S}_\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$. Ensuite, on a l'égalité suivante d'après le lemme 2.4 :

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{S},\alpha}\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}} &= u(\mathcal{S},\alpha) \circ c_\alpha \circ c_\beta \prod_{\gamma\in\mathcal{S}'} c_\gamma \mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}} \\ &= c_{\beta+\alpha} c_{(\beta-\alpha)_{\mathrm{pos}}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}',\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha,\mathbb{C}}. \end{aligned}$$ ∎

Le choix d'une involution Σ-admissible τ permet de caractériser les classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan de la forme $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ de la manière suivante.

Proposition 2.10 *On suppose* Φ *irréductible. Soient* τ *une involution* Σ*-admissible et* $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ *et* $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$ *sont conjuguées,*
(ii) *il existe* $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ *tel que* $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$,
(iii) $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}')$ *et* $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}'^\tau)$.

Démonstration L'équivalence entre les points (i) et (ii) a déjà été rappelé et est bien connue, [9, proposition 2.16]. Montrons que le point (ii) implique le point (iii). Il existe alors $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Il est clair que l'on a alors $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}')$. Soit $\alpha \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau$. On a alors $\tau(\alpha) \notin \mathcal{S} \cup -\mathcal{S}$. D'après le lemme 1.11, on a $\tau(w\alpha) \notin w.\mathcal{S} \cup -w.\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cup -\mathcal{S}'$ ainsi $w\alpha_{\mathrm{pos}} \in \mathcal{S}'\backslash\mathcal{S}'^\tau$ et on en déduit que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau) \geq \mathrm{Card}(\mathcal{S}'^\tau)$. Par symétrie, on obtient $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}'^\tau)$ et le point (iii) est vérifié.

Supposons à présent que le point (iii) est vérifié. Supposons que l'algèbre dérivé de $\mathfrak{g}$ est une forme de type AIII, CII ou DIII. On sait alors d'après [11, pp. 399–413] que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$ sont conjugués (l'ordre de Hiraï est linéaire). On peut remarquer que dans ce cas la seule égalité $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}')$ entraîne $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}'^\tau)$.

Pour les autres formes réelles, on considère l'application suivante

$$\begin{aligned} j\colon \Delta(\mathfrak{g}) &\longrightarrow E, \\ \mathcal{S} &\longmapsto (\mathrm{Card}(\mathcal{S}), \mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau)), \end{aligned}$$

où $E = \{(\mathrm{Card}(\mathcal{S}), \mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau)) \mid \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})\}$. Par définition, cette application est surjective; de plus, d'après ce qui précède l'image de $j(\mathcal{S})$ ne dépend que de la classe de conjugaison de $\mathcal{S}$ sous $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On note $\bar{j}$ l'application induite sur $\Delta(\mathfrak{g})/W(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On note cet espace quotient F. Il reste à montrer que $\bar{j}$ est injective pour prouver que la propriété (iii) implique (ii). On observe que Card(F) représente le nombre de classes de conjugaisons de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.

On suppose que Φ est de type BI. On note m l'index de la forme symétrique orthogonale associée à $\mathfrak{g}$, [11, p. 401]. On a la relation suivante entre p (sous-section 1.2) et m :

$$m = \begin{cases} 2p & \text{si } p \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ 2(n-p)+1 & \text{si } p > \lfloor n/2 \rfloor. \end{cases}$$

Pour $t \in \mathbb{N}$, on note σ_t le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x+y=t$. On souhaite déterminer l'entier Card(E). On suppose que Φ est au moins de rang 3. L'ensemble $\mathcal{S}$ possède alors au plus une racine τ-invariante (*i.e.*, une racine courte). Si m est pair alors il y a p (resp. $n-p$) racines courtes non compactes (resp. compactes) dans Σ avec $p \leq \lfloor n/2 \rfloor$. On a ensuite les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(E) &= \mathrm{Card}\{\mathrm{Card}(\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau), \mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau)) \mid \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})\} \\ &= \mathrm{Card}\{(x,y) \mid x+y \leq p\} + \mathrm{Card}\{(x,y) \mid x+y \leq p-1\} \\ &= \sum_{t=0}^{p} \sigma_t + \sum_{t=0}^{p} \sigma_t = 2 \sum_{t=0}^{m/2-1} \sigma_t + \sigma_{m/2}. \end{aligned}$$

Si m est impair, il y a $n-p$ racines compactes courtes dans Σ avec $n-p<p$ ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(E) &= \mathrm{Card}\{(\mathrm{Card}(\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau), \mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau)) \mid \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})\} \\ &= \mathrm{Card}\{(x,y) \mid x+y \leq n-p\} + \mathrm{Card}\{(x,y) \mid x+y \leq n-p\} \\ &= 2 \sum_{t=0}^{\frac{m-1}{2}} \sigma_r. \end{aligned}$$

Si Φ est de rang 2, les deux égalités précédentes sont aussi vérifiées. On en déduit d'après [11, p. 405] que Card$(E) =$ Card(F) et $\bar{j}$ est une bijection.

On suppose que Φ est de type CI. Pour $t \in \mathbb{N}$, on note σ_t le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2x+y=t$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(E) &= \mathrm{Card}\{(\mathrm{Card}(\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau), \mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau)) \mid \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})\} \\ &= \mathrm{Card}\{(x,y) \mid 2x+y \leq n\} = \sum_{t=0}^{n} \sigma_t. \end{aligned}$$

D'après [11, p. 411], on a Card$(E) =$ Card(F) et $\bar{j}$ est bijective. Si Φ est de type DI$_a$, les arguments utilisés précédemment permettent de montrer aussi que $\bar{j}$ est bijective. La proposition est démontrée. ■

Lemme 2.11 *Soient $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ et $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On a alors*

$$c_{w*\mathcal{S}} \circ w \circ c_{\mathcal{S}}^{-1} \in W(\mathcal{S}, w * \mathcal{S}).$$

Remarque Par la suite, on considérera que $w \in W(\mathcal{S}, w * \mathcal{S})$.

Démonstration On pose $\mathcal{S}' = w * \mathcal{S}$. On peut considérer que w est un automorphisme linéaire de $\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}$. Il verifie $w.H_\alpha = \pm H_{w.\alpha}$. On en déduit que l'on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{S}}^{-1}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) &= \bigcap_{\alpha\in\mathcal{S}} \ker(\alpha) \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{S}} i\mathbb{R}H_\alpha \\ w \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) &= \bigcap_{\alpha\in\mathcal{S}'} \ker(\alpha) \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{S}'} i\mathbb{R}H_\alpha \\ c_{\mathcal{S}'} \circ w \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) &= \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}. \end{aligned}$$

Ainsi, $c_{\mathcal{S}'} \circ w \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}$ est un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ dans $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$. D'après le lemme 2.20 de [9], il existe $k \in \mathrm{K}$ tel que $w = \mathrm{Ad}(k)$ et tel que $c_{\mathcal{S}'} \circ \mathrm{Ad}(k) = \mathrm{Ad}(k) \circ c_{\mathcal{S}}$. On en déduit que $c_{\mathcal{S}'} \circ w \circ c_{\mathcal{S}}^{-1} = \mathrm{Ad}(k)$ et $c_{\mathcal{S}'} \circ w \circ c_{\mathcal{S}}^{-1} \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Le lemme est démontré. ∎

2.2 Propriétés relatives à une *c*-structure

On conserve les notations introduites dans la sous-section précédente. On considère $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. Pour différencier les objets que l'on considère relativement à ϕ (resp. $\mathfrak{g}_\phi$, G_ϕ) ou Φ (resp. $\mathfrak{g}$, G), on ajoutera en indice ϕ (resp. $\mathfrak{g}_\phi$, G_ϕ) ou Φ (resp. $\mathfrak{g}$, G). Comme par définition, ϕ est un sous-système de racines clos de Φ, on a l'inclusion $\Delta(\mathfrak{g}_\phi) \subset \Delta(\mathfrak{g})$. Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$, le sous-espace $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ est une sous-algèbre de Cartan commune à $\mathfrak{g}_\phi$ et $\mathfrak{g}$. On considère sur ϕ le système de racines positives $\Sigma(\mathfrak{h}_\varnothing) \cap \phi$ que l'on note $\Sigma_\phi(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g}_\phi)$, on considère le système de racines positives $\{\alpha \circ c_{\mathcal{S}} \mid \alpha \in \Sigma_\phi(\mathfrak{h}_\varnothing)\}$. On note cet ensemble $\Sigma_\phi(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. Comme G_ϕ est un sous-groupe de G, on a pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$, une inclusion canonique de $W_{\mathrm{G}_\phi}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ dans $W_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. Pour une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$, on note $[\mathfrak{h}]_{\mathrm{G}}$ sa classe sous G et on note par $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})/\mathrm{G}$ l'ensemble des classes de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Lemme 2.12 *Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On a l'inclusion (canonique) suivante :*

$$\{[\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}]_{\mathrm{G}} \mid \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)\} \subset \mathrm{Car}(\mathfrak{g})/\mathrm{G}.$$

Définition 2.13 Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On dit qu'une *c*-structure $\mathfrak{g}_\phi$ de $\mathfrak{g}$ (resp. ϕ de Φ) est maximale si l'inclusion précédente est une égalité. On note $\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ l'ensemble des *c*-structures maximales.

Remarque Une *c*-structure $\mathfrak{g}_\phi$ est maximale si et seulement si toute orbite semi-simple régulière de $\mathfrak{g}$ intersecte $\mathfrak{g}_\phi$. L'ensemble $\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ sera étudié dans la partie 3 (proposition 6.11) pour une sous-classe de $\tilde{\mathcal{H}}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Partie 2 Intégrales invariantes

Dans cette partie, on définit un espace de fonctions que l'on identifie de manière naturelle avec l'espaces des intégrales invariantes à support compact pour un groupe G dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$ puis on étudie les différents éléments qui interviennent dans la définition de cet espace.

On désigne par G un groupe dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$.

3 Définitions

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note V^* son dual. On considère une famille finie de $V^*\backslash\{0\}$ notée $\mathcal{E}$. On désigne par $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié de V et $\mathrm{Sym}(V)$ l'algèbre symétrique de $V_{\mathbb{C}}$ que l'on identifie avec l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants de V.

Définition 3.1 On pose

$$V_{\mathcal{E}} = V \backslash \bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} \ker(\alpha) = \{x \in V \mid \alpha(x) \neq 0 \,\forall\, \alpha \in \mathcal{E}\}.$$

Définition 3.2 On désigne par $\mathfrak{F}(V, \mathcal{E})$ l'espace des fonctions f lisses sur l'ouvert $V_{\mathcal{E}}$ à support borné telles que pour tout $w \in \mathrm{Sym}(V)$, la fonction $\partial(w) f$ se prolonge par continuité sur l'adhérence de chaque composante connexe de $V_{\mathcal{E}}$.

Définition 3.3 Pour $\alpha \in \mathcal{E}$ et $f \in \mathfrak{F}(V, \mathcal{E})$, on considère la fonction $\langle f \rangle_\alpha \in \mathfrak{F}(\ker \alpha, \mathcal{E}_\alpha)$ définie par

$$\langle f \rangle_\alpha(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ \alpha(y) > 0}} f(y) - \lim_{\substack{y \to x \\ \alpha(y) < 0}} f(y)$$

pour $x \in \ker(\alpha)_{\mathcal{E}_\alpha}$ où $\mathcal{E}_\alpha = \{\beta|_{\ker \alpha} \mid \beta \in \mathcal{E}\}\backslash\{0\} \subset \ker(\alpha)^*$. On note aussi pour $\alpha \in \mathcal{E}$, j_α l'injection de $\ker(\alpha)$ dans V.

Définition 3.4 Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on considère la fonction définie sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{reg}}$ (l'ouvert des éléments réguliers de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$) par

$$\delta_{\mathcal{S}}(x) = \mathrm{sign}\Big(\prod_{\alpha \in \Sigma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} \alpha(x)\Big) \prod_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} \alpha(x).$$

Sur $\Delta(\mathfrak{g})$, on considère la relation d'équivalence usuelle suivante :

$$\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}' \Leftrightarrow \text{ il existe } w \in W(\mathfrak{h}_{\varnothing}) \text{ tel que } w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'.$$

On souhaite considérer les intégrales invariantes comme des familles de fonctions indexées sur $\Delta(\mathfrak{g})$. Comme les intégrales orbitales sont G-invariantes, on est amené à considérer les transformations entre deux sous-algèbres de Cartan conjuguées. Le définition suivante définit une généralisation du groupe de Weyl.

Définition 3.5 Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$. On note $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ l'ensemble des applications $u\colon \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \to \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$ telles qu'il existe $g \in \mathrm{G}$ vérifiant $u = \mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}}$.

En cas d'ambiguïté sur le groupe G, on notera $W_{\mathrm{G}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ pour $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

Remarque Par définition, on a $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \neq \varnothing$. On remarque ensuite que l'on a $W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = W(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ et pour $w \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, on a $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = wW(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$.

Définition 3.6 Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$. On considère la fonction $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ sur $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ définie ainsi :

$$\sigma.\delta_{\mathcal{S}}(x) = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\sigma)\delta_{\mathcal{S}'}(x)$$

pour tout $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}^{\mathrm{reg}}$.

Définition 3.7 Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On pose

$$d_{\mathrm{G}}(\mathcal{S}, \alpha) = \begin{cases} 2 & \text{si } s_\alpha \in W_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $\Theta = \{(\mathcal{S}, \alpha) \in \Delta(\mathfrak{g}) \times \Sigma \mid \alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe, on omettra le G en indice.

Définition 3.8 Soit $\epsilon = \big(\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)\big)_{(\mathcal{S},\alpha)\in\Theta}$ tel que $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) \in \{\pm 1\}$. On note $\check{\mathfrak{I}}_\epsilon(\mathfrak{g})$ l'ensemble des familles de fonctions $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ telles que

(i) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on a $\phi_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$.

(ii) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on a

$$\langle \partial(w)\phi_{\mathcal{S}} \rangle_\alpha = id(\mathcal{S}, \alpha)\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,\psi_{\mathcal{S}_\alpha} \circ u(\mathcal{S}, \alpha) \circ j_\alpha.$$

(iii) Pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, on a

$$\phi_{\mathcal{S}'}(u.x) = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\phi_{\mathcal{S}}(x)$$

pour $u \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ et $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{reg}}$.

Pour un système de racines positives Γ de Φ et $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose

$$\Gamma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \{\beta \in \Phi^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \mid \beta \in \Gamma\}.$$

On rappelle la définition suivante (*cf.* [10] ou [2, section 3.1]) :

Définition 3.9 Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, Γ un système de racines positives de Φ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On dit que α est adaptée à $\Gamma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ si

$$\{\beta \in \Phi^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \mid \beta(\mathrm{H}_\alpha) > 0\} \subset \Gamma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}),$$

où H_α désigne la coracine de α.

Lemme 3.10 *Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. Il existe alors $\psi \in D(\mathfrak{g})$ telle que $\langle \phi_{\mathcal{S}} \rangle_{\alpha} \neq (0)$ où*

$$\phi_{\mathcal{S}}(x) = \delta_{\mathcal{S}}(x) \int_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_{\mathcal{S}}} \psi(g\,.\,x)\, d\dot{g}$$

pour $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{nc}}$ où $d\dot{g}$ désigne la mesure quotient habituelle sur $\mathrm{G}/\mathrm{H}_{\mathcal{S}}$.

Démonstration D'après le lemme 5.1.2 de [2], on peut se ramener à considérer les intégrales invariantes pour les groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$. Soit $\mathfrak{h}_{\varnothing}$ une sous-algèbre de Cartan elliptique de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et α une racine de $\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. La racine α est non compacte. On pose $\mathcal{S} = \{\alpha\}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ est la sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ telle que $c_\alpha(\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}}$. Pour le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, l'espace des intégrales invariantes s'identifie naturellement à l'ensemble des couples de fonctions $(\phi_{\varnothing}, \phi_{\mathcal{S}}) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\varnothing}, \{\alpha\}) \times \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \varnothing)$ tels que

- $\phi_{\mathcal{S}} \circ s_\alpha = \phi_{\mathcal{S}}$,
- $\langle \partial(w)\phi_{\varnothing} \rangle_{\alpha}(0) = i\partial\big(c_\alpha(w)\big)\, \phi_{\mathcal{S}}(0)\, \forall\, w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$.

Soit $\phi_{\mathcal{S}}$ une fonction paire lisse à support compact, constante au voisinage de 0 telle que $\phi_{\mathcal{S}}(0) = 1$. La transformée de Cayley c_α induit un isomorphisme entre $\mathfrak{h}_{\varnothing}$ et $i\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$. On pose $\phi_{\varnothing}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\big(\alpha(-ix)\big)\, \phi_{\mathcal{S}}\big(ic_\alpha(x)\big)$ pour $x \in \mathfrak{h}_{\varnothing}\backslash\{0\}$. On a alors $\phi_{\varnothing} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\varnothing}, \{\alpha\})$ et $\langle \phi_{\varnothing} \rangle_{\alpha} = i\phi_{\mathcal{S}}(0) \neq (0)$. Pour $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ non nul, on a $\langle \partial(w)\phi_{\varnothing} \rangle_{\alpha} = 0$ et $\partial\big(c_\alpha(w)\big)\, \phi_{\mathcal{S}} \circ j_\alpha = 0$, on en déduit que la relation de saut est vérifiée pour tout $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$.

On considère maintenant le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$. L'espace des intégrales invariantes s'identifie avec l'ensemble des couples $(\phi_{\varnothing}, \phi_{\mathcal{S}}) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\varnothing}, \{\alpha\}) \times \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \varnothing)$ tels que

- $\phi_{\varnothing} \circ s_\alpha = -\phi_{\varnothing}$,
- $\phi_{\mathcal{S}} \circ s_\alpha = \phi_{\mathcal{S}}$,
- $\langle \partial(w)\phi_{\varnothing} \rangle_{\alpha}(0) = i2\partial(c_\alpha(w))\phi_{\mathcal{S}}(0),\ \forall\, w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$.

On considère de nouveau une fonction paire lisse à support compact, constante au voisinage de 0 telle que $\phi_{\mathcal{S}}(0) = 1$. On pose $\phi_{\varnothing}(x) = \mathrm{sign}(\alpha(-ix))\phi_{\mathcal{S}}(ic_\alpha(x))$. On montre alors que le couple $(\phi_{\varnothing}, \phi_{\mathcal{S}})$ vérifie toutes les propriétés et $\langle \phi_{\varnothing} \rangle_{\alpha}(0) \neq 0$. ■

Lemme 3.11 *Soit $(\mathcal{S}, \alpha) \in \Theta$. Il existe un ordre Γ de Φ tel que α soit adaptée à $\Gamma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$.*

Démonstration On peut se ramener au cas où Φ est irréductible. On raisonne ensuite au cas par cas. Considérons par exemple le cas d'un système de type CI et de rang n. Soient $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ et $\prec$ une relation d'ordre sur $\{1, \dots, n\}$ tels que i_0 soit le plus petit élément de cet ensemble pour la relation d'ordre $\prec$. On pose

$$\Gamma = \{e_i \pm e_j \mid i \prec j\} \cup \{2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}. \tag{3.1}$$

On remarque alors que Γ est un système de racines positives sur Φ et $2e_{i_0}$ est adaptée à Γ. Soient i_0, $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i_0 \neq j_0$. On considère une relation d'ordre $\prec$ sur $\{1, \dots, n\}$ telle que i_0 et j_0 soient les plus petits éléments de $\{1, \dots, n\}$ pour cette relation d'ordre. En considérant l'égalité (3.1), on observe que $e_{i_0} + e_{j_0}$ est adaptée à

Γ. Pour la racine $e_{i_0} - e_{j_0}$, on considère le système de racines positives suivant :

$$\Gamma = \{e_i \pm e_j \mid i \prec j,\ i \neq j_0\} \cup \{-e_{j_0} \pm e_j \mid j_0 \prec j\} \\ \cup \{2e_i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \neq j_0\} \cup \{-2e_{j_0}\}.$$

On obtient de nouveau que $e_{i_0} - e_{j_0}$ est adaptée à Γ. ■

Théorème 3.12 *Soit* $\epsilon = (\epsilon(\mathcal{S}, \alpha))_{(\mathcal{S},\alpha)\in\Theta}$ *tel que* $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) \in \{\pm 1\}$ *pour tout* $(\mathcal{S}, \alpha) \in \Theta$. *On considère l'application*

$$N\colon \mathcal{C}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})} \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})), \\ \psi \longmapsto (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})},$$

où

$$\phi_{\mathcal{S}}(x) = \delta_{\mathcal{S}}(x) \int_{G/H_{\mathcal{S}}} \psi(g.x)\, d\dot{g}$$

pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ *et* $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{reg}$. *Il existe un unique* ϵ *telle que l'application* $\operatorname{im}(N) = \check{\mathfrak{I}}_{\epsilon}(\mathfrak{g})$.

Démonstration On fixe $(\mathcal{S}, \alpha) \in \Theta$, $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ semi-régulier tel que $\alpha(x) = 0$. D'après le lemme 3.11, il existe un système de racines positif Γ de Φ tel que α soit adaptée à $\Gamma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. Pour $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose

$$\delta^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}(x) = \operatorname{sign}\Big(\prod_{\alpha\in\Gamma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})} \alpha(x)\Big) \prod_{\alpha\in\Gamma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})} \alpha(x)$$

$$\epsilon^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}(x) = \prod_{\alpha\in\Gamma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})} \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

On remarque que l'on a

$$\epsilon^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}(x) = (-1)^{\frac{1}{2}\operatorname{Card}\{\beta\in\Gamma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}) \mid \bar{\beta}\in-\Gamma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})\}}.$$

En particulier, on a $\epsilon^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}(x) \in \{\pm 1\}$. Comme cet entier ne dépend pas de x, on le note $\epsilon^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}$. Il existe $\eta_{\mathcal{S}'} \in \{\pm 1\}$ tel que $\delta_{\mathcal{S}'}(x) = \delta^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}(x)\eta_{\mathcal{S}'}$. On a ensuite

$$\delta^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}(x) = \epsilon^{\Gamma}_{\mathcal{S}'}(x) \prod_{\alpha\in\Gamma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} \frac{\alpha}{|\alpha|} \prod_{\alpha\in\Gamma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} \alpha.$$

On note $f_{\mathcal{S}'} = \delta^{-1}_{\mathcal{S}'}\phi_{\mathcal{S}'}$. Comme α est adaptée à $\Gamma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, d'après [2, sous-section 3.2], on a

$$\begin{aligned}\langle \partial(w)\phi_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha}(x) &= \eta_{\mathcal{S}}\epsilon_{\mathcal{S}}^{\Gamma}\Big\langle \partial(w)\Big\{\Big(\prod_{\beta\in\Gamma^{i}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})}\frac{\beta}{|\beta|}\Big)\Big(\prod_{\beta\in\Gamma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})}\beta\Big) f_{\mathcal{S}}\Big\}\Big\rangle_{\alpha}(x)\\ &= id(\mathcal{S},\alpha)\eta_{\mathcal{S}}\epsilon_{\mathcal{S}}^{\Gamma}\partial\big(c_{\alpha}(w)\big)\\ &\qquad\times\Big\{\Big(\prod_{\beta\in\Gamma^{i}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_{\alpha}})}\frac{\beta}{|\beta|}\Big)\Big(\prod_{\beta\in\Gamma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_{\alpha}})}\beta\Big) f_{\mathcal{S}_{\alpha}}\Big\}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_{\alpha}(x)\\ &= id(\mathcal{S},\alpha)\frac{\eta_{\mathcal{S}}}{\eta_{\mathcal{S}_{\alpha}}}\frac{\epsilon_{\mathcal{S}}^{\Gamma}}{\epsilon_{\mathcal{S}_{\alpha}}^{\Gamma}}\partial\big(c_{\alpha}(w)\big)\,\phi_{\mathcal{S}_{\alpha}}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_{\alpha}(x).\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser :

$$\epsilon(\mathcal{S},\alpha) = \frac{\eta_{\mathcal{S}}}{\eta_{\mathcal{S}_{\alpha}}}\frac{\epsilon_{\mathcal{S}}^{\Gamma}}{\epsilon_{\mathcal{S}_{\alpha}}^{\Gamma}}.$$

On a montré l'existence de ϵ tel que $\mathrm{im}(N) \subset \check{\mathfrak{I}}_{\epsilon}(\mathfrak{g})$. Supposons qu'il existe $\epsilon' \neq \epsilon$ tel que $\mathrm{im}(N) \subset \check{\mathfrak{I}}_{\epsilon'}(\mathfrak{g})$. Il existe alors $(\mathcal{S},\alpha) \in \Theta$ tel que $\epsilon(\mathcal{S},\alpha) \neq \epsilon'(\mathcal{S},\alpha)$. D'après le lemme 3.10, il existe $\psi \in \mathcal{C}(\mathfrak{g})$ telle que $\langle\phi_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha} \neq 0$. Comme on a $\epsilon(\mathcal{S},\alpha)+\epsilon'(\mathcal{S},\alpha) = 0$, on obtient une contradiction. Ensuite, d'après le théorème 4.1.1 de [2], il est clair que $\mathrm{im}(N) = \check{\mathfrak{I}}_{\epsilon}(\mathfrak{g})$. Le théorème est démontré. ■

Définition 3.13 On désigne par $\check{\mathfrak{I}}(\mathfrak{g})$ l'espace $\check{\mathfrak{I}}_{\epsilon}(\mathfrak{g})$ tel que l'application $\mathrm{im}(N) = \check{\mathfrak{I}}_{\epsilon}(\mathfrak{g})$.

Remarque Dans la section suivante, on déterminera la valeur de $d(\mathcal{S},\alpha)$ ce qui permettra d'identifier $\check{\mathfrak{I}}(\mathfrak{g})$ avec un nouvel espace de fonctions que l'on notera $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$. Dans la sous-section 4.4, on déterminera la valeur de $\epsilon(\mathcal{S},\alpha)$.

4 Groupes de Weyl

4.1 Décomposition du groupe de Weyl d'une sous-algèbre de Cartan

Dans cette sous-section, on obtient un résultat de décomposition du groupe de Weyl d'une sous-algèbre de Cartan quelconque (propositions 4.11, 4.12 et 4.13) qui permet dans les sous-sections suivantes de déterminer les entiers $d(\mathcal{S},\alpha)$ et $\epsilon(\mathcal{S},\alpha)$.

On désigne par G un groupe dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$ et Φ' une clôture pleine de Φ. On fixe une sous-algèbre de Cartan elliptique modulo le centre de $\mathfrak{g}$ que l'on note $\mathfrak{h}_{\varnothing}$. On pose Φ le système de racines de $\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On considère sur Φ l'ordre Σ fixé dans la sous-section 1.2 pour chaque composante irréductible. On fixe ensuite un ordre Σ' sur Φ' de telle sorte que $\Sigma = \Sigma' \cap \Phi$. Sur Φ', on fixe une involution Σ'-admissible τ. Pour une partie R d'un groupe, on note $\langle\!\langle R\rangle\!\rangle$ le sous-groupe engendré par cette partie. Si toutes les racines de Φ sont de même longueur, on considère que Φ ne possède pas de racines courtes.

On souhaite tout d'abord rappeler un résultat dû à Chevalley. On rappelle que $W(\Phi)$ désigne le groupe de Weyl de Φ. Pour une partie P de Φ, on pose

$$W(\Phi)_P = \{w \in W(\Phi) \mid w.\alpha = \alpha, \ \forall\, \alpha \in P\}.$$

On rappelle que l'on a $\Phi_P = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \perp \beta \forall \beta \in P\}$. D'après un théorème de Chevalley (*cf.* [6, proposition 2.72]), on a.

Proposition 4.1 *Soient Φ un système de racines et P une partie constituée d'éléments de Φ deux à deux orthogonaux. On a l'égalité $W(\Phi)_P = W(\Phi_P)$.*

Définition 4.2 Soient $\alpha \in \Phi'$ et Ψ la composante irréductible de Φ' contenant α. On pose

$$\nu_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \text{ est courte,} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \alpha \text{ est longue.} \end{cases}$$

Soit P une partie de Φ'. On note

$$\Gamma = \left\{ \nu_\alpha\big(\alpha \pm \tau(\alpha)\big) \;\middle|\; \alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}, \tau(\alpha) \neq \alpha \right\},$$
$$^{\tau}P = \{\alpha \in P \mid \tau(\alpha) = \alpha\}.$$

Lemme 4.3 *On suppose Φ irréductible. L'ensemble des orbites de $W(\Phi^c)$ dans $^{\tau}\Phi'$ est formé de une, deux, trois ou quatre orbites. Plus précisément, on a*

Φ	*orbites de $W(\Phi^c)$ sur $^{\tau}\Phi'$*
AIII, $\mathrm{rang}(\Phi) \geq 2$	$\{e_i \mid i \in A\}, \{-e_i \mid i \in A\}, \{e_i \mid i \in B\}$ *et* $\{-e_i \mid i \in B\}$
BI *ou* DI_a *(avec $p \neq 1, n-1$)*	$\{\pm e_i \mid i \in A'\}$ *et* $\{\pm e_i \mid i \in B'\}$
DI_a *avec $p = 1$*	$\{e_1\}, \{-e_1\}, \{\pm e_i \mid 2 \leq i \leq n\}$
DI_a *avec $p = n-1$*	$\{e_2\}, \{-e_2\}, \{\pm e_i \mid i \neq 2\}$
CI	$\{2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ *et* $\{-2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
CII	$\{\pm 2e_i \mid i \in A'\}$ *et* $\{\pm 2e_i \mid i \in B'\}$
DIII	$\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ *et* $\{-e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

De plus, dès que α, β avec $\alpha \neq \beta$ sont dans la même orbite, on a $\nu_\alpha(\alpha - \beta) \in \Phi^c$.

Remarque On rappelle que si Φ est de type DI_a, on a $p = \mathrm{Car}(A')$.

Démonstration On obtient ce résultat au cas par cas (sous-section 1.2). ■

Remarque On remarque que l'on a en général pour $\alpha \in \Phi'$ tel que $\tau(\alpha) \neq \alpha$, la propriété $\nu_\alpha\big(\alpha \pm \tau(\alpha)\big) \in {}^{\tau}\Phi'$.

Lemme 4.4 *On a l'inclusion $\Gamma \subset {}^{\tau}\Phi'$ et Γ intersecte au plus deux orbites de $^{\tau}\Phi'$ sous l'action de $W(\Phi^c)$. Si $\Gamma \neq \varnothing$, on note ces orbites $\mathcal{O}_\pm$. S'il n'y a qu'une orbite, on note $\mathcal{O}_+ = \mathcal{O}_-$ l'unique orbite.*

Démonstration L'inclusion $\Gamma \subset {}^{\tau}\Phi'$ découle de la définition 4.2. On considère ensuite les différents cas pour Φ. D'après le lemme 4.3, l'action de $W(\Phi^c)$ de ${}^{\tau}\Phi'$ possède 4 orbites si et seulement si Φ est de type AIII sinon elle possède 1 ou 2 orbites. Il suffit donc de considérer le cas où Φ est de type AIII. Dans ce cas, Γ est la réunion des orbites $\{e_i \mid i \in A\}$ et $\{-e_i \mid i \in B\}$. Ensuite, si Φ est de type DI_a avec $p = 1$, on a $\Gamma = \{e_1\} \cup \{-e_i \mid 2 \leq i \leq n\}$ donc Γ intersecte exactement 2 orbites de ${}^{\tau}\Phi'$. On a le même résultat dans le cas où $p = n - 1$. Le résultat est démontré. ■

D'après le lemme précédent, on peut considérer la définition suivante.

Définition 4.5 Soit $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}$ tel que $\tau(\alpha) \neq \alpha$. On a $\Gamma \neq \varnothing$ et on fixe α_+ et α_- tels que $\{\alpha_+, \alpha_-\} = \{\nu_\alpha(\alpha \pm \tau(\alpha))\}$, $\alpha_\pm \in \mathcal{O}_\pm$. Si $\mathcal{O}_+ = \mathcal{O}_-$, on impose de plus que $\alpha_+ > \alpha_-$.

Remarque Les éléments $\alpha_\pm$ sont uniquement déterminés.

Définition 4.6 Soient $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}$ tels que $\tau(\alpha) \neq \alpha$ et $\tau(\beta) \neq \beta$. Si α et β appartiennent à la même composante irréductible, on pose :

$$w_{\alpha,\beta} = s_{\nu_{\alpha_-}(\alpha_- - \beta_-)} s_{\nu_{\alpha_+}(\alpha_+ - \beta_+)}.$$

Si α et β sont dans des composantes différentes, on pose $w_{\alpha,\beta} = \mathrm{id}$.

Lemme 4.7 *Avec les hypothèses de la définition précédente, on a $w_{\alpha,\beta} \in W(\Phi^c)$.*

Démonstration D'après le lemme 4.3, on a $\nu_{\alpha_\pm}(\alpha_\pm - \beta_\pm) \in \Phi^c$ ainsi $w_{\alpha,\beta} \in W(\Phi^c)$. ■

Définition 4.8 Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On pose $W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \{w \in W(\mathfrak{h}_{\varnothing}) \mid w * \mathcal{S} = \mathcal{S}\}$. Soit P une partie de Φ'. On pose $\bar{P}_{\mathcal{S}} = \{\alpha \in P \mid \alpha \perp \beta \, \forall \beta \in \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S})\}$.

Comme par hypothèse le groupe Ad(G) est connexe, on peut appliquer les résultats de Schmid [9] pour étudier le groupe de Weyl. On rappelle le résultat suivant de Schmid qui est le point de dipart de l'étude de $W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$:

Proposition 4.9 [9, proposition 2.36 et corollaire 2.43] *On a*

(i) $W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) W\big(\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$,

(ii) $W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \cap W\big(\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big) = \big\{ w \in W\big(\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \cap \Phi^c\big) \bigm| w * \mathcal{S} = \mathcal{S}\big\}$.

Définition 4.10 Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on désigne par $F_\Phi(\mathcal{S})$ l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S}) \backslash \mathcal{S}^\tau \cap \Phi$ tels que $\alpha \in \mathcal{S}$ ou $\alpha \in \Phi^c$ ou $\tau(\alpha) \in \Phi^{\mathrm{nc}}$ et $\alpha \mathcal{R} \tau(\alpha)$.

Pour un ensemble fini A, on note $S(A)$ le groupe des permutations de A, $\tilde{S}(A) = S(A) \lhd \{\pm 1\}^A$ et $\tilde{S}(A)_p = S(A) \lhd \{\pm 1\}^A_{\mathrm{paire}}$ où $\{\pm 1\}^A_{\mathrm{paire}} = \{(\epsilon_i)_{i \in A} \mid \prod \epsilon_i = 1\}$.

Proposition 4.11 *On suppose Φ est de type A_1^p ou irréductible de type* AIII, CI, CII, *ou* DIII. *Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On a $W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}}) \times W(\langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi) \times \widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, où*

$$\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \times \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in F_\Phi(\mathcal{S}) \rangle\!\rangle.$$

Remarque Cette égalité est valable pour toute involution Σ'-admissible τ.

Démonstration La preuve se fait au cas par cas en considérant les différentes algèbres simples possibles. ■

On pose pour $\alpha, \beta \in \Phi$, $\tilde{w}_{\alpha,\beta} = s_\alpha s_\beta s_{\tau(\alpha)} s_{\tau(\beta)}$.

Proposition 4.12 *On suppose* Φ *de type* DI. *Soit* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. *On a*

$$W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}}) \times W(\langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi) \times \widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}),$$

où

$$\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \times \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \times R(\mathcal{S}) \times \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in F_\Phi(\mathcal{S}) \rangle\!\rangle$$

et

$$R(\mathcal{S}) = \begin{cases} \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha_0,\beta_0}, s_{\beta_0+\tau(\beta_0)} s_{\gamma_0+\tau(\gamma_0)}, s_{\beta_0-\tau(\beta_0)} s_{\gamma_0-\tau(\gamma_0)} \rangle\!\rangle & \text{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \\ & \quad \text{et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha_0,\beta_0} \rangle\!\rangle & \text{si } \mathcal{S}^\tau = \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \\ & \quad \text{et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\beta_0+\tau(\beta_0)} s_{\gamma_0+\tau(\gamma_0)}, s_{\beta_0-\tau(\beta_0)} s_{\gamma_0-\tau(\gamma_0)} \rangle\!\rangle & \text{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau = \varnothing \\ & \quad \text{et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha_0,\gamma_0} \rangle\!\rangle & \text{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \\ & \quad \text{et } F(\mathcal{S}) = \varnothing, \\ \{\mathrm{id}\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $\alpha_0 \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau$, $\gamma_0 \in \mathcal{S}^\tau$, $\beta_0 \in \Sigma^{\mathrm{nc}}$, $\beta_0 \perp \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S})$ *fixés et* $F(\mathcal{S}) = \{\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}} \mid \beta \perp \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S})\}$. *Cette décomposition est unique.*

Démonstration Comme Φ est au moins de rang 3, l'involution τ fixe les racines courtes. On observe que $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ s'identifie au groupe $\tilde{\mathcal{S}}(A)_p \times \tilde{\mathcal{S}}(B)_p$. Soit $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w.\alpha = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$. On pose $A_{\mathcal{S}} = \{\beta \in A \mid \beta \perp \mathcal{S}\}$ et $B_{\mathcal{S}} = \{\beta \in B \mid \beta \perp \mathcal{S}\}$. On a alors $w \in \tilde{S}_p(A_{\mathcal{S}}) \times \tilde{S}_p(B_{\mathcal{S}}) = W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}})$. On pose $Q_1(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \cup -\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau$ et $Q_2(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^\tau \cup -\mathcal{S}^\tau$. On considère le morphisme

$$\begin{aligned} \nu_{\mathcal{S}} \colon W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) &\longrightarrow S(Q_1(\mathcal{S})), \\ \sigma &\longmapsto \sigma|_{Q_1(\mathcal{S})}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a $\ker(\nu_{\mathcal{S}}) = \{w \in W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \mid w.\alpha = \alpha \,\forall\, \alpha \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau\}$, et on observe que l'on a $\mathrm{im}(\nu_{\mathcal{S}}) \subset \big\{\sigma \in S\big(Q_1(\mathcal{S})\big) \bigm| \sigma(\alpha) = -\sigma(-\alpha) \,\forall\, \alpha \in Q_1(\mathcal{S})\big\}$. Le groupe $\langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \times \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle$ est un sous-groupe de $W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ dont l'intersection avec $\ker(\nu_{\mathcal{S}})$ est triviale et dont l'image par $\nu_{\mathcal{S}}$ est

$$\Big\{\sigma \in S\big(Q_1(\mathcal{S})\big) \Bigm| \sigma(\alpha) = -\sigma(-\alpha) \,\forall\, \alpha \in Q_1(\mathcal{S}) \text{ et } \prod_{\alpha \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau} \frac{\sigma(\alpha)}{\sigma(\alpha)_{\mathrm{pos}}} = 1\Big\}.$$

Le groupe $R(\mathcal{S})$ est tel que l'image de

$$\langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \times \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \times R(\mathcal{S})$$

par $\nu_\mathcal{S}$ est égal à $\mathrm{im}(\nu_\mathcal{S})$. On procède ensuite de la même manière avec $Q_2(\mathcal{S})$. On en déduit le résultat. ■

Proposition 4.13 *On suppose Φ est de type* BI *et τ fixe les racines courtes de Φ. Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On a $W(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) = W(\bar{\Phi}^c_\mathcal{S}) \times W(\langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi) \times \widetilde{W}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$, où*

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) = \langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \\ \times \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \\ \times R(\mathcal{S}) \times \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in F_\Phi(\mathcal{S}) \rangle\!\rangle\end{aligned}$$

et

$$R(\mathcal{S}) = \begin{cases} \langle\!\langle s_{\alpha_0} s_{\tau(\alpha_0)} s_{\beta_0}, s_{\gamma_0} s_{\tau(\gamma_0)} s_{\beta_0} \rangle\!\rangle & si\ \mathcal{S}^\tau \backslash {}^\tau\mathcal{S} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing\ et\ F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\alpha_0} s_{\tau(\alpha_0)} s_{\beta_0} \rangle\!\rangle & si\ \mathcal{S}^\tau = \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing\ et\ F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\gamma_0} s_{\tau(\gamma_0)} s_{\beta_0} \rangle\!\rangle & si\ \mathcal{S}^\tau \backslash {}^\tau\mathcal{S} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau = \varnothing\ et\ F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha_0,\gamma_0} \rangle\!\rangle & si\ \mathcal{S}^\tau \backslash {}^\tau\mathcal{S} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing\ et\ F(\mathcal{S}) = \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\alpha_0} s_{\tau(\alpha_0)} s_{\beta_0}, s_{\eta_0} s_{\beta_0} \rangle\!\rangle & si\ \mathcal{S}^\tau = {}^\tau\mathcal{S} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing\ et\ F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\eta_0} s_{\beta_0} \rangle\!\rangle & si\ \mathcal{S}^\tau = {}^\tau\mathcal{S} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau = \varnothing\ et\ F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\alpha_0} s_{\tau(\alpha_0)} s_{\eta_0} \rangle\!\rangle & si\ \mathcal{S}^\tau = {}^\tau\mathcal{S} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing\ et\ F(\mathcal{S}) = \varnothing, \\ \{\mathrm{id}\} & sinon, \end{cases}$$

avec $\alpha_0 \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau$, $\gamma_0 \in \mathcal{S}^\tau\backslash{}^\tau\mathcal{S}$, $\eta_0 \in {}^\tau\mathcal{S}$, $\beta_0 \in \Sigma^{\mathrm{nc}}$, $\tau(\beta_0) = \beta_0$, $\beta_0 \perp \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S})$ fixés et $F(\mathcal{S}) = \{\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}} \mid \beta \perp \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S})$ et $\tau(\beta) = \beta\}$.

Remarque Si τ ne fixe pas les racines courtes alors Φ est de rang 2 et la proposition 4.11 fournit une décomposition de $W(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$.

La démonstration de cette proposition est identique à celle de la proposition 4.12.

Définition 4.14 Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On pose

$$\widetilde{W}_1(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) = \langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \rangle\!\rangle \times \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in F_\Phi(\mathcal{S}) \rangle\!\rangle,$$

et

$$W_1(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) = W(\bar{\Phi}^c_\mathcal{S}) \times W(\langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi) \times \widetilde{W}_1(\mathfrak{h}_\mathcal{S}).$$

4.2 Actions sur les racines réelles et valeur des entiers de saut

Dans cette sous-section, on applique les résultats obtenus dans la sous-section précédente pour calculer les entiers $d(\mathcal{S}, \alpha)$ (théorème 4.19) et on obtient un résultat qui compare deux groupes de Weyl consécutifs dans l'ordre de Hiraï (proposition 4.29).

On rappelle que G désigne un groupe dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$.

Définition 4.15 Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On considère le morphisme de groupes induit par restriction à $\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$: $\eta_{\mathcal{S}} \colon W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \to \mathrm{Aut}(\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}))$, où $\mathrm{Aut}\big(\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$ désigne le groupe des automorphismes du système de racines de $\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On pose aussi :

$$\check{\Phi}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}} \cup \{\pm\alpha \in \Phi \mid \alpha \in \tau(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S}^\tau\}.$$

Proposition 4.16 *Soit* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. *On suppose que* Φ *est de type* AIII, CI, CII *ou* DIII. *On a alors* $\ker(\eta_{\mathcal{S}}) = W(\check{\Phi}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}))$.

Démonstration On a l'inclusion $W\big(\check{\Phi}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big) \subset \ker(\eta_{\mathcal{S}})$. Soit $w \in \ker(\eta_{\mathcal{S}})$. On peut écrire w sous la forme $w = w_1w_2w_3$ en suivant la décomposition de la proposition 4.11. On a ainsi $w_1 \in W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}})$, $w_2 \in W(\langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi)$ et $w_3 \in \widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a alors $\eta_{\mathcal{S}}(w_1) = \mathrm{id}$ et $\eta_{\mathcal{S}}(w_2) = w_2$. On remarque ensuite que d'après le lemme 1.15, on a

$$\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi \cup \{\pm\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}\backslash\tau(\mathcal{S})\}.$$

Comme w_2 agit simplement sur le premier ensemble de la décomposition ci-dessus et w_3 agit trivialement sur $\mathcal{S}^\tau$, on a $w_2 = \mathrm{id}$. On rappelle que l'on a

$$\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{S}\backslash\tau(\mathcal{S})\rangle\!\rangle \times \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in F_\Phi(\mathcal{S})\rangle\!\rangle.$$

D'après la définition de $w_{\alpha,\beta}$, on a $w_{\alpha,\beta}\big(\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big) = \Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $w_{\alpha,\beta}|_{\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} = s_{\alpha-\beta}$. Pour $\alpha \in F_\Phi(\mathcal{S})$, on a $s_\alpha|_{\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} = s_\alpha$ si $\alpha \in \mathcal{S}$ et id sinon. On en déduit les égalités suivantes :

$$\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})|_{\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} = \langle\!\langle s_{\alpha-\beta} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{S}\backslash\tau(\mathcal{S}), w_{\alpha,\beta} \neq \mathrm{id}\rangle\!\rangle \times \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}\backslash\tau(\mathcal{S})\rangle\!\rangle$$

et

$$\ker(\eta_{\mathcal{S}}) \cap \widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in \tau(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S} \cap \Phi\rangle\!\rangle.$$

La proposition est démontrée. ∎

Proposition 4.17 *On suppose que* Φ *est de type* DI. *On a alors*

$$\ker(\eta_{\mathcal{S}}) = W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}}) \times \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha,\beta}s_\alpha s_\beta \mid \alpha,\beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau\rangle\!\rangle$$
$$\times \begin{cases} \langle\!\langle s_{\tau(\alpha_0)}\rangle\!\rangle \times \langle\!\langle s_{\beta_0}s_{\tau(\beta_0)}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing,\\ \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha_0,\beta_0}s_{\alpha_0}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^\tau = \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing,\\ \langle\!\langle s_{\beta_0}s_{\tau(\beta_0)}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau = \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing,\\ \langle\!\langle s_{\tau(\alpha_0)}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing, \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) = \varnothing,\\ \{\mathrm{id}\} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration L'inclusion $\supset$ est clair. Soit $w \in \ker(\eta_{\mathcal{S}})$. On écrit $w = w_1w_2w_3$ suivant la décomposition de la proposition 4.13 avec $w_1 \in W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}})$, $w_2 \in W(\langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi)$ et $w_3 \in \widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a $\eta_{\mathcal{S}}(w_1) = \mathrm{id}$ et $\eta_{\mathcal{S}}(w_2) = w_2$. L'action de w_3 sur $\langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi$ est

$$R(\mathcal{S})|_{\langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi} = \begin{cases} \langle\!\langle s_{\gamma_0-\tau(\gamma_0)}, s_{\gamma_0+\tau(\gamma_0)}\rangle\!\rangle & \text{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \text{ et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing,\\ \langle\!\langle s_{\gamma_0}s_{\tau(\gamma_0)}\rangle\!\rangle & \text{si } \mathcal{S}^\tau \neq \varnothing \text{ et } F(\mathcal{S}) = \varnothing,\\ \{\mathrm{id}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite, on a

$$\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})|_{\langle \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle_{\Phi}} = \langle\!\langle s_{\alpha-\beta} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle\!\rangle \times \langle\!\langle s_{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle\!\rangle \times R(\mathcal{S})|_{\langle \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle_{\Phi}}$$

et on a

$$R(\mathcal{S})|_{\langle \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle_{\Phi}} = \begin{cases} \{\mathrm{id}, s_{\alpha_0}\} & \text{si } \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing, \\ \{\mathrm{id}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit en considérant les cas de la proposition 4.12, que l'on a

$$\ker(\eta_{\mathcal{S}}) = W(\bar{\Phi}^{c}_{\mathcal{S}}) \times \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha,\beta} s_{\alpha} s_{\beta} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle\!\rangle \times \begin{cases} \langle\!\langle s_{\tau(\alpha_0)}\rangle\!\rangle \times \langle\!\langle s_{\beta_0} s_{\tau(\beta_0)}\rangle\!\rangle \\ \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha_0,\beta_0} s_{\alpha_0}\rangle\!\rangle \\ \langle\!\langle s_{\beta_0} s_{\tau(\beta_0)}\rangle\!\rangle \\ \langle\!\langle s_{\tau(\alpha_0)}\rangle\!\rangle \\ \{\mathrm{id}\}. \end{cases}$$

■

Proposition 4.18 *On suppose que* Φ *est de type* BI. *On a alors*

$$\ker(\eta_{\mathcal{S}}) = W(\bar{\Phi}^{c}_{\mathcal{S}}) \times \langle\!\langle \tilde{w}_{\alpha,\beta} s_{\alpha} s_{\beta} \mid \alpha,\beta \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle\!\rangle$$
$$\times \begin{cases} \langle\!\langle s_{\tau(\alpha_0)}, s_{\beta_0}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\tau(\alpha_0)} s_{\beta_0}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^{\tau} = \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\tau(\alpha_0)}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) = \varnothing, \\ \langle\!\langle s_{\beta_0}\rangle\!\rangle & \textit{si } \mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing,\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau} = \varnothing \textit{ et } F(\mathcal{S}) \neq \varnothing, \\ \{\mathrm{id}\} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La démonstration de cette proposition est identique à celle de la proposition 4.17.

Une première utilisation des propositions précédentes est la détermination de l'entier $d(\mathcal{S},\alpha)$.

Théorème 4.19 *Soient* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. *Si* Φ^{α} *est de type* AIII, CI, CII *ou* DIII. *On a alors*

$$d(\mathcal{S},\alpha) = \begin{cases} 2 & \textit{si } \alpha \not\perp_{\Phi} \mathcal{S}, \\ 1 & \textit{si } \alpha \perp_{\Phi} \mathcal{S}. \end{cases}$$

Si Φ^{α} *est de type* BI *ou* DI. *On suppose que* τ *fixe les racines courtes de* Φ'^{α}. *On a alors*

$$d(\mathcal{S},\alpha) = \begin{cases} 2 & \textit{si } \mathcal{S}^{\tau} \neq \varnothing \textit{ et } \alpha \in \tau(\mathcal{S} \cup \{\alpha\}), \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarque Soient $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$, $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}_{\phi}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a pas nécessairement $d_{\mathrm{G}}(\mathcal{S},\alpha) = d_{\mathrm{G}_{\phi}}(\mathcal{S},\alpha)$. Supposons que $\mathfrak{g}$ est la forme déployée de rang 4 et de type DI. On pose $\phi = \{\pm e_1 \pm e_2\} \cup \{\pm e_3 \pm e_4\} \in \mathrm{Str}(\Phi)$. En posant

$$\mathcal{S} = \{e_1 \pm e_3, e_2 + e_4\} \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi}) \subset \Delta(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \alpha = e_2 - e_4.$$

On a alors $d_{\mathrm{G}}(\mathcal{S},\alpha) = 2$ et $d_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S},\alpha) = 1$. Cela constitue *a priori* une obstruction pour définir le transfert; cela sera résolu en montrant qu'il existe une fonction $d\colon \Delta(\mathfrak{g}) \to \mathbb{N}$ telle que $d(\mathcal{S})d(\mathcal{S},\alpha) = d(\mathcal{S}_\alpha)$ dès que $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$. La fonction $d(\mathcal{S})$ permettra de définir une nouvelle normalisation des intégrales invariantes. Les propositions 4.20 et 4.24 sont les résultats préliminaires nécessaires pour définir la fonction d et énoncer ses propriétés.

Démonstration On se ramène au cas où Φ est irréductible. On considère les différents types d'algèbres simples possibles. ■

Proposition 4.20 *Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\alpha,\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ tels que $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$ et $\beta \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}_\alpha$. On a alors $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\beta})$, $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}_\beta$ et la relation suivante est vérifiée :*

$$d(\mathcal{S},\alpha)d(\mathcal{S}_\alpha,\beta) = d(\mathcal{S},\beta)d(\mathcal{S}_\beta,\alpha).$$

Démonstration C'est une conséquence directe du théorème 4.19. ■

Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On pose $\mathcal{S} = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ et $\mathcal{S}_i = \{\alpha_1,\dots,\alpha_i\}$ pour $1 \leq i \leq n$. D'après la proposition 4.20, l'expression $\prod_{1\leq i\leq n} d(\mathcal{S}_i,\alpha_i)$ est indépendante de l'indexation des α_i. Ainsi, cette expression ne dépend que de $\mathcal{S}$, cela permet de considérer la définition suivante.

Définition 4.21 Avec les notations introduites précédemment, on pose :

$$d(\mathcal{S}) = \prod_{1\leq i\leq n-1} d(\mathcal{S}_i,\alpha_{i+1}).$$

Lemme 4.22 *Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ et $\beta \in \Sigma^{c}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ tels que $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$ et $\alpha\mathcal{R}\beta$. On a alors $d(\mathcal{S},\alpha)d(\mathcal{S}_\alpha,\beta) = 2d(\mathcal{S},\alpha+\beta)d(\mathcal{S}_{\alpha+\beta},(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}})$.*

Démonstration On se ramène au cas où Φ est irréductible. On a alors nécessairement Φ de type BI ou CI. Supposons Φ de type CI. On a alors d'après le théorème 4.19 les égalités suivantes :

$$d(\mathcal{S},\alpha) = 1, \quad d(\mathcal{S}_\alpha,\beta) = 2, \quad d(\mathcal{S},\alpha+\beta) = 1 \quad \text{et} \quad d(\mathcal{S}_{\alpha+\beta},(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}}) = 1.$$

On en déduit que la relation est vérifiée. Supposons Φ de type BI. On suppose que τ désigne une involution admissible qui fixe les racines courtes. Comme $\tau(\alpha+\beta) = (\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}}$, on a $\mathcal{S}^\tau_{\alpha+\beta} = \mathcal{S}^\tau$, $\alpha+\beta \notin \tau(\mathcal{S})$ et $(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}} \in \tau(\mathcal{S}_{\alpha+\beta})$. Si $\mathcal{S}^\tau = \varnothing$ d'après le théorème 4.19, on a $d(\mathcal{S},\alpha) = 1$, $d(\mathcal{S}_\alpha,\beta) = 2$, $d(\mathcal{S},\alpha+\beta) = 1$ et $d(\mathcal{S}_{\alpha+\beta},(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}}) = 1$. On en déduit que la relation est vérifiée. Si $\mathcal{S}^\tau \neq \varnothing$, on a $d(\mathcal{S},\alpha) = 2$, $d(\mathcal{S}_\alpha,\beta) = 2$, $d(\mathcal{S},\alpha+\beta) = 1$ et $d(\mathcal{S}_{\alpha+\beta},(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}}) = 2$, ainsi la relation est vérifiée et le lemme est démontré. ■

On considère l'entier suivant.

Définition 4.23 Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. On pose :

$$D(\mathcal{S},\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.24 *Soient* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. *On a*

$$d(\mathcal{S}_\alpha)D(\mathcal{S},\alpha) = d(\mathcal{S})d(\mathcal{S},\alpha).$$

On a aussi la relation $d(\mathcal{S}) = d(w * \mathcal{S})$.

Démonstration Si $\alpha \perp \mathcal{S}$. On a $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S} \cup \{\alpha\}$ ainsi par définition, on a $d(\mathcal{S}_\alpha) = d(\mathcal{S},\alpha)d(\mathcal{S})$ et la relation est démontrée. Si $\alpha \not\perp \mathcal{S}$, il existe $\beta \in \mathcal{S}$ unique telle que $\alpha\mathcal{R}\beta$. On pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S}\backslash\{\beta\}$. On a alors $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}' \cup \{(\alpha \pm \beta)_{\mathrm{pos}}\}$. D'après le lemme 4.22, on a :

$$\begin{aligned} d(\mathcal{S}_\alpha) &= d(\mathcal{S}')d(\mathcal{S}',\alpha+\beta)d(\mathcal{S}'_{\alpha+\beta},(\alpha-\beta)_{\mathrm{pos}}) \\ &= \tfrac{1}{2}d(\mathcal{S}')d(\mathcal{S}',\beta)d(\mathcal{S},\alpha) = \tfrac{1}{2}d(\mathcal{S})d(\mathcal{S},\alpha). \end{aligned}$$

La première égalité est démontrée. D'après le lemme 2.11, pour $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$, on a $w \in W(\mathcal{S}, w*\mathcal{S})$, de plus, on a $w.\alpha_{\mathrm{pos}} \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. Cela implique que l'on a la relation $d(\mathcal{S},\alpha) = d(w*\mathcal{S}, w.\alpha_{\mathrm{pos}})$. On en déduit la deuxième égalité. ■

Définition 4.25 On note $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ l'espace des familles de fonctions $\phi = (\psi_\mathcal{S})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ telles que

(i) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on a $\phi_\mathcal{S} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_\mathcal{S}, \Phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})\big)$.
(ii) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$, on a

$$\big\langle \partial(w)\phi_\mathcal{S}\big\rangle_\alpha = iD(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,\psi_{\mathcal{S}_\alpha} \circ u(\mathcal{S},\alpha) \circ j_\alpha.$$

(iii) Pour $\mathcal{S},\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, on a $\phi_{\mathcal{S}'}(u.x) = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\phi_\mathcal{S}(x)$ pour $u \in W(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ et $x \in \mathfrak{h}_\mathcal{S}^{\mathrm{reg}}$.

où le signe $\epsilon(\mathcal{S},\alpha)$ est défini par le théorème 3.12.

Gràce à la proposition 4.24, on obtient aisément le théorème suivant.

Théorème 4.26 *Les espaces* $\check{\mathfrak{I}}(\mathfrak{g})$ *et* $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ *sont canoniquement isomorphes par l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{I}}(\mathfrak{g}) &\xrightarrow{\simeq} \mathfrak{I}(\mathfrak{g}), \\ (\phi_\mathcal{S})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})} &\longmapsto \big(d(\mathcal{S})\phi_\mathcal{S}\big)_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}. \end{aligned}$$

Remarque L'obstruction évoquée dans la remarque suivant le théorème 4.19 est ainsi résolu en considérant l'espace $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ à la place de l'espace $\check{\mathfrak{I}}(\mathfrak{g})$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.27 *Soient* $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$, $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}_\phi(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. *On a alors*

$$D_{\mathrm{G}}(\mathcal{S},\alpha) = D_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S},\alpha).$$

Démonstration En effet, comme par définition ϕ est un sous-système de racines clos de Φ, on a $\alpha \perp_\Phi \mathcal{S}$ si et seulement si $\alpha \perp_\phi \mathcal{S}$. On en déduit alors d'après la définition 4.23 que l'on a $D_{\mathrm{G}}(\mathcal{S}, \alpha) = D_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S}, \alpha)$. ■

On remarque que le groupe $W(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ modulo l'identification par la transformée de Cayley $c_\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $W(\Phi)$. La proposition suivante permet de montrer que le groupe des élément de $W(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ qui fixent une racine imaginaire non compacte α au signe près est égal à un groupe d'ordre 2 près au groupe des éléments de $W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha})$ qui fixe la racine α au signe près.

Définition 4.28 Soit $\alpha \in \Phi$ et A un sous-groupe de $W(\Phi)$, on pose :

$$A_{\pm\alpha} = \{u \in A \mid u.\alpha = \pm\alpha\}.$$

On note id l'élément neutre du groupe $W(\Phi)$.

Proposition 4.29 *Soient* G *dans la classe* $\tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. *On a alors l'égalité*

$$W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha})_{\pm\alpha} = \begin{cases} W(\mathfrak{h}_\mathcal{S})_{\pm\alpha} & \text{si } d(\mathcal{S}, \alpha) = 2, \\ \{\mathrm{id}, s_\alpha\} \times W(\mathfrak{h}_\mathcal{S})_{\pm\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque Ce résultat sera généralisé ultérieurement (proposition 4.38) aux ensembles $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

Démonstration On se ramène au cas où Φ est irréductible. Si Φ est de type A_1, le résultat est clair. On suppose ensuite que Φ est irréductible de rang supérieur à 2 et on considère les différents cas possibles. ■

4.3 Fonction signe

Dans cette sous-section, on étudie la fonction $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ (définition 3.6). Cela permettra par la suite d'étudier les propriétés d'invariance des intégrales invariantes. Les principaux résultats de cette sous-section sont les propositions 4.32 et 4.36. On désigne par G un groupe dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$ et Φ' une clôture pleine de Φ. On souhaite calculer la valeur de $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$. On s'intéresse tout d'abord au cas particulier où $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Les deux lemmes suivants découlent directement des propositions 4.11, 4.12 et 4.13 :

Lemme 4.30 *Soit* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. *L'application*

$$\begin{aligned} p_\mathcal{S} \colon W_1(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) &\longrightarrow W(\overline{\Phi}_\mathcal{S}), \\ w &\longmapsto w|_{\overline{\Phi}_\mathcal{S}}, \end{aligned}$$

est défini et est un morphisme de groupes.

Remarque La notation $\overline{\Phi}_\mathcal{S}$ est introduite dans la définition 4.8.

Lemme 4.31 *L'ensemble* $\{\pm\alpha \in \Phi^c \mid \alpha \in F_\Phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S}\}$ *est stable sous l'action de* $W_1(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$.

La proposition suivante donne une expression de la restriction du morphisme $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ à $W_1(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$.

Proposition 4.32 *Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\sigma \in W_1(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a alors*

$$\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\sigma) = \operatorname{sign}\big(p_{\mathcal{S}}(\sigma)\big)\,(-1)^{\operatorname{Card}\{\alpha\in F_\Phi(\mathcal{S})\setminus\mathcal{S}|\sigma.\alpha\in-\Sigma\}}.$$

Démonstration D'après le lemme 4.31, le membre de droite dans l'expression précédente est bien un morphisme de groupes. Soit $\sigma \in W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}})$. On a alors $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma)$, $p_{\mathcal{S}}(\sigma) = \sigma$ et σ fixe les éléments de $F_\Phi(\mathcal{S})$. On en déduit que la relation est vérifiée. Soit à présent $\sigma \in W(\langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi)$. On a alors $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\sigma) = 1$, $p_{\mathcal{S}}(\sigma) = \mathrm{id}$ et σ fixe les éléments de $F_\Phi(\mathcal{S})$ ainsi la relation est vérifiée. On considère à présent $\alpha,\beta \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau$ de même longueur. On suppose que $w_{\alpha,\beta} \neq \mathrm{id}$. On a nécessairement $\tau(\alpha) \neq \alpha$, $\tau(\beta) \neq \beta$ et $\alpha_\pm \neq \beta_\pm$ d'où $\operatorname{sign}(w_{\alpha,\beta}) = 1$ et $w_{\alpha,\beta}|_{\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})} = s_{\alpha-\beta}$. Comme $\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi \cup \{\pm\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau\}$, on obtient $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(w_{\alpha,\beta}) = 1$. D'autre part $w_{\alpha,\beta}\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ et $w_{\alpha,\beta}(\gamma) = \gamma$ pour $\gamma \in F_\Phi(\mathcal{S})\setminus\{\tau(\alpha),\tau(\beta)\}$, on en déduit que la relation est vérifiée.

On considère à présent $\alpha \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau$. On obtient alors directement que $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(s_\alpha) = 1$ puis $p_{\mathcal{S}}(s_\alpha) = \mathrm{id}$, s_α agit trivialement sur $F_\Phi(\mathcal{S}) \cap \mathcal{S}$ et la relation est vérifiée. Enfin, pour $\alpha \in F_\Phi(\mathcal{S})\setminus\mathcal{S}$, on a $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(s_\alpha) = -1$. Comme s_α envoit α sur $-\alpha$ et fixe les autres éléments de $F_\Phi(\mathcal{S})\setminus\mathcal{S}$, la relation est de nouveau vérifiée et le lemme est démontré d'après la proposition 4.11. ∎

Définition 4.33 Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose $E_{\Phi'}(\mathcal{S}) = \{\alpha \in \langle\mathcal{S}^\tau\rangle_{\Phi'} \cap \Sigma' \mid \tau(\alpha) = \alpha\}$.

Le lemme suivant décrit cet ensemble de manière plus explicite.

Lemme 4.34 *L'application*

$$\mathcal{S}^\tau \longrightarrow E_{\Phi'}(\mathcal{S}),$$

$$\alpha \longmapsto \begin{cases} \alpha & \textit{si } \tau(\alpha) = \alpha \textit{ ou } \Phi^\alpha \textit{ de type } \mathrm{A}_1, \\ \nu_\alpha(\alpha + \tau(\alpha)) & \textit{si } \tau(\alpha) < \alpha, \\ \nu_\alpha(\tau(\alpha) - \alpha) & \textit{si } \tau(\alpha) > \alpha \end{cases}$$

est définie et est une bijection. On note cette application $\mu_{\mathcal{S},\Phi'}$.

Démonstration On observe au cas par cas pour un système de racines plein de type A_1^p ou irréductible que l'on a l'égalité

$$\begin{aligned} E_{\Phi'}(\mathcal{S}) = \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) = \alpha \text{ ou } \Phi^\alpha \text{ de type } \mathrm{A}_1\} \\ \dot\cup \left\{\nu_\alpha\big(\alpha + \tau(\alpha)\big) \mid \alpha \in \mathcal{S}^\tau, \tau(\alpha) < \alpha\right\} \\ \dot\cup \left\{\nu_\alpha\big(\tau(\alpha) - \alpha\big) \mid \alpha \in \mathcal{S}^\tau, \tau(\alpha) > \alpha\right\}. \end{aligned}$$ ∎

Remarque Les ensembles $\mathcal{S}^\tau$ et $E_{\Phi'}(\mathcal{S})$ sont des bases (orthogonales) du sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}^*_\varnothing$ engendré par $\mathcal{S}^\tau$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Définition 4.35 Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tels que $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. On considère l'application $\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'} = \mu_{\mathcal{S}',\Phi'} \circ \bar{w} \circ \mu^{-1}_{\mathcal{S},\Phi'}$, où $\bar{w}(\alpha) = w(\alpha)_{\mathrm{pos}}$.

Remarque L'application $\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'}$ est par définition une bijection de $E_{\Phi'}(\mathcal{S})$ dans $E_{\Phi'}(\mathcal{S}')$. On pose

$$\operatorname{sign}(\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'}) = (-1)^{\operatorname{Card}\,(\alpha,\beta)\in\mathcal{E}_{\Phi'}(\mathcal{S})^2|\alpha<\beta,\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'}(\alpha)>\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'}(\beta)}.$$

Proposition 4.36 *Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tels que $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. On a alors*

$$\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(w) = \operatorname{sign}(w)\operatorname{sign}(\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'})(-1)^{\operatorname{Card}\{\alpha\in E_{\Phi'}(\mathcal{S})\cap\Phi\cup\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau|w.\alpha\in-\Sigma\}}. \tag{4.1}$$

Démonstration D'après le lemme 2.11, on a $w \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Si Φ est de type A_1^p, on a nécessairement $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ et w fixe $\mathcal{S}$ point par point. Comme $\Phi^r(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup -\mathcal{S}$. On en déduit que $w_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(w) = \operatorname{sign}(w)$. D'autre part, on a $\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S},\Phi} = \mathrm{id}$ et

$$E_\Phi(\mathcal{S}) \cap \Phi \cup \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau = \mathcal{S}.$$

Comme w laisse fixe tous les points de $\mathcal{S}$, l'expression de droite de (4.1) vaut exactement $\operatorname{sign}(w)$. A présent, on suppose que Φ est irréductible et de rang au moins 2. Si Φ est de type AIII, le résultat se montre aisément. On suppose maintenant que Φ n'est pas de type AIII. On a alors l'égalité :

$$\langle\mathcal{S}\rangle_\Phi \cap \Sigma = \{\alpha \pm \beta \mid \alpha, \beta \in E_{\Phi'}(\mathcal{S}), \alpha > \beta\} \cup \big(E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \cap \Phi\big) \cup \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau.$$

L'image de cet ensemble par w est :

$$\{w(\alpha) \pm w(\beta) \mid \alpha, \beta \in E_{\Phi'}(\mathcal{S}), \alpha > \beta\} \cup w(E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \cap \Phi) \cup w(\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau).$$

On a

$$\prod_{\alpha\in w(E_{\Phi'}(\mathcal{S})\cap\Phi)\cup w(\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau)} \alpha = (-1)^{\operatorname{Card}\{\alpha\in E_{\Phi'}(\mathcal{S})\cap\Phi\cup\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^\tau|w\alpha\in-\Sigma\}} \prod_{\alpha\in E_{\Phi'}(\mathcal{S}')\cap\Phi\cup\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}'^\tau} \alpha.$$

Ensuite par définition, pour $\alpha \in E_{\Phi'}(\mathcal{S})$, il existe $\epsilon(\alpha) \in \{\pm1\}$ tel que $w(\alpha) = \epsilon(\alpha)\bar{w}(\alpha)$. On a alors l'égalité

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\operatorname{Card}\{w(\alpha)\pm w(\beta)\notin\Sigma|(\alpha,\beta)\in E_{\Phi'}(\mathcal{S}),\alpha>\beta\}}\\
&\qquad= (-1)^{\operatorname{Card}\{\epsilon(\alpha)(\alpha\pm\beta)\notin\Sigma|\alpha,\beta\in E_{\Phi'}(\mathcal{S}'),\alpha>\beta\}}\operatorname{sign}(\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'})\\
&\qquad= \operatorname{sign}(\tilde{w}_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'}).
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. ■

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

4.4 Signe de saut

Lorsque que l'on considère une relation de saut vérifiée par une intégrale invariante, il apparaït un signe que l'on note $\epsilon(\mathcal{S},\alpha)$. Ce signe se détermine aisément dès que la donnée de saut est adaptée (définition 3.9) par rapport à la racine, lemme 4.37. Dans cette sous-section, on calcule ces signes pour toutes les racines, théorème 4.44.

Lemme 4.37 *Soient $\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha\in\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ tels que α est adaptée à $\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a alors l'égalité $\epsilon(\mathcal{S},\alpha)=(-1)^{1/2\,\mathrm{Card}\{\beta\in\Sigma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha})\mid -s_\alpha\beta>0,\beta\neq\alpha\}}$.*

Démonstration On rappelle tout d'abord comment sont définies les intégrales invariantes à partir d'une fonction définie sur $\mathfrak{g}$. Soient f une fonction lisse à support compact sur $\mathfrak{g}$, $\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha\in\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On pose $\mathfrak{h}'=c_\alpha(\mathfrak{h}_{\mathcal{S},\mathbb{C}})\cap\mathfrak{g}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. On note H' le sous-groupe de Cartan de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$. La transformée de Cayley c_α détermine un ordre que l'on note $\Sigma(\mathfrak{h}')$ sur le système de racines $\Phi(\mathfrak{h}')$:

$$\Sigma(\mathfrak{h}')=\{\beta\circ c_\alpha^{-1}\mid\beta\in\Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\}.$$

Soient H l'un des tores $\mathrm{H}_{\mathcal{S}}$, H' ou $\mathrm{H}_{\mathcal{S}_\alpha}$ et $\mathfrak{h}=\mathrm{Lie}(\mathrm{H})$. L'intégrale invariante de f sur $\mathfrak{h}$ est définie par

$$\phi_{\mathfrak{h}}(x)=\epsilon_{\mathfrak{h}}(x)\Big(\prod_{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{h})}\alpha(x)\Big)\int_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}f(g.x)\,d\dot g$$

où $d\dot g$ est la mesure quotient sur G/H induite par une mesure de Haar fixée sur G et

$$\epsilon_{\mathfrak{h}}(x)=\mathrm{sign}\Big(\prod_{\alpha\in\Sigma^r(\mathfrak{h})}\alpha(x)\Big),$$

où $x\in\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}$. La définition des intégrales invariantes dans [2] est différente. D'après la relation (ii) de la sous-section 3.1 de [2], si α est adaptée à Σ, la relation de saut entre $\phi_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}}$ $(=\phi_{\mathcal{S}})$ et $\phi_{\mathfrak{h}'}$ est la suivante :

$$\Big\langle\Big(\prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})}\frac{|\beta|}{\beta}\Big)\epsilon_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}}(x)\phi_{\mathcal{S}}\Big\rangle_\alpha=id(\mathcal{S},\alpha)\Big(\prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}')}\frac{|\beta|}{\beta}\Big)\epsilon_{\mathfrak{h}'}(x)\phi_{\mathfrak{h}'}\circ j_\alpha.$$

On rappelle que $\Sigma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ représente l'ensemble des racines complexes de $\Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On observe tout d'abord que l'on a les inclusions $\Sigma^i(\mathfrak{h}')\subset\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $\Sigma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\subset\Sigma^r(\mathfrak{h}')$, cela permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}')\backslash\Sigma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})&=\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\backslash\big(\Sigma^i(\mathfrak{h}')\cup\Sigma^r(\mathfrak{h}')\big)\\&=\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\backslash\Sigma^i(\mathfrak{h}')\cap\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\backslash\{\alpha\}=\{\gamma\in\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\mid\gamma\neq\alpha,\gamma\not\perp\alpha\},\\\Sigma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\backslash\Sigma^{\mathrm{co}}(\mathfrak{h}')&=\Sigma^r(\mathfrak{h}')\backslash\Sigma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\cap\Sigma^r(\mathfrak{h}')\backslash\big(\Sigma^r(\mathfrak{h}')\cap\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)\\&=\{\gamma\in\Sigma^r(\mathfrak{h}')\mid\gamma\neq\alpha,\gamma\not\perp\alpha\}.\end{aligned}$$

Soit $\gamma \in \Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ telle que $\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \not\perp \alpha$. On a alors

$$\gamma s_\alpha(\gamma)_{\text{pos}} \circ j_\alpha = \begin{cases} -|\gamma|^2 \circ j_\alpha & \text{si } s_\alpha(\gamma) > 0, \\ |\gamma|^2 \circ j_\alpha & \text{si } s_\alpha(\gamma) < 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\prod_{\substack{\gamma \in \Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \\ \gamma \neq \alpha,\, \gamma \not\perp \alpha}} \frac{|\gamma|}{\gamma} \circ j_\alpha = (-1)^{1/2\, \text{Card}\{\gamma \in \Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) | s_\alpha(\gamma) > 0, \gamma \not\perp \alpha\}}.$$

Supposons qu'il existe $\gamma \in \Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ telle que $s_\alpha(\gamma) > 0$ et $\gamma \not\perp \alpha$. Comme $\alpha \not\perp \gamma$, on a $\gamma(H_\alpha) \neq 0$. De plus, par hypothèse, on a α adaptée à $\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ ainsi, on a nécessairement $\gamma(H_\alpha) > 0$. Cela implique que $s_\alpha(\gamma)(H_\alpha) < 0$ et de nouveau en utilisant le fait que α est adaptée à $\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on obtient que $s_\alpha(\gamma) < 0$. Ceci est absurde et on a

$$\prod_{\substack{\gamma \in \Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \\ \gamma \neq \alpha,\, \gamma \not\perp \alpha}} \frac{|\gamma|}{\gamma} \circ j_\alpha = 1.$$

Soit $\gamma \in \Sigma^r(\mathfrak{h}')$ telle que $\gamma \not\perp \alpha$ et $\gamma \neq \alpha$. On a alors

$$\gamma s_\alpha(\gamma)_{\text{pos}} \circ j_\alpha = \begin{cases} |\gamma|^2 \circ j_\alpha & \text{si } s_\alpha(\gamma) > 0, \\ -|\gamma|^2 \circ j_\alpha & \text{si } s_\alpha(\gamma) < 0 \end{cases}$$

On en déduit que l'on a la relation de saut :

$$\langle \phi_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}} \rangle_\alpha = iD(\mathcal{S}, \alpha)(-1)^{\frac{1}{2}\, \text{Card}\{\gamma \in \Sigma^r(\mathfrak{h}') | s_\beta(\gamma) < 0, \gamma \neq \alpha\}} \phi_{\mathfrak{h}'} \circ j_\alpha.$$

Si $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$, on a alors $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha}$, $u(\mathcal{S}, \alpha) = \text{id}_{\mathfrak{h}'}$ et le résultat est démontré. Sinon, l'application $u(\mathcal{S}, \alpha)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha}$. D'après la définition de cette application (définition 2.8), on a $u(\mathcal{S}, \alpha)\Sigma(\mathfrak{h}') = \Sigma(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha})$ et $u(\mathcal{S}, \alpha)\Sigma^r(\mathfrak{h}') = \Sigma^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha})$. On en déduit que l'on a la relation $\phi_{\mathfrak{h}'} = u(\mathcal{S}, \alpha)^{-1}\phi_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha}}$ et le résultat est démontré. ∎

Pour étudier le signe $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)$, on va utiliser une propriété d'invariance de $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)$ sous l'action de $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ (lemme 4.41). Pour établir cette propriété, on doit tout d'abord généraliser le lemme 4.29. On rappelle que pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ vérifiant $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, on a $W(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \subset W(\Phi)$.

Proposition 4.38 *Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, $\alpha \in \Sigma^{\text{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $u \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. On pose $\beta = u.\alpha_{\text{pos}}$. On a alors $\beta \in \Sigma^{\text{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})$ et $u \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}'_\beta)$. De plus, on a l'égalité*

$$\begin{aligned} &\{v \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}'_\beta) \mid v.\alpha_{\text{pos}} = \beta\} \\ &\quad = \begin{cases} \{v \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \mid v.\alpha_{\text{pos}} = \beta\} \times \{\text{id}, s_\alpha\} & \textit{si } d(\mathcal{S}, \alpha) = 1, \\ \{v \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \mid v.\alpha_{\text{pos}} = \beta\} & \textit{si } d(\mathcal{S}, \alpha) = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration Il est clair que $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. Supposons le résultat vrai dans le cas où $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ et considérons $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$. Il existe $w \in W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ tel que $w * \mathcal{S}' = \mathcal{S}$ et on a $w \in W(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ d'après le lemme 2.11. On pose $\gamma = w.\beta_{\mathrm{pos}}$. On a alors $\gamma = wu.\alpha_{\mathrm{pos}}$ et $wu \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S})$. D'après l'hypothèse, on a $wu \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\gamma)$. De plus, on remarque que $w * \mathcal{S}'_\beta = \mathcal{S}_\gamma$ ainsi $w \in W(\mathcal{S}'_\beta, \mathcal{S}_\gamma)$ d'après le lemme 2.11. On en déduit que $u = w^{-1}wu \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}'_\beta)$. Il est clair que l'on a

$$\{v \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}'_\beta) \mid v.\alpha_{\mathrm{pos}} = \beta\} \supset \{v \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \mid v.\alpha_{\mathrm{pos}} = \beta\} \times \{\mathrm{id}, s_\alpha\}.$$

Si $d(\mathcal{S}, \alpha) = 2$, on peut supprimer le facteur $\{id, s_\alpha\}$ dans l'expression précédente. Soit $v \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}'_\beta)$ tel que $v.\alpha_{\mathrm{pos}} = \beta$. Comme $w \in W(\mathcal{S}'_\beta, \mathcal{S}_\alpha)$, on a $wv \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\gamma)$ où $\gamma = wv\alpha_{\mathrm{pos}}$. D'après l'hypothèse, on en déduit que

$$wv \in \begin{cases} \{u \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \mid u\alpha_{\mathrm{pos}} = \gamma\} \times \{\mathrm{id}, s_\alpha\} & \text{si } d(\mathcal{S}, \alpha) = 1, \\ \{u \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \mid u\alpha_{\mathrm{pos}} = \gamma\} & \text{si } d(\mathcal{S}, \alpha) = 2. \end{cases}$$

Comme $w \in W(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, on en déduit le résultat dans ce cas.

Il reste à montrer le résultat dans la cas où $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. On sait d'après le lemme 4.40 qu'il existe $w \in W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ tel que $w.\alpha_{\mathrm{pos}} = \beta$. On en déduit que $w^{-1}u.\alpha_{\mathrm{pos}} = \alpha$. D'après la proposition 4.29, cela implique que $w^{-1}u \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$. Comme $w*\mathcal{S} = \mathcal{S}$ et $w.\alpha_{\mathrm{pos}} = \beta$, on a $w * \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$ d'où $w \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta)$ d'après le lemme 2.11. On en déduit finalement que $u \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta)$. Réciproquement, soit $v \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta)$ tel que $v\alpha_{\mathrm{pos}} = \beta$. Comme l'élément w vérifie $w \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta)$, on a $w^{-1}v \in W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ et $w^{-1}v\alpha_{\mathrm{pos}} = \alpha$. La proposition 4.29 permet alors de conclure et la proposition est démontrée. ■

Lemme 4.39 *Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, $v \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a alors*

$$v \circ c_{\mathcal{S},\alpha} = c_{\mathcal{S}',v.\alpha_{\mathrm{pos}}} \circ v,$$

$$v \circ u(\mathcal{S}, \alpha) = u(\mathcal{S}', v.\alpha_{\mathrm{pos}}) \circ v.$$

Démonstration On pose $\beta = v.\alpha_{\mathrm{pos}}$.

Si $\alpha \perp \mathcal{S}$, on a $\beta \perp \mathcal{S}'$, $c_{\mathcal{S},\alpha} = c_\alpha$ et $c_{\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}}} = c_\beta$. Comme d'après la proposition précédente, on a $c_\beta \circ v \circ c_\alpha^{-1}$ qui est identifié à v appartient à $W(\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}'_\beta)$. On en déduit que l'on a la relation $w \circ c_\alpha = c_\beta \circ w$. La deuxième égalité est triviale.

Si $\alpha \not\perp \mathcal{S}$, soit $\gamma \in \mathcal{S}$ tel que $\gamma \mathcal{R} \alpha$. Supposons $\alpha \not\perp \mathcal{S}$. Soit $\beta \in \mathcal{S}$ telle que $\alpha \mathcal{R} \beta$. D'après la proposition précédente, on a $v \in W(\mathcal{S} \backslash \{\gamma\}, \mathcal{S}' \backslash \{v.\gamma_{\mathrm{pos}}\}) \times \langle\langle s_\gamma \rangle\rangle$ ainsi $v \circ c_\gamma = c_{v.\gamma_{\mathrm{pos}}} \circ v$ et $v \circ c_{\alpha+\gamma} = c_{v.(\alpha+\gamma)_{\mathrm{pos}}} \circ v$. Ensuite, d'après la proposition précédente, on a $v \in W(\mathcal{S} \backslash \{\gamma\}_{\alpha+\gamma}, \mathcal{S}' \backslash \{v.\gamma_{\mathrm{pos}}\}_{v.(\alpha+\gamma)_{\mathrm{pos}}})$. On en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} v \circ u(\mathcal{S}, \alpha) &= (vc_{\alpha-\gamma_{\mathrm{pos}}} v^{-1}) \circ (vc_{\alpha+\gamma} v^{-1}) \circ (vc_\gamma^{-1} v^{-1}) \circ v \\ &= c_{v.(\alpha-\gamma)_{\mathrm{pos}}} \circ c_{v.(\alpha+\gamma)} \circ c_{v.\gamma}^{-1} \circ v = u(\mathcal{S}', v.\alpha_{\mathrm{pos}}) \circ v. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est démontrée et la première égalité en découle. ■

Lemme 4.40 *Soient* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. *On a alors l'égalité*

$$\{w.\alpha_{\mathrm{pos}} \mid w \in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\} = \{w.\alpha_{\mathrm{pos}} \mid w \in W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\}.$$

Démonstration On doit distinguer deux cas. Si $\alpha \in \tau(\mathcal{S})$, alors le groupe

$$W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}}) \times W(\langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi)$$

fixe α. On en déduit que $W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}).\alpha = \widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}).\alpha = W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}).\alpha \cup -W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}).\alpha$ grâce aux propositions 4.11, 4.12 et 4.13. Si $\alpha \notin \tau(\mathcal{S})$, on a $\alpha \perp \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S})$ et $\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \times W(\langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi)$ fixe α au signe près. On a donc

$$W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}).\alpha = W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}}).\alpha = W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}).\alpha$$

en utilisant de nouveau les propositions 4.11, 4.12 et 4.13. ■

Pour $\alpha \in \Phi$, on pose $\mathrm{sign}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in \Sigma$ et $\mathrm{sign}(\alpha) = -1$ si $\alpha \in -\Sigma$.

Lemme 4.41 *Soient* $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ *tels que* $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ *et* $u \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. *On a alors*

$$\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)\,\mathrm{sign}(u.\alpha) = \omega_{\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}'_{u.\alpha_{\mathrm{pos}}}}(u)\epsilon(\mathcal{S}', u.\alpha_{\mathrm{pos}}).$$

Démonstration Soit $\phi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ telle que $\langle \phi_{\mathcal{S}} \rangle_\alpha \neq 0$ (lemme 3.10). On a alors les relations de sauts suivantes :

$$\langle \phi_{\mathcal{S}} \rangle_\alpha = iD(\mathcal{S}, \alpha)\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)\phi_{\mathcal{S}_\alpha} \circ j_\alpha \quad \text{et} \quad \langle \phi_{\mathcal{S}'} \rangle_\beta = iD(\mathcal{S}, \alpha)\epsilon(\mathcal{S}', \beta)\phi_{\mathcal{S}'_\beta} \circ j_\beta. \tag{4.2}$$

On pose $\beta = u.\alpha_{\mathrm{pos}}$. Ensuite, on a les relations :

$$\phi_{\mathcal{S}'}(u.x) = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\phi_{\mathcal{S}}(x) \text{ pour } x \in \mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}_{\mathcal{S}},$$
$$\phi_{\mathcal{S}'_\beta}(u.x) = \omega_{\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}'_\beta}(u)\phi_{\mathcal{S}_\alpha}(x) \text{ pour } x \in \mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}_{\mathcal{S}_\alpha}.$$

Cette dernière relation a un sens d'après la proposition 4.38. On en déduit les relations suivantes :

$$\mathrm{sign}(u.\alpha)\langle \phi_{\mathcal{S}'} \rangle_\beta(u.x) = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\langle \phi_{\mathcal{S}} \rangle_\alpha \tag{4.3}$$
$$\phi_{\mathcal{S}'_\beta} \circ j_\beta(u.x) = \omega_{\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}'_\beta}(u)\phi_{\mathcal{S}_\alpha} \circ j_\alpha(x)$$

Les relations (4.2) et (4.3) permettent de déduire le résultat. ■

Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose $A(\mathcal{S}) = \{\alpha \in \Sigma' \mid \alpha \perp \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S}), \tau(\alpha) = \alpha\}$ et $A(\mathcal{S})^{\mathrm{nc}} = A(\mathcal{S}) \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}$. On remarque que l'on a le résultat suivant.

Lemme 4.42 *On suppose que* Φ *est irréductible et qu'il existe une racine* τ*-invariante non compacte dans* Φ. *Il existe alors* $\alpha_0 \in \mathrm{A}(\varnothing)^{\mathrm{nc}}$ *telle que* α_0 *soit adaptée à* $\Sigma(\mathfrak{h}_\varnothing)$. *Si de plus* Φ *est de type* BI *et* $\mathrm{A}(\varnothing)^c \neq \varnothing$, *il existe* $\beta_0 \in \mathrm{A}(\varnothing)^c$ *telle que* β_0 *soit adaptée à* $\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\{\alpha_0\}})$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Démonstration On vérifie au cas par cas que les ordres fixés (*cf.* sous-section 1.2) sur les systèmes de racines vérifient ces propriétés. Traitons quelques cas. On suppose Φ de rang au moins 3. Si Φ est de type CII, on a $A(\varnothing)^{\mathrm{nc}} = \varnothing$ et le résultat est trivial. Si Φ est de type CI, toutes les racines longues sont non compactes et $\alpha_0 = 2e_1$ est l'unique racine longue adaptée à $\Sigma(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Si Φ est de type BI, on a

$$A(\varnothing)^{\mathrm{nc}} = \begin{cases} \{e_i \mid 1 \leq i \leq 2p-1,\ i \text{ impair } \} & \text{si } 2p \leq n, \\ \{e_i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \text{ impair ou } i \geq 2(n-p)\} & \text{si } 2p > n. \end{cases}$$

On a alors $\mathfrak{g}$ compacte modulo le centre si et seulement si $A(\varnothing)^{\mathrm{nc}} = \varnothing$ et si $A(\varnothing)^{\mathrm{nc}} \neq \varnothing$ alors $e_1 \in A(\varnothing)^{\mathrm{nc}}$. On pose $\alpha_0 = e_1$ et on observe que α_0 est adaptée à $\Sigma(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Ensuite, on a

$$A(\varnothing)^{c} = \begin{cases} \{e_i \mid 1 \leq i \leq 2(n-p),\ i \text{ pair}\} & \text{si } 2p > n, \\ \{e_i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \text{ pair ou } i \geq 2p\} & \text{si } 2p \leq n. \end{cases}$$

On a alors $A(\varnothing)^c = \varnothing$ si et seulement si $p = n$ et si $p < n$, on a $e_2 \in A(\varnothing)^c$. On pose $\beta_0 = e_2$ et on observe que e_2 est adaptée à $\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\{\alpha_0\}})$. ■

Lemme 4.43 *On suppose que Φ est irréductible et qu'il existe une racine non τ-invariante dans $\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Il existe $\alpha_0 \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$ telle que α_0 soit adaptée à $\Sigma^i(\mathfrak{h}_\varnothing)$. De plus si Φ n'est pas de type* AIII, *on peut supposer que $\tau(\alpha_0) < \alpha_0$ et*

$$\{\gamma \in A(\varnothing) \bigm| \nu_{\alpha_0}(\alpha_0 - \tau(\alpha_0)) < \gamma < \nu_{\alpha_0}(\alpha_0 + \tau(\alpha_0))\} = \varnothing.$$

Démonstration Si Φ est de rang 1 ou 2, le résultat est clair. On suppose Φ de rang au moins 3. Si Φ est de type AIII, on pose $\alpha_0 = e_1 - e_n$. On observe que α_0 est adaptée à $\Sigma(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Si Φ n'est pas de type AIII, on pose $\alpha_0 = e_1 + e_2$. On observe alors que α_0 est adaptée à $\Sigma(\mathfrak{h}_\varnothing)$, $\tau(\alpha_0) = e_1 - e_2$, $\nu_{\alpha_0}(\alpha_0 + \tau(\alpha_0)) = e_1$ et $\nu_{\alpha_0}(\alpha_0 - \tau(\alpha_0)) = e_2$. On en déduit que

$$\{\gamma \in A(\varnothing) \bigm| \nu_{\alpha_0}(\alpha_0 - \tau(\alpha_0)) < \gamma < \nu_{\alpha_0}(\alpha_0 + \tau(\alpha_0))\} = \varnothing. \qquad ■$$

On souhaite à présent déterminer une expression de $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha)$ pour toute racine $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$.

Théorème 4.44 *Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a alors*

$$\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{Card}\{\beta \in E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \cap \Phi'^{\alpha} \mid \beta < \alpha\}} & \textit{si } \tau(\alpha) = \alpha, \\ (-1)^{\mathrm{Card}\{\beta \in E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \cap \Phi^{\mathrm{p}\alpha} \mid \tau(\alpha) - \alpha < \beta < \tau(\alpha) + \alpha\}} & \textit{si } \alpha \in \tau(\mathcal{S}) \textit{ et } \alpha \mathcal{R} \mathcal{S}, \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration Si Φ^α est de type A_1 alors α est adaptée à $\Sigma^i(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et d'après le lemme 4.37, on a $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) = 1$. Si Φ^α n'est pas de type A_1, alors l'involution τ fixe la composante Φ'^{α}. Cela permet de se ramener au cas où Φ est irréductible de rang au moins 2. Puis, on considère les cas $\alpha \in \tau(\mathcal{S})$ et $\alpha \notin \tau(\mathcal{S})$. On laisse la preuve au lecteur. ■

Partie 3 Transfert des intégrales invariantes

Dans cette partie, on définit un transfert des intégrales invariantes entre une c-structure $\mathfrak{g}_\phi$ et $\mathfrak{g}$ (définition 5.24). On montre que ce transfert est défini dès que G ne possède pas de facteur simple de type CI et de rang supérieur à 3 (théorème 5.25). Ensuite, on montre que cette application de transfert est surjective dès que $\mathfrak{g}$ ne possède pas de facteur de type BI (théorème 6.21). Enfin, on montre que l'on peut exprimer ce transfert d'une manière plus simple pour certaines formes réelles (théorème 6.30 et proposition 6.33).

Pour montrer que le transfert est défini, on introduit deux espaces intermédiaires entre $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ et $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{W}\big(\mathfrak{g}, \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}\big)$ (définition 5.6 et définition 5.17), $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$ (définition 5.8). On définit ensuite des applications de transfert entre chacun de ces espaces (définition 5.22, définition 5.23 et définition 5.10). La composée de ces applications définit ce que l'on appelle l'application de transfert entre $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ et $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$.

On étudie la surjectivité du transfert pour une sous-classe de groupes (définition 6.1). Pour une telle sous-classe, les espaces $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ et $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ s'injectent de manière naturelle dans l'espace $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ (définition 5.1 et lemmes 5.9 et 6.3). Sur l'espace $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$, on définit un projecteur (définition 6.6 et proposition 6.8). Ce projecteur permet de décomposer l'espace $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ en sous-espaces plus simples (proposition 6.9 et lemme 6.29) et ainsi de montrer la surjectivité du transfert.

5 Définition du transfert

On considère un groupe G dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$. On conserve les notations introduites dans la section précédente. On rappelle que Φ' est une clôture pleine de Φ, Σ un ordre de Φ suivant la sous-section 1.2, Σ' un ordre de Φ' tel que $\Sigma' \cap \Phi = \Sigma$ et τ une involution Σ'-admissible.

On est amené à considérer des espaces de fonctions plus grand que l'espace des intégrales invariantes $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$.

Définition 5.1 On note $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des familles de fonctions $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ telles que $\phi_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$ et telles que

(i) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on ait la relation de saut :

$$\langle \partial(w)\psi_{\mathcal{S}}\rangle_\alpha = iD(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,\psi_{\mathcal{S}_\alpha} \circ u(\mathcal{S},\alpha) \circ j_\alpha.$$

(ii) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \mathcal{S}$, on ait $\psi_{\mathcal{S}} \circ s_\alpha = \psi_{\mathcal{S}}$.

Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{nc}} = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \mid \alpha(x) \neq 0 \,\forall\, \alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\}$.

Définition 5.2 Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose

$$\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}\}, \quad N_{\mathcal{S}} = \mathrm{Card}\, W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \times \mathrm{Card}\,\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}},$$

$$\Xi_{\mathcal{S}} = \dot{\bigcup_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}}} W(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \quad \text{(réunion disjointe)}.$$

Pour $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}$, on considère $i_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$, l'injection canonique de $W(\mathcal{S}',\mathcal{S})$ dans $\Xi(\mathcal{S})$ et $p_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$, la projection canonique de $\Xi(\mathcal{S})$ dans $W(\mathcal{S}',\mathcal{S})$.

Remarque Par définition, on a $N_{\mathcal{S}} = \mathrm{Card}(\Xi_{\mathcal{S}})$.

Définition 5.3 Soit $\psi = (\psi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})} \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. On considère la famille de fonctions $\Theta = (\Theta_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ définie par

$$\Theta_{\mathcal{S}}(x) = \frac{1}{N_{\mathcal{S}}} \sum_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}} \sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\psi_{\mathcal{S}'}(x)$$

où $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{nc}}$. On considère l'application

$$\Gamma\colon \mathfrak{W}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})} \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})),$$
$$\psi \longmapsto \Theta.$$

Remarque L'application Γ est définie.

L'expression de $\Gamma(\psi)$ dans la définition précédente se simplifie pour certains groupes. Pour obtenir cette simplification, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 5.4 *On suppose que Φ est irréductible de type* AIII, CI, CII *ou* DIII. *Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On a l'égalité $W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \lhd \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}\rangle\!\rangle$.*

Remarque Ce résultat n'est pas vrai pour Φ de type BI ou DI en général.

Démonstration D'après la proposition 4.11, on a :

$$W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = W(\bar{\Phi}^{c}_{\mathcal{S}})\,\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\,W(\langle\mathcal{S}^{\tau}\rangle_{\Phi}). \tag{5.1}$$

Les groupes ci-dessus sont en produit direct. On sait que l'on a

$$W(\bar{\Phi}^{c}_{\mathcal{S}}) \subset W(\Phi^{c}) = W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$$

et

$$\widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \widetilde{W}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \cap W_{G}(\mathfrak{h}_{\varnothing}) \lhd \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}\rangle\!\rangle.$$

Si $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^{\tau}) \leq 1$, l'égalité (5.1) permet d'obtenir le résultat. Supposons que

$$\mathrm{Card}(\mathcal{S}^{\tau}) \geq 2.$$

On pose $\Psi = \langle\mathcal{S}^{\tau}\rangle_{\Phi}$ et $m = \mathrm{Card}(\mathcal{S}^{\tau})$. Le système Ψ est de rang m et Ψ est nécessairement un système de type CI. En effet, en type CII, seules les racines courtes sont non compactes et pour α courte, on a $\alpha\mathcal{R}\tau(\alpha)$. En type DIII, si α est une racine non compacte alors $\tau(\alpha)$ est compacte. On peut donc supposer que Ψ de type CI. L'ensemble $\mathcal{S}^{\tau}$ est l'ensemble des racines longues positives de Ψ. On observe alors que $W(\Psi) = W(\Psi^{c}) \lhd \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}^{\tau}\rangle\!\rangle$. L'égalité (5.1) permet de conclure. ■

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Lemme 5.5 *On suppose que les facteurs simples de* $\mathfrak{g}$ *sont de type* AIII, CI, CII *ou* DIII. *Soit* $\psi \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. *On a alors pour* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$

$$\Gamma(\psi)_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{u \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)} \omega_{u^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(u)u.\psi_{u^{-1}*\mathcal{S}}.$$

Démonstration On peut se ramener au cas où Φ est irréductible. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$ et $u \in W(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Il existe $v \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $v * \mathcal{S}' = \mathcal{S}$ et $w \in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})$ tel que $u = vw$. On remarque de plus que cette décomposition est unique modulo $W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})$. On en déduit que l'on a l'égalité :

$$\sum_{u \in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\psi_{\mathcal{S}'} = \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)} \sum_{\substack{v \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)\\ v*\mathcal{S}'=\mathcal{S}}} \sum_{w \in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(v)\omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}'}(w)vw.\psi_{\mathcal{S}'}.$$

Comme la fonction $\psi_{\mathcal{S}'}$ est invariante par rapport à s_α pour $\alpha \in \mathcal{S}'$, en utilisant le lemme précédent, on obtient :

$$\frac{1}{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)} \sum_{w \in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}'}(w)w.\psi_{\mathcal{S}'} = \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)} \sum_{w \in W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}'}(w)w.\psi_{\mathcal{S}'}.$$

On remarque ensuite que l'on a :

$$N_{\mathcal{S}} = \frac{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)}{\operatorname{Card}\big(W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_{\mathcal{S}}} \sum_{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}} \sum_{u \in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\psi_{\mathcal{S}'}\\
&= \frac{\operatorname{Card}\big(W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)}{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)}\\
&\quad \times \sum_{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}} \frac{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)}{\operatorname{Card}\big(W^\varnothing(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)} \sum_{\substack{u \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)\\ u*\mathcal{S}'=\mathcal{S}}} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\psi_{\mathcal{S}'}\\
&= \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)} \omega_{w^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(w)w.\phi_{w^{-1}*\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Définition 5.6 Soit P une partie de $\Delta(\mathfrak{g})$. On désigne par $\mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P)$ le sous-espace des familles de fonctions de $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})} \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ telles que $\phi_{\mathcal{S}} = 0$ pour $\mathcal{S} \notin P$.

On remarque que pour $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})} \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$, il n'y a aucun lien entre $\phi_{\mathcal{S}}$ et $\phi_{\mathcal{S}'}$ si $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$. Or, on peut avoir $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}'$. En effet, l'application $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$ n'est pas injective en général, plus précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 5.7 *On suppose que Φ est irréductible et n'est pas de type* BI *ou* DI *ou de rang supérieur à* 3 *en même temps. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$, on a alors $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.*

Démonstration On a d'après le lemme 1.15 l'égalité

$$\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi \cup \{\pm\alpha \in \Phi \mid \alpha \in \mathcal{S}\backslash\tau(\mathcal{S})\}.$$

De plus $\langle \mathcal{S}^\tau \rangle_\Phi$ est soit vide soit un système de racines irréductible de rang $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau)$ d'après le lemme 1.16. Supposons que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau) = 1$. En considérant les racines longues et courtes de $\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on obtient que $\mathcal{S}^\tau = \mathcal{S}'^\tau$ puis $\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau = \mathcal{S}'\backslash\mathcal{S}'^\tau$ d'où $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Si $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau) \neq 1$, en considérant les composantes irréductibles de type A_1 de $\Phi^r(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on obtient $\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau = \mathcal{S}'\backslash\mathcal{S}'^\tau$ et $\langle \mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi = \langle \mathcal{S}'^\tau\rangle_\Phi$. Si Φ est de type AIII, CII et DIII, on a toujours $\mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau) \leq 1$ d'où $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ d'après ce qui précède. Si Φ est de type CI et de rang au moins 3, l'ensemble $\mathcal{S}^\tau$ est l'ensemble des racines longues positives de $\langle \mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi$ ainsi $\mathcal{S}^\tau = \mathcal{S}'^\tau$ et $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Le cas où Φ est de rang 2 et de type CI est immédiat. ■

Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$. On souhaite définir un élément $\iota_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ de $W(\Phi^c)$ de manière canonique tel que $\iota_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Il suffit pour cela de considérer le cas où Φ est irréductible. Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, on pose $\iota_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} = \mathrm{id}$. Sinon d'après le lemme précédent, on peut supposer que Φ est de rang au moins 3 et de type BI ou DI. On a l'égalité suivante :

$$E(\mathcal{S}) = \{\beta \in \langle \mathcal{S}^\tau\rangle_{\Sigma'} \mid \tau(\beta) = \beta\} = E(\mathcal{S}')$$

On pose $E(\mathcal{S})^{\mathrm{nc}} = E(\mathcal{S}) \cap A'$ et $E(\mathcal{S})^c = E(\mathcal{S}) \cap B'$. La partie $\mathcal{S}$ possède au plus un élément τ-invariant. Si un tel élément existe, on le note $t_{\mathcal{S}}$ sinon, on pose $t_{\mathcal{S}} = 0$. On observe qu'il existe une unique injection $j_{\mathcal{S}}$ de $E(\mathcal{S})^c$ dans $E(\mathcal{S})^{\mathrm{nc}}$ telle que

$$\mathcal{S}^\tau\backslash\{t_{\mathcal{S}}\} = \left\{ \left(\alpha \pm j_{\mathcal{S}}(\alpha)\right)_{\mathrm{pos}} \,\middle|\, \alpha \in E(\mathcal{S})^c \right\}.$$

On considère aussi l'injection $j_{\mathcal{S}'}$ associée à $\mathcal{S}'$. Comme on a $\mathrm{im}(j_{\mathcal{S}}) \cup \{t_{\mathcal{S}}\} = E(\mathcal{S})^{\mathrm{nc}} = \mathrm{im}(j_{\mathcal{S}'}) \cup \{t_{\mathcal{S}'}\}$, il existe une unique permutation de $E(\mathcal{S})^{\mathrm{nc}}$ que l'on note $\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ telle que

$$\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}\big(j_{\mathcal{S}}(\alpha)\big) = j_{\mathcal{S}'}(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in E(\mathcal{S})^c.$$

D'après la sous-section 1.2, le groupe des permutations de $S(A')$ s'identifie à un sous-groupe de $W(\Phi^c)$. Cela permet de considérer $\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ comme un élément de $W(\Phi^c)$. Par définition, on a $\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}} = \mathrm{id}$, pour $\alpha \in \mathcal{S}$, on a $\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\alpha) \in \mathcal{S}' \cup -\mathcal{S}'$ ainsi $\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$ et pour $\mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}''} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$, on a $\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}''} = \gamma_{\mathcal{S}',\mathcal{S}''} \circ \gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$.

La définition suivante introduit un sous-espace de $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ tel que $\phi_{\mathcal{S}}$ et $\phi_{\mathcal{S}'}$ soient reliés de manière naturelle si $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$.

Définition 5.8 On considère le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ des familles de fonctions $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ telles que pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ vérifiant $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$, on ait

$$\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}.\psi_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'})\psi_{\mathcal{S}'}.$$

On peut à présent définir l'espace des intégrales invariantes $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ comme un sous-espace de $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$.

Lemme 5.9 *L'espace $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ est le sous-espace de $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$ des familles de fonctions $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ telles que pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ vérifiant $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$, on ait*

$$u.\phi_{\mathcal{S}}(x) = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\phi_{\mathcal{S}'}(x) \tag{5.2}$$

pour $u \in W(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ et $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{reg}}$.

Remarque La relation (5.2) correspond à la G-invariance des intégrales orbitales. On a les inclusions suivantes : $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}) \subset \widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$.

Démonstration Il suffit d'observer que pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \mathcal{S}$, on a d'après la proposition 4.32, $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(s_\alpha) = 1$ et pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$, on a par définition de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ la relation $\omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'})\phi_{\mathcal{S}'} = \gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}.\phi_{\mathcal{S}}$. ■

Proposition 5.10 *L'application*

$$\begin{aligned} \Gamma\colon \widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g}), \\ \psi &\longmapsto \Gamma(\psi) \end{aligned}$$

est définie et c'est un projecteur tel que $\mathrm{im}(\Gamma) = \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$.

Lemme 5.11 *Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On considère l'application*

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{S},\alpha}\colon \Xi(\mathcal{S}) &\longrightarrow \Xi(\mathcal{S}_\alpha), \\ i_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u) &\longmapsto i_{\mathcal{S}'_{u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}},\mathcal{S}_\alpha}(u) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}$ et $u \in W(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Cette application est définie et est une injection.

Démonstration D'après la proposition 4.38, pour $u \in W(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on a $u \in W(\mathcal{S}'_\beta, \mathcal{S}_\alpha)$ où $\beta = u^{-1}\alpha_{\mathrm{pos}}$, ainsi l'application $I_{\mathcal{S},\alpha}$ est définie. Montrons à présent que cette application est injective. Soient $\mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}$, $u \in W(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ et $v \in W(\mathcal{S}'', \mathcal{S})$ tels que $I_{\mathcal{S},\alpha}\big(i_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)\big) = I_{\mathcal{S},\alpha}\big(i_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}}(v)\big)$. On a alors $\mathcal{S}'_{u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}} = \mathcal{S}''_{v^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}}$ et $u^{-1}.\alpha = v^{-1}.\alpha$. Si $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$, il est clair que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$. Si $\alpha \not\perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$, d'après la définition 2.8, on a l'égalité

$$\mathcal{S}' = \{\gamma \in \mathcal{S}'_{u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}} \mid \gamma \perp \alpha\} \cup \{\alpha\} = \{\gamma \in \mathcal{S}''_{v^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}} \mid \gamma \perp \alpha\} \cup \{\alpha\} = \mathcal{S}''.$$

On en déduit ensuite que $u = v$. Le lemme est démontré. ■

Démonstration de la proposition 5.10 On considère l'espace $\check{\widetilde{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{g})$ des familles de fonctions $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ telle que

(i) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on ait la relation de saut :

$$\langle \partial(w)\psi_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha} = id(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,\psi_{\mathcal{S}_{\alpha}} \circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_{\alpha}.$$

(ii) Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \mathcal{S}$, on ait $\psi_{\mathcal{S}} \circ s_{\alpha} = \psi_{\mathcal{S}}$.

(iii) Pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$, on ait $\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}.\psi_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\gamma_{\mathcal{S},\mathcal{S}'})\psi_{\mathcal{S}'}$.

Sur l'espace $\check{\widetilde{\mathfrak{W}}}(g)$, on considère une application $\check{\Gamma}$ qui a la même définition que Γ. D'après la proposition 4.24, les espaces $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$ et $\check{\widetilde{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{g})$ sont isomorphes par l'application

$$\begin{aligned} l\colon \widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \check{\widetilde{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{g}),\\ \theta &\longmapsto \Big(\frac{1}{d(\mathcal{S})}\theta_{\mathcal{S}}\Big)_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}. \end{aligned}$$

De plus, par restriction, l'application l induit un isomorphisme entre $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ et $\check{\mathfrak{I}}(\mathfrak{g})$. On remarque ensuite que l'on a $l \circ \Gamma = \check{\Gamma} \circ l$. On en déduit qu'il est équivalent de démontrer la proposition pour $\check{\Gamma}$ et $\check{\widetilde{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{g})$. Soient $\psi \in \check{\widetilde{\mathfrak{W}}}(\mathfrak{g})$ et $\Theta = \check{\Gamma}(\psi)$ avec $\Theta = (\Theta_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}$ et $u \in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})$. On a alors $u.\psi_{\mathcal{S}'} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, u.\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})\big)$. Comme $u.\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}) \subset \Phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on en déduit que $\Theta_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$.

On considère $\mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}$, $\nu \in W(\mathcal{S},\mathcal{S}'')$ et $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{nc}}$. On a alors

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{S}''}(\nu.x) &= \frac{1}{N_{\mathcal{S}''}} \sum_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}''}} \sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S}'')} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}''}(u)u.\psi_{\mathcal{S}'}(\nu.x)\\ &= \frac{1}{N_{\mathcal{S}''}} \sum_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}''}} \sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S}'')} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}''}(u)(\nu^{-1}u).\psi_{\mathcal{S}}(x)\\ &= \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}''}(\nu)\frac{1}{N_{\mathcal{S}}} \sum_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}} \sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\psi_{\mathcal{S}}(x) = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}''}(\nu)\Theta_{\mathcal{S}}(x). \end{aligned}$$

La propriété d'invariance est donc vérifiée pour Θ. Montrons à présent les relations de saut. Soient $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On pose $\beta = u^{-1}.\alpha$. On a

$$\begin{aligned} (5.3)\quad &\langle \partial(w)\Theta_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha}(x)\\ &= \frac{1}{N_{\mathcal{S}}} \sum_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}} \sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)\,\mathrm{sign}(\beta)\langle \partial(u^{-1}.w)\psi_{\mathcal{S}'}\rangle_{\beta_{\mathrm{pos}}}(u^{-1}.x). \end{aligned}$$

On a les égalités suivantes en utilisant le lemme 4.41 :

$$\begin{aligned}
&\omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)\,\mathrm{sign}(\beta)\langle\partial(u^{-1}.w)\psi_{\mathcal{S}'}\rangle_{\beta_{\mathrm{pos}}}(u^{-1}.x)\\
&\qquad= d(\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}})\omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)\,\mathrm{sign}(\beta)\epsilon(\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}})\partial\big(c_{\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}}}(u^{-1}.w)\big)\,\psi_{\mathcal{S}'_{\beta_{\mathrm{pos}}}}\circ j_\beta(u^{-1}.x)\\
&\qquad= d(\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}})\omega_{\mathcal{S}'_{\beta_{\mathrm{pos}}},\mathcal{S}_\alpha}(u)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\\
&\qquad\qquad\partial\big(c_{\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}}}(u^{-1}.w)\big)\,\psi_{\mathcal{S}'_{\beta_{\mathrm{pos}}}}\circ u(\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}})\circ j_\beta(u^{-1}.x).
\end{aligned}$$

On en déduit que l'expression (5.3) s'écrit :

$$\begin{aligned}
(5.4)\qquad &\frac{i}{N_{\mathcal{S}}}\sum_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}}}\ \sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} d(\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}})\omega_{\mathcal{S}'_{\beta_{\mathrm{pos}}},\mathcal{S}_\alpha}(u)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\\
&\qquad\qquad\partial\big(c_{\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}}}(u^{-1}.w)\big)\,\psi_{\mathcal{S}'_{\beta_{\mathrm{pos}}}}\circ u(\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}})\circ j_\beta(u^{-1}.x)\\
&\quad= \frac{i}{N_{\mathcal{S}}}d(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\mathrm{K}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_\alpha(x),
\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{K}=\sum_{\mathcal{S}''\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}}\ \sum_{u\in p_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(\mathrm{im}(I_{\mathcal{S},\alpha}))}\omega_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(u)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,u.\psi_{\mathcal{S}''}.$$

La dernière égalité découle du lemme 5.11 et des égalités suivantes (lemme 4.39)

$$d(u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}},\mathcal{S}')=d(\alpha,\mathcal{S})\quad\text{et}\quad u(\mathcal{S}',\beta_{\mathrm{pos}})\circ u^{-1}=u^{-1}\circ u(\mathcal{S},\alpha).$$

Ensuite, on considère 6 cas différents, seuls 3 seront traités les autres sont laissés au lecteur. On rappelle que Φ^α (resp. Φ'^α) désigne la composante irréductible de Φ (resp. Φ') contenant α.

Cas 1 Supposons que Φ^α est de type A_1. Soient $\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}$ et $u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})$. On a alors $\mathcal{S}'\cap\Phi^\alpha=\varnothing$ et $u^{-1}.\alpha=\alpha$. On obtient les égalités :

$$\begin{gathered}
W(\mathcal{S}'_\alpha,\mathcal{S}_\alpha)=W(\mathcal{S}',\mathcal{S})\circ\{\mathrm{id},s_\alpha\},\\
\Xi(\mathcal{S}_\alpha)=\dot{\bigcup_{\mathcal{S}''\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}}} i_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}\big(p_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(\mathrm{im}(I_{\mathcal{S},\alpha}))\circ\{\mathrm{id},s_\alpha\}\big)
\end{gathered}$$

et comme $d(\mathcal{S},\alpha)=1$ d'après le théorème 4.19, cette décomposition est unique. On en déduit que $N_{\mathcal{S}_\alpha}=2N_{\mathcal{S}}$ et la relation $s_\alpha\circ j_\alpha=j_\alpha$ permet d'obtenir la relation de saut.

Pour les autres cas, on supposera que Φ^α est au moins de rang 2, ce qui implique en particulier que que τ fixe Φ'^α.

Cas 2 Supposons que $\alpha\perp\mathcal{S}$ et $\tau(\alpha)\notin\mathcal{S}_\alpha$. Soit $\mathcal{S}''\in\Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{S}''\simeq\mathcal{S}_\alpha$. Comme le groupe $W_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}''})$ agit par permutation et transitivement sur l'ensemble

$$\{\pm\gamma\in\Phi^\alpha\mid\gamma\in\mathcal{S}''\backslash\mathcal{S}''^\tau\cap\Phi^\alpha\},$$

d'après les propositions 4.11, 4.12 et 4.13, on a l'égalité

$$\{\nu^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}} \mid \nu \in W(\mathcal{S}'', \mathcal{S}_\alpha)\} = \mathcal{S}''\backslash \mathcal{S}''^{\tau} \cap \Phi^{\alpha} \subset \Phi^{\mathrm{nc}}.$$

Pour $\gamma \in \mathcal{S}''\backslash\mathcal{S}''^{\tau} \cap \Phi^{\alpha}$, on pose $\mathcal{S}'(\gamma) = \mathcal{S}''\backslash\{\gamma\}$. On a alors $\gamma \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'(\gamma)})$ et $\mathcal{S}'(\gamma)_\gamma = \mathcal{S}''$. De plus, on a $\mathcal{S}'(\gamma) \simeq \mathcal{S}$. En effet, soit Φ_1 une composante irréductible de Φ. Si $\Phi_1 \neq \Phi^{\alpha}$, on a d'après la proposition 2.10,

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'(\gamma) \cap \Phi_1\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}'' \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S} \cap \Phi_1).\end{aligned}$$

Si de plus, Φ_1 n'est pas de type A_1, on a de nouveau en utilisant la proposition 2.10

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'^{\tau}(\gamma) \cap \Phi_1\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}''^{\tau} \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha^{\tau} \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}^{\tau} \cap \Phi_1).\end{aligned}$$

Ensuite, on a dans le cas où $\Phi_1 = \Phi^{\alpha}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'(\gamma) \cap \Phi^{\alpha}\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}'' \cap \Phi^{\alpha}) - 1\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha \cap \Phi^{\alpha}) - 1\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S} \cap \Phi^{\alpha}).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'^{\tau}(\gamma) \cap \Phi^{\alpha}\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}''^{\tau} \cap \Phi^{\alpha})\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha^{\tau} \cap \Phi^{\alpha})\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}^{\tau} \cap \Phi^{\alpha}).\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.10, on obtient que $\mathcal{S}'(\gamma) \simeq \mathcal{S}$. On en déduit les égalités suivantes

$$W(\mathcal{S}'', \mathcal{S}_\alpha) = \dot{\bigcup_{\gamma \in \mathcal{S}''\backslash\mathcal{S}''^{\tau}\cap\Phi^{\alpha}}} \big\{\nu \in W\big(\mathcal{S}'(\gamma), \mathcal{S}\big) \bigm| \nu^{-1}(\alpha)_{\mathrm{pos}} = \gamma\big\} \circ \{\mathrm{id}, s_\gamma\},$$

$$\begin{aligned}\Xi(\mathcal{S}_\alpha) = \dot{\bigcup_{\mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}}} \; \dot{\bigcup_{\gamma \in \mathcal{S}''\backslash\mathcal{S}''^{\tau}\cap\Phi^{\alpha}}} & i_{\mathcal{S}'', \mathcal{S}_\alpha}\\ & \times \Big(\big\{\nu \in p_{\mathcal{S}'', \mathcal{S}_\alpha}(\mathrm{im}(I_{\mathcal{S},\alpha})) \mid \nu^{-1}(\alpha)_{\mathrm{pos}} = \gamma\big\} \circ \{\mathrm{id}, s_\gamma\}\Big).\end{aligned}$$

Comme $s_\gamma \notin W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}''(\gamma)})$ d'après le théorème 4.19, on obtient que $N_{\mathcal{S}_\alpha} = 2N_{\mathcal{S}}$ et l'expression (5.4) s'écrit :

$$\frac{i}{N_{\mathcal{S}}} d(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\mathrm{K} \circ u(\mathcal{S},\alpha) \circ j_\alpha(x) =$$
$$\frac{i}{N_{\mathcal{S}_\alpha}} d(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\Big(\sum_{\mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}} \sum_{u \in W(\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha)} \omega_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(u)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\, u.\psi_{\mathcal{S}''}\Big)$$
$$\circ\, u(\mathcal{S},\alpha) \circ j_\alpha(x).$$

La relation de saut est prouvée.

Cas 3 Supposons que $\tau(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \not\perp \mathcal{S}$. Cela implique que Φ^α est de type BI. Il existe $\beta \in \mathcal{S}$ unique telle $\alpha\mathcal{R}\beta$. On a alors $\tau(\beta) = \beta$ et $\tau(\alpha \pm \beta) = \alpha \mp \beta$; de plus, $\mathcal{S}_\alpha \cap \Phi^\alpha$ ne contient que des racines longues. Soit $\mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{S}'' \simeq \mathcal{S}_\alpha$. On a alors les égalités :

$$\begin{aligned}\{\nu^{-1}(\alpha)_{\mathrm{pos}} \mid \nu \in W(\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha)\} &= \{\gamma \in \langle \mathcal{S}''^\tau \cap \Phi^\alpha\rangle_\Sigma \mid \tau(\gamma) = \gamma\}\\ &= \Big\{ \tfrac{1}{2}(\gamma \pm \tau(\gamma)) \in \Phi \;\Big|\; \gamma \in \mathcal{S}''^\tau \cap \Phi^\alpha, \gamma > \tau(\gamma)\Big\}\end{aligned}$$

d'après les propositions 4.11, 4.12 et 4.13. On note $A(\mathcal{S}'')$ cet ensemble et on pose $A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}} = A(\mathcal{S}'') \cap A'$ et $A(\mathcal{S}'')^c = A(\mathcal{S}'') \cap B'$. La dernière égalité s'obtient en remarquant que toutes les racines de $\mathcal{S}''^\tau \cap \Phi^\alpha$ sont longues. Comme Φ^α est de type BI, pour $\epsilon \in \{\pm 1\}$, on a $\frac{1}{2}(\gamma+\epsilon\tau(\gamma)) \in \Sigma^{\mathrm{nc}}$ si et seulement si $\frac{1}{2}(\gamma-\epsilon\tau(\gamma)) \in \Sigma^c$. On en déduit que $A(\mathcal{S}'')^c$ et $A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}$ sont en bijection par l'application $\frac{1}{2}(\gamma \pm \tau(\gamma)) \in A(\mathcal{S}'')^c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\big(\gamma \mp \tau(\gamma)\big) \in A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}$. On note $\eta_{\mathcal{S}''}$ l'involution de $A(\mathcal{S}'')$ qui met en bijection $A(\mathcal{S}'')^c$ et $A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}$ par l'application précédente. Soit $\mu \in A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}$, on a alors $\mu \pm \eta_{\mathcal{S}''}(\mu)_{\mathrm{pos}} \in \mathcal{S}''^\tau$ et on pose $\mathcal{S}'(\mu) = \mathcal{S}'' \cup \{\mu\}\backslash\{\mu \pm \eta_{\mathcal{S}''}(\mu)_{\mathrm{pos}}\}$. On observe que $\mathcal{S}'(\mu) \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{S}'(\mu)_{\eta_{\mathcal{S}''}(\mu)} = \mathcal{S}''$. On montre ensuite que $\mathcal{S}'(\mu) \simeq \mathcal{S}$. En effet, soit Φ_1 une composante irréductible de Φ. On suppose que $\Phi_1 \neq \Phi^\alpha$. En utilisant la proposition 2.10, on a alors les égalités

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'(\mu) \cap \Phi_1\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}'' \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S} \cap \Phi_1).\end{aligned}$$

Si Φ_1 n'est pas de type A_1, on obtient aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'^\tau(\mu) \cap \Phi_1\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}''^\tau \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha^\tau \cap \Phi_1)\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau \cap \Phi_1).\end{aligned}$$

Si $\Phi_1 = \Phi^\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'(\mu)\cap\Phi^\alpha\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}''\cap\Phi^\alpha)-1\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha\cap\Phi^\alpha)-1\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}\cap\Phi^\alpha)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}'^\tau(\mu)\cap\Phi^\alpha\big) &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}''^\tau\cap\Phi^\alpha)+1\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}_\alpha^\tau\cap\Phi^\alpha)+1\\ &= \mathrm{Card}(\mathcal{S}^\tau\cap\Phi^\alpha).\end{aligned}$$

On en déduit d'après la proposition 2.10 que l'on a $\mathcal{S}'(\mu)\simeq\mathcal{S}$. On remarque ensuite que l'on a $s_{(\mu-\eta_{\mathcal{S}''}(\mu))_{\mathrm{pos}}}\mu = \eta_{\mathcal{S}''}(\mu)$ avec $(\mu-\eta_{\mathcal{S}''}(\mu))_{\mathrm{pos}}\in\mathcal{S}''^\tau$. On en déduit les égalités :

$$W(\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha) = \dot{\bigcup_{\mu\in A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}}}\{\nu\in W\big(\mathcal{S}'(\mu),\mathcal{S}\big)\mid \nu^{-1}(\alpha)_{\mathrm{pos}}=\mu\}\circ\{\mathrm{id}, s_{\mu-\eta_{\mathcal{S}''}(\mu)}\},$$

$$\Xi(\mathcal{S}_\alpha) = \dot{\bigcup_{\mathcal{S}''\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}}}\ \dot{\bigcup_{\mu\in A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}}} i_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}}\big(\{\nu\in p_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}}(I_{\mathcal{S},\alpha})\ \big|\ \nu^{-1}(\alpha)_{\mathrm{pos}}=\mu\}\circ\{\mathrm{id}, s_{\mu-\eta_{\mathcal{S}''}(\mu)}\}\big).$$

Supposons que $s_{\mu-\eta_{\mathcal{S}''}(\mu)}\in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'(\mu)})$. Comme $\mu\in\mathcal{S}'(\mu)^\tau$, on a alors d'après la proposition 4.11 que $\eta_{\mathcal{S}''}(\mu)\in\langle\mathcal{S}'(\mu)^\tau\rangle_\Phi$. Ceci est absurde ainsi $s_{\mu-\eta_{\mathcal{S}''}(\mu)}\notin W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'(\mu)})$. On en déduit que la décomposition de la dernière égalité est unique et $N_{\mathcal{S}_\alpha}=2N_{\mathcal{S}}$. Ensuite comme la fonction $\psi_{\mathcal{S}''}$ est invariante par rapport à s_ν pour $\nu\in\mathcal{S}''^\tau$, l'égalité (5.4) s'écrit :

$$\begin{aligned}&\frac{i}{N_{\mathcal{S}}}d(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\mathrm{K}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_\alpha\\
&\quad= i\frac{d(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)}{N_{\mathcal{S}}}\Big(\sum_{\substack{\mathcal{S}''\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}\\ \mu\in A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}}}\ \sum_{\substack{u\in p_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(\mathrm{im}(I_{\mathcal{S},\alpha}))\\ u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}=\mu}}\omega_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(u)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,u.\psi_{\mathcal{S}''}\Big)\\
&\qquad\qquad\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_\alpha(x)\\
&\quad= i\frac{d(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)}{N_{\mathcal{S}_\alpha}}\Big(\sum_{\mathcal{S}''\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}}\ \sum_{\mu\in A(\mathcal{S}'')^{\mathrm{nc}}}\ \sum_{\substack{u\in p_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(\mathrm{im}(I_{\mathcal{S},\alpha}))\\ u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}=\mu}}\big[\omega_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(u)\\
&\qquad\times\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,u.\phi_{\mathcal{S}''}+\omega_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(us_{\mu-\eta_{\mathcal{S}''}(\mu)})\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,us_{\mu-j_{\mathcal{S}''}(\mu)}.\psi_{\mathcal{S}''}\big]\Big)\\
&\qquad\qquad\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_\alpha(x)\\
&\quad= i\frac{d(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)}{N_{\mathcal{S}_\alpha}}\Big(\sum_{\mathcal{S}''\in\Delta(\mathfrak{g})^{\mathcal{S}_\alpha}}\ \sum_{u\in W(\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha)}\omega_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}_\alpha}(u)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,u.\psi_{\mathcal{S}''}\Big)\\
&\qquad\qquad\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_\alpha(x).\end{aligned}$$

La relation de saut est vérifiée.

On a montré que $\Theta \in \check{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$. D'après le lemme 5.9, on a $\mathrm{im}(\Gamma) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$. Ensuite pour $\psi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$, on a $\Gamma(\psi) = \psi$ ainsi $\mathrm{im}(\Gamma) = \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$. Il est clair que Γ est un projecteur. ■

On souhaite à présent comparer les valeurs de ϵ_{G} et $\epsilon_{\mathrm{G}_\phi}$ quand cela a un sens. On ne peut pas *a priori* définir le transfert si ces valeurs ne coïncident pas.

Définition 5.12 Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On note θ_ϕ la réunion des composantes de ϕ de type B_2. On pose $P_\phi = \{\alpha \in \Sigma_\phi^{\mathrm{nc}} \cap \theta_\phi \mid \tau(\alpha) = \alpha\}$. On suppose que ϕ vérifie la propriété suivante : Soient $\alpha, \beta \in P_\phi$ dans la même composante irréductible de ϕ, alors $\{\gamma \in P_\phi \mid \alpha < \gamma < \beta\} = \varnothing$. On dit alors que ϕ est adaptée à Σ.

Théorème 5.13 *Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On suppose ϕ adaptée à Σ. On a alors*

$$\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) = \epsilon_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S}, \alpha)$$

pour tout $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ et $\alpha \in \Sigma_\phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ si et seulement si $\mathfrak{g}$ ne possède pas de composante simple de type CI *et de rang supérieur à* 3.

Remarque Comme ϕ est un sous-système de racines de Φ, on a l'inclusion

$$\Sigma_\phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) \subset \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}).$$

Démonstration On considère deux cas.

Cas 1 On suppose tout d'abord que $\tau(\alpha) = \alpha$. Le système Φ^α est plein. Si Φ^α est de type A_1, l'égalité est évidente. De même, si Φ^α est de rang 2, Φ^α est une composante irréductible de ϕ et l'égalité est aussi vérifié.

Sinon Φ^α est de type BI ou CI et de rang supérieur ou égal à 3. Le système $\phi' = \phi \cap \Phi^\alpha$ est une *c*-structure de Φ^α. On considère la décomposition de ϕ' suivantes :

$$\phi' = \phi_0 \cup \cdots \cup \phi_n,$$

où ϕ_0 est la réunion des composantes irréductibles de type A_1 de ϕ' et les ϕ_i avec $i \geq 1$ sont les composantes irréductibles de type B_2. Comme ϕ est adaptée à Σ, on peut supposer quitte à réindexer les indices des ϕ_i que l'on a la propriété

$$\alpha \in \phi_i, \beta \in \phi_j, \tau(\alpha) = \alpha, \tau(\beta) = \beta \quad \text{avec } 1 \leq i < j \text{ implique } \alpha < \beta.$$

Comme Φ^α est plein, on a $\tau(\phi') = \phi'$ et $\tau_{\phi'} = \tau|_{\phi'}$, cela permet d'obtenir la relation

$$E_{\Phi^\alpha}((\mathcal{S} \cap \Phi^\alpha)) = \dot{\bigcup_{0 \leq i \leq n}} E_{\phi_i}((\mathcal{S} \cap \phi_i)).$$

On suppose que $\alpha \in \phi_j$. On en déduit alors d'après le théorème 4.44 que

$$\begin{aligned}
\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) &= (-1)^{\mathrm{Card}\{\beta \in E_{\Phi^\alpha}(\mathcal{S} \cap \Phi^\alpha) | \beta < \alpha\}} \\
&= (-1)^{\sum_{i=0}^{j} \mathrm{Card}\{\beta \in E_{\phi_i}((\mathcal{S} \cap \phi_i)) | \beta < \alpha\}} \\
&= \epsilon_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S}, \alpha)(-1)^{\sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{Card}\left(E_{\phi_i}(\mathcal{S} \cap \phi_i)\right)}.
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Cas 1a Si Φ^α est de type BI, ϕ' possède un unique facteur de type B_2 et $n = 1$. La racine α est courte dans Φ^α et est l'unique racine courte de $\mathcal{S}$, $\alpha \in \phi_1$. De plus les éléments de $\mathcal{S} \cap \phi_0$ sont des racines longues non τ-invariantes. On en déduit que $E_{\phi_0}(\mathcal{S} \cap \phi_0)$ est de cardinal pair d'où l'égalité $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) = \epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S}, \alpha)$.

Cas 1b Si Φ^α est de type CI. La racine α est longue dans Φ^α et $E_{\Phi_i}(\mathcal{S} \cap \phi_i) = (\mathcal{S} \cap \phi_i)_{\text{longue}}$, l'ensemble des racines longues de $\mathcal{S} \cap \phi_i$. On en déduit que

$$\frac{\epsilon_G(\mathcal{S}, \alpha)}{\epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S}, \alpha)} = (-1)^{\operatorname{Card}\{\beta \in \mathcal{S}_{\text{longue}} \mid \beta < \alpha, \beta \notin \phi_j\}}$$

où $\mathcal{S}_{\text{longue}}$ désigne l'ensemble des racines longues de $\mathcal{S}$.

Si Φ^α est au moins de rang 3. Le système ϕ' possède au moins deux facteurs irréductibles et les racines longues sont τ-invariante et imaginaires non compactes. Il existe une racine β longue telle que $\beta \notin \phi_j$. Si $\beta < \alpha$, en posant $\mathcal{S} = \{\beta\}$, on a

$$\epsilon_G(\mathcal{S}, \alpha) = -\epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S}, \alpha).$$

Si $\alpha < \beta$, en posant $\mathcal{S} = \{\alpha\}$, on obtient $\epsilon_G(\mathcal{S}, \beta) = -\epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S}, \beta)$.

Cas 2 On suppose que $\tau(\alpha) \neq \alpha$. Comme ϕ est adaptee à Σ (*cf.* définition 5.12) et d'après le théorème 4.44, on a $\epsilon_G(\mathcal{S}, \alpha) = 1$ (dans tous les cas). Soit ψ la composante irréductible de ϕ telle que $\alpha \in \psi$. Si ψ est de type B_2, on sait alors que $\tau_\phi(\alpha) = \tau(\alpha) \neq \alpha$, et on a d'après le théorème 4.44, $\epsilon_G(\mathcal{S}, \alpha) = \epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S}, \alpha) = 1$. Si ψ est de type A_1, on a alors aussi $\epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S}, \alpha) = 1$ et la relation est de nouveau vérifiée. ∎

On souhaite à présent construire une application de transfert de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ dans $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$. Pour cela, on procède en deux étapes. On définit tout d'abord une application de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ dans $\mathfrak{W}\big(\mathfrak{g}, \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}\big)$ puis une application de $\mathfrak{W}\big(\mathfrak{g}, \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}\big)$ dans $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$. Il apparaît l'obstruction suivante :

Si Φ est de type CI et de rang supérieur à 3 alors les signes $\epsilon_G(\mathcal{S}, \alpha)$ et $\epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S}, \alpha)$ ne coïncident pas en général. On est donc amené à considérer une sous-classe de $\tilde{\mathcal{H}}$:

Définition 5.14 Soit G dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$. Si G ne possède pas de facteur simple de type CI et de rang supérieur à 3 alors on dit que G est dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}'$.

Dans la suite G désigne un groupe dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}'$.

Lemme 5.15 *Soit $\phi \in \operatorname{Str}(\Phi)$. Alors ϕ est adaptée à Σ.*

Démonstration On peut se ramener au cas où Φ est de type A_1^p ou irréductible. Si Φ est de type A_1^p, on a $\theta_\phi = P_\phi = \varnothing$ (définition 5.12) et ϕ est adaptée. Si Φ est irréductible et de rang 2, on $\theta_\phi = \varnothing$ ou ϕ et le résultat est clair. Si Φ est irréductible et de type différent de CII, alors ϕ possède au plus une composante de type B_2, on en déduit que ϕ est adaptée. Si Φ est de type CII et de rang supérieur à 3, les racines τ-invariantes sont compactes ainsi $P_\phi = \varnothing$ et ϕ est adaptée. Le lemme est démontré. ∎

On introduit une relation d'ordre sur $\Delta(\mathfrak{g})$.

Définition 5.16 Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$. On note $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$ si il existe une suite $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n = \mathcal{S}'$ de $\Delta(\mathfrak{g})$ et des éléments $\alpha_i \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_i})$ pour $0 \leq i < n$ tels que $(\mathcal{S}_i)_{\alpha_i} = \mathcal{S}_{i+1}$ pour $0 \leq i < n$.

Définition 5.17 Soit P une partie de $\Delta(\mathfrak{g})$. On considère les parties de $\Delta(\mathfrak{g})$ suivantes :

$$\bar{P} = \{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \text{il existe } \mathcal{S}' \in P \text{ tel que } \mathcal{S} \leq \mathcal{S}'\},$$
$$\Delta(\mathfrak{g})^{\phi} = \{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \text{il existe } \mathcal{S}' \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})} \text{ tel que } \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}\}.$$

Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on considère l'ensemble suivant :

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{S}) = \{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})^{\phi} \mid \mathcal{S} \leq \mathcal{S}'\}.$$

Lemme 5.18 *On suppose que* Φ *est irréductible et n'est pas de type* BI, CI *ou* DI. *Soit* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. *On suppose que* $\mathrm{Supp}(\mathcal{S}) \neq \varnothing$. *On a alors* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$.

Démonstration Soit $\mathcal{S}' \in \mathrm{Supp}(\mathcal{S})$. Il existe alors $\mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$ tel que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}''} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$. Cela implique d'après le lemme 5.7 que l'on a $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$ ainsi $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$. Ensuite, il existe une suite $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ de $\Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha_i \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_i})$ pour $0 \leq i \leq n-1$ tels que $\mathcal{S}_{i\alpha_i} = \mathcal{S}_{i+1}$. Comme Φ n'est pas de type BI ou CI, on a $\alpha_i \perp\!\!\!\!\perp \mathcal{S}_i$ ainsi $\mathcal{S}' = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\} \cup \mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}' \subset \phi$, on en déduit que $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$. ∎

Lemme 5.19 *On suppose que* Φ *est irréductible et n'est pas de type* BI *ou* CI. *On a alors* $\overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})} = \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$.

Démonstration On a l'inclusion $\Delta(\mathfrak{g}_{\phi}) \subset \overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}$. Soit $\mathcal{S} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}$. On a alors $\mathrm{Supp}(\mathcal{S}) \neq \varnothing$ ainsi, si Φ n'est pas de type DI, d'après le lemme 5.18, on a $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$. Si Φ est de type DI, il existe $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$ tel que $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$. Cela implique que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ ainsi $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$. Le résultat est démontré. ∎

Si Φ est irréductible de type BI, il existe une unique 2-structure ψ de Φ contenant ϕ. Soit n le nombre de composantes irréductibles de ψ de type B_2. On identifie alors $\mathfrak{S}_n$ avec le groupe des automorphismes extérieurs de ψ qui fixe l'ensemble des racines positives $\psi \cap \Sigma$. On désigne par $S(\Phi, \phi)$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ des permutations des composantes de type $\mathrm{B}_2 I$ de ψ. Il s'agit des composantes dont les racines longues sont non compactes. On a $S(\Phi, \phi) \subset W_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}_{\varnothing})$. Si Φ n'est pas de type BI, on pose $S(\Phi, \phi) = \{\mathrm{id}\}$. Si Φ est non irréductible, on pose $S(\Phi, \phi) = S(\Phi_1, \phi_1) \times \cdots \times S(\Phi_p, \phi_p)$, où $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_p$ est la décomposition en composantes irréductibles de Φ et $\phi_i = \Phi_i \cap \phi$.

Sur l'espace quotient $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})/\,\mathrm{G}$, on considère l'ordre (de Hiraï sur $\mathfrak{g}$) suivant : Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose $[\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}] \leq [\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}]$ si $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{-} \subset \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}^{-}$, où $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{-}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}^{-}$ sont les parties déployées des sous-algèbres de Cartan. On rappelle que l'on dit que l'ordre de Hiraï sur $\mathfrak{g}$ est linéaire si pour $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$, les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$ sont conjuguées dès que $\mathrm{Card}(\mathcal{S} \cap \Psi) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}' \cap \Psi)$ pour toute composante irréductible Ψ de Φ.

Définition 5.20 Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On dit que ϕ est suffisante si les ordres de Hiraï sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_\phi$ sont linéaires ou non simultanément.

Lemme 5.21 *On suppose que* G *est dans la classe* $\tilde{\mathcal{H}}'$ *et* ϕ *est suffisante. On a* $\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)} = S(\Phi,\phi) * \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$.

Démonstration On peut se ramener au cas où Φ est irréductible. Si Φ n'est pas de type BI, on a $S(\Phi,\phi) = \{\mathrm{id}\}$ et d'après le lemme 5.19, on a $\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)} = \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. On en déduit le résultat. On suppose à présent que Φ est de type BI. Soit $\mathcal{S} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$. Il existe $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ tel que $\mathcal{S} \le \mathcal{S}'$. Si $\mathcal{S}$ ne possède pas de racine courte, alors $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ ainsi $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. Sinon $\mathcal{S}$ possède une unique racine courte que l'on note α. Si α est aussi une racine courte de ϕ alors on obtient de nouveau que $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. Si α n'est pas une racine courte de ϕ, il existe une unique racine courte positive de Σ que l'on note β telle que $\alpha \pm \beta \in \mathcal{S}'$. Cela implique que l'ordre de Hiraï de $\mathfrak{g}$ est non linéaire. Ainsi, comme ϕ est suffisante, ϕ possède une (unique) composante irréductible de type $\mathrm{B}_2\,I$. On note α_0 (resp. β_0) la racine courte non compacte (resp. compacte) et positive de cette composante. On pose $w = s_{\alpha-\alpha_0}s_{\beta-\beta_0}$. On a alors $w \in S(\Phi)$ et $w * \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. L'inclusion $S(\Phi,\phi) * \Delta(\mathfrak{g}_\phi) \subset \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$ est évidente. On en déduit le résultat. ■

On peut à présent définir une application de transfert de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ dans $\mathfrak{W}(\mathfrak{g}, \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)})$.

Lemme 5.22 *On suppose que* G *est dans la classe* $\tilde{\mathcal{H}}'$ *et* ϕ *suffisante. On considère l'application*

$$A_\phi \colon \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi) \longrightarrow \mathfrak{W}\big(\mathfrak{g}, \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}\big),$$
$$\psi \longmapsto \theta,$$

où

$$\theta_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(S(\Phi,\phi)\big)} \sum_{\substack{t\in \mathcal{S}(\Phi,\phi)\\ t*\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}} \omega_{\mathcal{S},t*\mathcal{S}}(t)t^{-1}.\psi_{t*\mathcal{S}},$$

avec $\mathcal{S} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$. *Cette application est définie.*

Démonstration Soient $\mathcal{S} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$ et $t \in \mathcal{S}(\Phi,\phi)$ tels que $t * \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. Comme ϕ est un sous-système de racines de Φ, on a $t^{-1}.\Sigma_\phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{t*\mathcal{S}}) \subset t^{-1}.\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{t*\mathcal{S}}) \subset \Phi^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $\theta_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$ pour $\mathcal{S} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$.

Soit $\alpha \in \mathcal{S}$. On a alors $t.\alpha_{\mathrm{pos}} \in t * \mathcal{S}$ et $\phi_{t*\mathcal{S}} \circ s_{t.\alpha} = \phi_{t*\mathcal{S}}$ ainsi on a

$$\theta_{\mathcal{S}} \circ s_\alpha = \theta_{\mathcal{S}} \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{S}.$$

On considère à présent $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a l'égalité

$$\text{(5.5)}\quad \big\langle \partial(w)\theta_{\mathcal{S}}\big\rangle_\alpha = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}(\Phi,\phi)\big)} \sum_{\substack{t\in \mathcal{S}(\Phi,\phi)\\ t*\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}} \omega_{\mathcal{S},t*\mathcal{S}}(w)\,\mathrm{sign}(t.\alpha)t^{-1}.\big\langle\partial(t.w)\psi_{t*\mathcal{S}}\big\rangle_{t.\alpha_{\mathrm{pos}}}.$$

Si $t.\alpha_{\rm pos} \in \Sigma^{\rm nc}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on a d'après les lemmes 4.41, 5.15 et le théorème 5.13 les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{S},t*\mathcal{S}}(w)\,\mathrm{sign}(t.\alpha)t^{-1}.\langle\partial(t.w)\psi_{t*\mathcal{S}}\rangle_{t.\alpha_{\rm pos}} &= i\epsilon_{G_\phi}(\mathcal{S},\alpha)D_{G_\phi}(\mathcal{S},\alpha)\omega_{\mathcal{S},t*\mathcal{S}}(w)\,\mathrm{sign}(t.\alpha)t^{-1}.\partial(t.w)\psi_{t*\mathcal{S}_\alpha}\\ &\qquad\circ u(t*\mathcal{S},t.\alpha_{\rm pos})\circ j_{t.\alpha_{\rm pos}}\\ &= i\epsilon_{G}(\mathcal{S},\alpha)D_{G}(\mathcal{S},\alpha)\omega_{\mathcal{S}_\alpha,t*\mathcal{S}_\alpha}(w)t^{-1}.\partial(t.w)\psi_{t*\mathcal{S}_\alpha}\circ u(t*\mathcal{S},t.\alpha_{\rm pos})\circ j_{t.\alpha_{\rm pos}}.\end{aligned}$$

Si $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$, on a $t*\mathcal{S}_\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ si et seulement si $t*\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ et $t.\alpha_{\rm pos} \in \Sigma^{\rm nc}_\phi(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On en déduit que l'égalité (5.5) s'écrit :

$$\begin{aligned}i\frac{\epsilon_G(\mathcal{S},\alpha)D_G(\mathcal{S},\alpha)}{\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}(\Phi,\phi)\big)}\sum_{\substack{t\in\mathcal{S}(\Phi,\phi)\\ t*\mathcal{S}_\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}}\omega_{\mathcal{S}_\alpha,t*\mathcal{S}_\alpha}(w)t^{-1}.\partial\big(c_{t.\alpha_{\rm pos}}(t.w)\big)\,\psi_{t*\mathcal{S}_{t.\alpha_{\rm pos}}}&\\ \circ u(t*\mathcal{S},t.\alpha_{\rm pos})\circ j_{t.\alpha_{\rm pos}}&\\ = i\epsilon_G(\mathcal{S},\alpha)D_G(\mathcal{S},\alpha)\theta_{\mathcal{S}_\alpha}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_\alpha.&\end{aligned}$$

La relation de saut est démontrée dans ce cas.

Si $\alpha \not\perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$ alors l'ordre de Hiraï de $\mathfrak{g}$ est non linéaire ainsi ϕ possède une composante irréductible de type BI et de rang 2 (qui est unique). On note α_0 la racine courte compacte et positive de ce facteur. On a alors $t.\alpha_{\rm pos} \in \Sigma^{\rm nc}_\phi(h_{t*\mathcal{S}})$ si et seulement si $t.\alpha_{\rm pos} = \alpha_0$ ce qui équivaut à $t*\mathcal{S}_\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. Comme dans le cas précédent, on obtient la relation de saut. Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})\backslash\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$ et $\alpha \in \Sigma^{\rm nc}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a alors $\theta_{\mathcal{S}} = 0$ et on a nécessairement $\mathcal{S}_\alpha \notin \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$ ainsi la relation de saut est vérifiée et le lemme est démontré. ■

On souhaite à présent définir une application de transfert de $\mathfrak{W}\big(\mathfrak{g},\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}\big)$ dans $\widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$.

Lemme 5.23 *On considère l'application*

$$\begin{aligned}B_\phi\colon \mathfrak{W}(\mathfrak{g},\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}) &\longrightarrow \widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g}),\\ \psi &\longmapsto \theta,\end{aligned}$$

où

$$\theta_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)}\sum_{\substack{t\in W(\mathfrak{h}_\varnothing)\\ t*\mathcal{S}\in\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}}}\omega_{\mathcal{S},t*\mathcal{S}}(t)t^{-1}.\psi_{t*\mathcal{S}}.$$

Si la somme précédente est vide, on pose $\theta_{\mathcal{S}} = 0$. Cette application est définie.

Démonstration Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On observe que l'on a $\theta_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$. Soient $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\langle \partial(w)\theta_{\mathcal{S}}\rangle_{\alpha} &= \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{\substack{t\in W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\\ t*\mathcal{S}\in\overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}}} \omega_{\mathcal{S},t*\mathcal{S}}(t)\,\mathrm{sign}(t.\alpha)t^{-1}.\langle\partial(t.w)\psi_{t*\mathcal{S}}\rangle_{t.\alpha_{\mathrm{pos}}}\\ &= i\frac{D(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{\substack{t\in W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\\ t*\mathcal{S}\in\overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}\\ t*\mathcal{S}_{\alpha}\in\overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}}} \omega_{\mathcal{S}_{\alpha},t*\mathcal{S}_{\alpha}}(t)t^{-1}.\partial\big(c_{t*\mathcal{S},t.\alpha_{\mathrm{pos}}}(t.w)\big)\,\psi_{t*\mathcal{S}_{\alpha}}\\ &\qquad\qquad\circ u(t*\mathcal{S},t.\alpha_{\mathrm{pos}})\circ j_{t.\alpha_{\mathrm{pos}}}.\end{aligned}$$

Comme par définition de l'ordre sur $\overline{\Delta(\mathfrak{g})}$, on a $t*\mathcal{S} \le t*\mathcal{S}_{\alpha}$, on en déduit que $t*\mathcal{S}_{\alpha} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}$ implique $t*\mathcal{S} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}$. L'expression précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}&i\frac{D(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{\substack{t\in W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\\ t*\mathcal{S}_{\alpha}\in\overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}}} \omega_{\mathcal{S}_{\alpha},t*\mathcal{S}_{\alpha}}(t)t^{-1}.\partial\big(c_{t*\mathcal{S},t.\alpha_{\mathrm{pos}}}(t.w)\big)\,\psi_{t*\mathcal{S}_{\alpha}}\\ &\qquad\qquad\circ u(t*S,t.\alpha_{\mathrm{pos}})\circ j_{t.\alpha_{\mathrm{pos}}}\\ &\quad= iD(\mathcal{S},\alpha)\epsilon(\mathcal{S},\alpha)\partial\big(c_{\mathcal{S},\alpha}(w)\big)\,\theta_{\mathcal{S}_{\alpha}}\circ u(\mathcal{S},\alpha)\circ j_{\alpha}.\end{aligned}$$

On a montré que $\theta \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}$. Par définition, on a $\iota_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} \in W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ et on a la relation $\iota_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}.\theta_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\iota_{\mathcal{S},\mathcal{S}'})\theta_{\mathcal{S}'}$. On a montré que $\theta \in \widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$. ∎

Définition 5.24 Soient G dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}'$ et $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On suppose ϕ suffisante. On considère l'application

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\phi}\colon \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_{\phi}) &\longrightarrow \mathfrak{I}(\mathfrak{g}),\\ \psi &\longmapsto \Gamma\circ B_{\phi}\circ A_{\phi}(\psi),\end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le principal théorème de cet article.

Théorème 5.25 *Soient* G *dans la classe* $\tilde{\mathcal{H}}'$, $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$ *et* $\psi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_{\phi})$. *On suppose que* ϕ *est suffisante. On considère la famille de fonctions* $\Theta = (\Theta_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ *définie par*

$$\Theta_{\mathcal{S}}(x) = \frac{1}{N_{\mathcal{S}}} \sum_{\substack{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}} \sum_{w\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathrm{G},\mathcal{S}',\mathcal{S}}(w)w.\psi_{\mathcal{S}'}.$$

On a alors $\Theta \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ *et* $\mathrm{Tr}_{\phi}(\psi) = \Theta$.

Démonstration D'après le lemme 5.22, on a $A_{\phi}(\psi) \in \mathfrak{W}\big(\mathfrak{g}, \overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}\big)$, puis d'après le lemme 5.23, on a $B_{\phi}\circ A_{\phi}(\psi) \in \widetilde{\mathfrak{W}}(\mathfrak{g})$ et enfin la proposition 5.10 permet d'obtenir que $\mathrm{Tr}_{\phi}(\psi) \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$. En posant $\psi_{\mathcal{S}} = 0$ pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})\backslash\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})$. On obtient pour $\mathcal{S} \in \overline{\Delta(\mathfrak{g}_{\phi})}$,

$$A_{\phi}(\psi)_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(\mathcal{S}(\Phi,\phi)\big)} \sum_{t\in\mathcal{S}(\Phi,\phi)} \omega_{\mathcal{S},t*\mathcal{S}}(t)t^{-1}.\psi_{t*\mathcal{S}}.$$

Comme pour $\mathcal{S} \notin \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$ et $w \in \mathcal{S}(\Phi, \phi)$, on a $w * \mathcal{S} \notin \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$, en posant $A_\phi(\psi)_\mathcal{S} = 0$ pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}) \backslash \overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$, la relation précédente est vérifiée pour tout $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. En utilisant l'inclusion $\mathcal{S}(\Phi, \phi) \subset W(\mathfrak{h}_\varnothing)$, on obtient ensuite les égalités suivantes pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} B_\phi \circ A_\phi(\psi)_\mathcal{S} &= \frac{1}{\operatorname{Card}(W(\mathfrak{h}_\varnothing))}\Big[\sum_{u \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)} \omega_{\mathrm{G},\mathcal{S},u*\mathcal{S}}(u)u^{-1}. \\ &\qquad \Big(\frac{1}{\operatorname{Card}\big(\mathcal{S}(\Phi,\phi)\big)} \sum_{t \in \mathcal{S}(\Phi,\phi)} \omega_{\mathrm{G},u*\mathcal{S},tu*\mathcal{S}}(t)t^{-1}.\psi_{tu*\mathcal{S}}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{\operatorname{Card}(W(\mathfrak{h}_\varnothing))} \sum_{u \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)} \omega_{\mathrm{G},\mathcal{S},u*\mathcal{S}}(u)u^{-1}.\psi_{u*\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\operatorname{Tr}_\phi(\psi)_\mathcal{S} = \frac{1}{N_\mathcal{S}} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}}} \sum_{v \in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathrm{G},\mathcal{S}',\mathcal{S}}(v)v.(B_\phi \circ A_\phi(\psi))_{\mathcal{S}'},$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathrm{G},\mathcal{S}',\mathcal{S}}(v)v.\big(B_\phi \circ A_\phi(\psi)\big)_{\mathcal{S}'} \\ &\qquad = \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\substack{v \in W(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \\ u \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)}} \omega_{\mathrm{G},u*\mathcal{S}',\mathcal{S}}(vu^{-1})(vu^{-1}).\psi_{u*\mathcal{S}'}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Tr}_\phi(\psi)_\mathcal{S} = \frac{1}{N_\mathcal{S}} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}}} \sum_{v \in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathrm{G},\mathcal{S}',\mathcal{S}}(v)v.\psi_{\mathcal{S}'}$$

Le théorème est démontré. ■

6 Décomposition des intégrales invariantes

L'objectif de cette section est de montrer que les intégrales invariantes se décomposent naturellement suivant les c-structures maximales de $\mathfrak{g}$. On montre ce résultat pour les groupes de la classe $\tilde{\mathcal{H}}$ qui ne possèdent pas de facteur simple de type BI et CI de rang supérieur à 3. Ce résultat est équivalent à dire que l'application Tr_ϕ est surjective si ϕ est une c-structures maximale. Le principal résultat de cette section est le théorème 6.21. Pour obtenir ce résultat, la méthode consiste à définir un projecteur sur l'ensemble $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ (définition 6.6) qui permet de décomposer cet espace.

Définition 6.1 Soit G dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}$. Si $\mathfrak{g}$ ne possède pas de facteur simple de type BI et CI, on dit que G est dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}''$.

Dans cette sous-section G désigne un groupe dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}''$.

Lemme 6.2 *Soient* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ *et* $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. *On a alors* $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) = 1$, $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$ *et* $D(\mathcal{S}, \alpha) = 1$.

Remarque On a aussi $c_{\mathcal{S},\alpha} = c_\alpha$ et $u(\mathcal{S}, \alpha) = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha}}$ (définition 2.8) et tout élément de $\mathrm{Str}(\Phi)$ est suffisant.

Démonstration Il suffit de considérer le cas où Φ est irréductible. D'après la sous-section 1.2, on a $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$ ainsi $D(\mathcal{S}, \alpha) = 1$. De plus, si Φ est au moins de rang 3, on a $\tau(\alpha) \neq \alpha$ d'où $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) = 1$ d'après le théorème 4.44. Si Φ est de rang 1 ou 2, on obtient aisément que l'on a aussi $\epsilon(\mathcal{S}, \alpha) = 1$. ■

Lemme 6.3 *Soit* $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. *On a* $\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)} = \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ *et l'application*

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi) &\longrightarrow \mathfrak{W}(\mathfrak{g}), \\ \phi &\longmapsto \theta, \end{aligned}$$

où $\theta_{\mathcal{S}} = \phi_{\mathcal{S}}$ *si* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ *et* 0 *sinon est définie. Cette application identifie* $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ *à un sous-espace de* $\mathfrak{W}\big(\mathfrak{g}, \Delta(\mathfrak{g}_\phi)\big)$.

Remarque L'ensemble $\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)}$ est défini par la définition 5.17.

Démonstration Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a alors $\alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$ d'après le lemme 6.2. On en déduit que

$$\Delta(\mathfrak{g}_\phi) = \{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \text{ il existe } \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi) \text{ tel que } \mathcal{S} \subset \mathcal{S}'\},$$

et $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ équivaut à $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$. On en conclut que $\overline{\Delta(\mathfrak{g}_\phi)} = \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ et le reste du lemme découle de cette propriété. ■

Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On pose pour $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$,

$$\mathcal{S}ig_{\mathcal{S}}(\alpha)(x) = \mathrm{sign}(\alpha(x))/2 \quad \text{et} \quad x_\alpha = \frac{X_\alpha}{2}$$

où X_α est la coracine de α. On considère x_α comme un élément de $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On fixe une base $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{S})$ de $\ker(\alpha) \subset \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$. On note pour $l \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}^l_\alpha(\mathcal{S})$ l'ensemble des monômes de $\mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ engendré par $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{S})$ et de degré au plus l. On fixe une fonction plateau $\eta\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ qui vérifie $\mathrm{Supp}(\eta) \subset [-1,1]$ et $\eta(t) = 1$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Définition 6.4 Soient P une partie de $\Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On considère les parties suivantes de P :

$$P_\alpha = \overline{\{\mathcal{S} \in P \mid \alpha \in \mathcal{S}\}} \quad \text{et} \quad P^\alpha = \{\mathcal{S} \in P \mid \alpha \notin \mathcal{S}\}.$$

Lemme 6.5 *Soient P une partie de $\Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Supposons $P_\alpha \neq \varnothing$. Soit $\mathcal{S} \in P_\alpha$. On a alors $\alpha \in \mathcal{S}$ ou $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. Si $\bar{P} = P$ alors $\overline{P^\alpha} = P^\alpha$.*

Démonstration Supposons que $\alpha \notin \mathcal{S}$. Il existe alors une suite $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n = \mathcal{S}'$ et $\alpha_i \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_i})$ pour $0 \leq i \leq n-1$ tels que $(\mathcal{S}_i)_{\alpha_i} = \mathcal{S}_{i+1}$, $\mathcal{S}' \in P$ et $\alpha \in S'$. Comme $\alpha_i \perp \mathcal{S}_i$ d'après le lemme 6.2, on a $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{\alpha_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$. On en déduit qu'il existe i tel que $\alpha = \alpha_i$ et $\alpha \perp \mathcal{S}$. ∎

La définition suivante introduit l'opérateur qui permet de décomposer l'espace $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$.

Définition 6.6 Soient $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$ et $\psi \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. On considère la famille de fonctions $\theta = (\theta_\mathcal{S})_{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})}$ définies par

$$\theta_\mathcal{S}(x) = \begin{cases} \mathcal{S}ig_\mathcal{S}(\alpha) \sum_{p=0}^\infty \frac{\alpha^p(x)}{p!} \eta\big(\Delta_p(\psi_\mathcal{S})\alpha(x)\big) \langle \partial(x_\alpha^p)\psi_\mathcal{S} \rangle_\alpha & \text{si } \alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}), \\ \phi_\mathcal{S} & \text{si } \alpha \in \mathcal{S}, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{h}_\mathcal{S}^{\mathrm{reg}}$, où $\Delta_p(\psi_\mathcal{S}) = \max\big(A_p M_p(\psi_\mathcal{S}) 2^{2p}, 1\big)$ avec

$$M_p(\psi_\mathcal{S}) = \sup_{\substack{w' \in \mathfrak{B}_\alpha^p(\mathcal{S}) \\ x \in \ker(\alpha)}} |\partial(w') \langle \partial(x_\alpha^p)\psi_\mathcal{S} \rangle_\alpha(x)|,$$

et

$$A_p = \sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq q \leq p} |\eta^{(q)}(x)|.$$

On pose $\Lambda_\alpha(\psi) = \theta$.

Remarque L'application Λ_α n'est pas linéaire.

On pose pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \leq p$, $C_p^q = \frac{p!}{(p-q)!q!}$.

Lemme 6.7 *Avec les notations de la définition précédente, on a pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\Lambda_\alpha(\psi)_\mathcal{S} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_\mathcal{S}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})\big)$.*

Démonstration Si $\alpha \notin \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$, cela est clair. Supposons $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$. Pour $\phi \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_\mathcal{S}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})\big)$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$s_p(\phi) = \frac{\alpha^p(x)}{p!} \eta\big(\Delta_p(\phi)\alpha(x)\big) \langle \partial(x_\alpha^p)\phi \rangle_\alpha.$$

On a $s_p(\psi_\mathcal{S}) \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_\mathcal{S}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha}) \cup \{\alpha\}\big)$. Comme d'après le lemme 6.2, on a $\alpha \perp \mathcal{S}$, on obtient que $s_p(\psi_\mathcal{S}) \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_\mathcal{S}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})\big)$. Soient $r \in \mathbb{N}$ tel que $2r \leq p-1$ et $w \in \mathfrak{B}_\alpha^r(\mathcal{S})$. On a

$$\partial(w x_\alpha^r) s_p(\psi_\mathcal{S}) = \sum_{q=0}^r C_r^q \frac{\alpha^{p-q}(x)}{(p-q)!} \Delta_p^q(\psi_\mathcal{S}) \big(\eta^{(q)}(\Delta_p(\psi_\mathcal{S})\alpha(x)) \partial(w) \langle \partial(x_\alpha^p)\psi_\mathcal{S} \rangle_\alpha\big),$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

ainsi

$$
\begin{aligned}
|\partial(wx_\alpha^r)s_p(\psi_{\mathcal{S}})| &\le A_r \sum_{q=0}^{r} \frac{\mathrm{C}_r^q}{(p-q)!\,\Delta_p^{p-q}(\psi_{\mathcal{S}})} \Delta_p^q(\psi_{\mathcal{S}}) M_p(\psi_{\mathcal{S}}) \\
&\le \frac{A_p M_p(\psi_{\mathcal{S}})}{\Delta_p^{p-2r}(\psi_{\mathcal{S}})} 2^p \le 2^{-p}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que la série $\sum_p \partial(wx_\alpha^r)s_p(\psi_{\mathcal{S}})$ converge normalement sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{nc}}$ et on en conclut que $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}))$. ■

Les deux résultats suivants donnent les principales propriétés de l'application Λ_α.

Proposition 6.8 *Avec les hypothèses de la définition précédente, l'application*

$$\Lambda_\alpha \colon \mathfrak{W}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$$

est définie.

Démonstration On considère $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et $\psi \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. Si $\alpha \notin \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on a $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} = 0$ ou $\psi_{\mathcal{S}}$, ainsi $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}))$. Si $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on a

$$\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha}) \cup \{\alpha\}\big).$$

En utilisant le lemme 6.2 et la proposition 2.2, on obtient que l'on a

$$\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha}) = \{\gamma \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing) \mid \gamma \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}\} = \{\gamma \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) \mid \gamma \perp\!\!\!\perp \alpha\}.$$

On en déduit que $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$. On souhaite à présent vérifier les relations de saut. Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ tels que $w = w'x_\beta^r$ où $w' \in \mathrm{Sym}\big(\ker(\beta)\big)$ et $r \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 6.2, on a $\epsilon(\mathcal{S},\beta) = 1$. On considère cinq cas.

Cas 1 Si $\alpha \in \mathcal{S}$, on a $\langle \partial(w)\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} \rangle_\beta = iD(\mathcal{S},\beta)\partial\big(c_\beta(w)\big)\psi_{\mathcal{S}_\beta} \circ j_\beta$. Comme $\beta \perp\!\!\!\perp \mathcal{S}$, d'après le lemme 6.2, on a $\alpha \in \mathcal{S} \cup \{\beta\} = \mathcal{S}_\beta$ et

$$\partial\big(c_\beta(w)\big)\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}_\beta} = \partial\big(c_\beta(w)\big)\psi_{\mathcal{S}_\beta}.$$

On en déduit que la relation de saut est vérifiée.

Cas 2 Si $\beta = \alpha$. On a :

$$
\begin{aligned}
\langle \partial(w)\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} \rangle_\alpha &= \partial(w')\langle \partial(x_\alpha^r)\psi_{\mathcal{S}} \rangle_\alpha \\
&= iD(\mathcal{S},\alpha)\partial(w')\partial(c_\alpha(x_\alpha^r))\psi_{\mathcal{S}_\alpha} \circ j_\alpha \\
&= iD(\mathcal{S},\alpha)\partial(c_\alpha(w))\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}_\alpha} \circ j_\alpha.
\end{aligned}
$$

Ce cas est résolu.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Cas 3 Si $\beta \perp \alpha$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a :

$$\Big\langle \partial(x_\beta^r)\langle\partial(x_\alpha^p)\psi_{\mathcal{S}}\rangle_\alpha\Big\rangle_\beta = \Big\langle \langle\partial(x_\beta^r x_\alpha^p)\psi_{\mathcal{S}}\rangle_\beta\Big\rangle_\alpha$$
$$= iD(\mathcal{S},\alpha)\Big\langle \partial(x_\alpha^p)\partial\big(c_\beta(x_\beta^r)\big)\,\psi_{\mathcal{S}_\beta}\Big\rangle_\alpha.$$

On en déduit que la relation de saut est vérifiée.

Cas 4 Si $\beta \not\perp \alpha$, $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $\beta \neq \alpha$. On a alors $\beta \notin \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\alpha})$. Cela implique que la fonction $\psi_{\mathcal{S}_\alpha}$ et ses dérivées a un saut trivial en x par rapport à β ainsi $\langle\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}}\rangle_\beta = 0$. On a aussi $\alpha \notin \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\beta})$ ce qui implique que $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}_\beta} = 0$. On a la relation de saut.

Cas 5 Si $\alpha \notin \mathcal{S}$ et $\alpha \notin \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\beta})$. On a alors $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} = 0$. De plus, on a $\alpha \notin \mathcal{S}_\beta$ et $\alpha \notin \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_\beta})$. On en déduit que $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}_\beta} = 0$ et la relation de saut est obtenue. La proposition est démontrée. ∎

Lemme 6.9 *Soient P une partie de $\Delta(\mathfrak{g})$ telle que $\bar{P} = P$ et $\psi \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P)$. On a alors $\Lambda_\alpha(\psi) \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P_\alpha)$ et $\Lambda_\alpha(\psi) - \psi \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P^\alpha)$. On a en particulier l'égalité :*

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P) = \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P_\alpha) + \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P^\alpha).$$

Démonstration Comme $\bar{P} = P$, on a

$$P_\alpha = \{\mathcal{S} \in P \mid \text{il existe } \mathcal{S}' \in P \text{ tel que } \alpha \in \mathcal{S}' \text{ et } \mathcal{S} \leq \mathcal{S}'\}.$$

Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{S} \notin P_\alpha$. Si $\mathcal{S} \notin P$ et $\alpha \notin \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, on a $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} = 0$. Si $\mathcal{S} \notin P$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$, comme $P = \bar{P}$, on a $\mathcal{S}_\alpha \notin P$ ainsi $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} = 0$. Si $\mathcal{S} \in P$ et $\alpha \not\perp \mathcal{S}$, on a nécessairement $\alpha \notin \mathcal{S}$ ainsi $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} = 0$. Sinon, on a $\mathcal{S} \in P$, $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $\mathcal{S}_\alpha \notin P$. On a alors $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} = 0$. On a montré que $\Lambda_\alpha(\psi) \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P_\alpha)$. Ensuite on a $\Lambda_\alpha(\psi)_{\mathcal{S}} - \psi_{\mathcal{S}} = 0$ dès que $\alpha \in \mathcal{S}$, ainsi $\Lambda_\alpha(\psi) - \psi \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P^\alpha)$. Le lemme est démontré. ∎

Lemme 6.10 *Soient P une partie de $\Delta(\mathfrak{g})$ telle que $\bar{P} = P$ et $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On a alors $P_\alpha = \varnothing$ si et seulement si $P^\alpha = P$. Pour $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$ telle que $\beta \not\perp \alpha$, on a $(P_\alpha)_\beta = \varnothing$.*

Démonstration Supposons que $P_\alpha = \varnothing$. On a toujours $P^\alpha \subset P$. Soit $\mathcal{S} \in P$. Si $\alpha \in \mathcal{S}$. On a alors $\mathcal{S} \in P_\alpha$ ce qui est absurde. Ainsi $\alpha \notin \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \in P^\alpha$. Supposons à présent que $P^\alpha = P$. Si $P_\alpha \neq \varnothing$, soit $\mathcal{S} \in P_\alpha$. Il existe alors $\mathcal{S}' \in P$ tel que $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$ et $\alpha \in \mathcal{S}'$. On en déduit que $\mathcal{S}' \notin P^\alpha$ ce qui est absurde. L'équivalence est démontrée. Supposons $(P_\alpha)_\beta \neq \varnothing$. Soit $\mathcal{S} \in (P_\alpha)_\beta$. Il existe alors $\mathcal{S}' \in P_\alpha$ tel que $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$ et $\beta \in \mathcal{S}'$. Il existe ensuite $\mathcal{S}'' \in P$ tel que $\mathcal{S}' \leq \mathcal{S}''$ et $\alpha \in \mathcal{S}''$. On en déduit que $\alpha, \beta \in \mathcal{S}''$ ce qui est absurde. ∎

On souhaite montrer que Tr_ϕ est une application surjective si et seulement si ϕ est maximale (cela signifie que toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont representées dans $\mathfrak{g}_\phi$ à conjugaison près, voir la définition 2.13). La proposition suivante montre que $\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ est non vide et que les c-structures sont uniques à conjugaison pris sous $W(\Phi^c)$.

Proposition 6.11 *On a* $\mathrm{Str}^{\max}(\Phi) \neq \varnothing$ *et le groupe* $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ *agit transitivement sur* $\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$.

Démonstration On peut se ramener au cas où Φ est irréductible. Supposons tout d'abord que Φ est de type AIII, DI ou DIII. Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On pose $\mathcal{S} = \phi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Comme les composantes irréductibles de ϕ sont de type A_1, on a alors $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ et $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ est un élément maximal de $\mathrm{Car}(\mathfrak{g}_\phi)$ pour l'ordre de Hiraï. On observe ensuite que ϕ est maximale si et seulement si $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ est un élément maximal de $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$ pour l'ordre de Hiraï. Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ soit maximal dans $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. Posons $\phi = \mathcal{S} \cup -\mathcal{S} \cup \psi$ où $\psi \in \mathrm{Str}(\Psi)$ et $\Psi = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \perp \mathcal{S}\}$. On a alors $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$ et $\phi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing) = \mathcal{S} \cup \psi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On a nécessairement $\psi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing) = \varnothing$ ainsi on en déduit que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Str}^{\max}(\Phi) &\longrightarrow \{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \mathfrak{h}_\mathcal{S} \text{ maximale}\}, \\ \phi &\longmapsto \phi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) \end{aligned}$$

est surjective. Cela implique en particulier que $\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ est non vide. Soient $\phi, \phi' \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$. Comme l'application ci-dessus est $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$-invariante. Il existe $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w.\phi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing) = \phi' \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On se ramène au cas où $\phi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing) = \phi' \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Ensuite, on a $\phi \cap \Psi, \phi' \cap \Psi \in \mathrm{Str}(\Psi)$ ainsi, il existe $w' \in W(\Psi)$ tel que $w.\phi \cap \Psi = \phi' \cap \Psi$ d'après la proposition 1.4. Comme $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ est maximal, on a $\Psi = \Psi^c$, d'où le résultat.

On suppose à présent que Φ est de type CII. On peut alors supposer que τ fixe les racines longues de Φ. Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ soit maximal. On a alors $\mathcal{S} \cap \tau(\mathcal{S}) = \varnothing$ et pour $\alpha \in \mathcal{S}$, α et $\tau(\alpha)$ engendrent un sous-système de type B_2 de Φ. Soit $\phi = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \langle \alpha, \tau(\alpha)\rangle_\Phi \cup \psi$ où $\psi \in \mathrm{Str}(\Psi)$ et $\Psi = \{\beta \in \Phi \mid \beta \perp \alpha, \tau(\alpha) \,\forall\, \alpha \in \mathcal{S}\}$. En remarquant que tout élément de $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$ est conjugué à un élément de $\{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'} \mid \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\}$, on en déduit que $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$. Soient $\phi, \phi' \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$. Les éléments de $\phi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ ne sont pas fortement orthogonaux. Soit $\mathcal{S}$ une partie maximale de $\phi \cap \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\mathcal{S})$ telle que $\mathcal{S} \cap \tau(\mathcal{S}) = \varnothing$. On a alors $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ et $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ est nécessairement un élément maximal de $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. On considère aussi un élément $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ associé à ϕ'. On en déduit qu'il existe $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Comme pour $\alpha \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$, il existe un unique sous-système de racines de type B_2 de Φ contenant α, on en déduit que $w.\bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \langle \alpha, \tau(\alpha)\rangle_\Phi = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}'} \langle \alpha, \tau(\alpha)\rangle_\Phi$. On peut se ramener au cas où

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \langle \alpha, \tau(\alpha)\rangle_\Phi = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}'} \langle \alpha, \tau(\alpha)\rangle_\Phi.$$

On pose $\Psi = \{\beta \in \Phi \mid \beta \perp \mathcal{S} \cup \tau(\mathcal{S})\}$. On a alors $\Psi \subset \Phi^c$ et $\phi \cap \Psi, \phi' \cap \Psi \in \mathrm{Str}(\Psi)$. On sait alors qu'il existe $w \in W(\Psi)$ tel que $w.(\phi \cap \Psi) = \phi' \cap \Psi$. La proposition est démontrée. ∎

Théorème 6.12 *Soient* $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$ *et* $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ *tels que* $\mathcal{S} \overset{\mathrm{G}_\phi}{\simeq} \mathcal{S}'$. *On a alors*

$$\omega_{\mathrm{G}_\phi, \mathcal{S}, \mathcal{S}'} = \omega_{\mathrm{G}, \mathcal{S}, \mathcal{S}'}|_{W_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')}.$$

La démonstration de ce théorème nécessite quelques lemmes préparatoires. On rappelle que le système de racines ϕ est plein et l'ensemble $\phi^+ = \phi \cap \Sigma$ est un ordre sur ϕ. On considère l'involution $\tau' = \tau_\phi$ induite par τ sur ϕ (définition 1.20). On sait d'après le lemme 1.21 que τ' est ϕ^+-admissible. Dans la suite, on considérera les résultats liés aux groupes de Weyl de G_ϕ exprimés grâce à τ'. On fixe un élément $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$.

Lemme 6.13 *On a l'égalité* $\mathcal{S}^{\tau'} = \mathcal{S}^{\tau} \,\dot{\cup}\, \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\}$.

Démonstration Soit $\alpha \in \mathcal{S}^\tau$. Si $\tau(\alpha) \neq \tau'(\alpha)$, alors $\tau(\alpha) \notin \Phi$ ce qui est absurde. On a donc $\tau'(\alpha) = \tau(\alpha)$ et $\alpha \in \mathcal{S}'^{\tau}$. On a montré l'inclusion $\mathcal{S}^\tau \subset \mathcal{S}^{\tau'}$. Ensuite, on obtient aisément $\mathcal{S}^\tau \,\dot{\cup}\, \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\} \subset \mathcal{S}^{\tau'}$. On considère à présent $\alpha \in \mathcal{S}^{\tau'}$ et on suppose que $\tau(\alpha) \in \Phi$. Cela implique d'après la définition de τ' que l'on a $\tau'(\alpha) = \tau(\alpha)$ et $\alpha \in \mathcal{S}^\tau$. Le résultat est démontré. ■

Lemme 6.14 *On a l'égalité* $F_\phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S} = F_\Phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S}$.

Démonstration D'après le lemme 1.18, on a $\tau(\mathcal{S}) \cap \Phi^c = \tau(\mathcal{S}) \cap \phi^c$. Ensuite, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\tau'(\mathcal{S}) \cap \phi^c &= \{\tau'(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{S}, \tau'(\alpha) \neq \alpha\} \cap \phi^c\\ &= \{\tau(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{S}, \tau(\alpha) \neq \alpha\} \cap \phi^c\\ &= \tau(\mathcal{S}) \cap \phi^c = \tau(\mathcal{S}) \cap \Phi^c.\end{aligned}$$

Ensuite on se ramène dans le cas où Φ est de type A_1^p ou irréductible. Si Φ est de type A_1^p alors $\phi = \Phi$, $\tau' = \tau$ et le résultat est évident.

Si Φ est irréductible et n'est pas de type CII. On a alors

$$F_\Phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S} = \tau(\mathcal{S}) \cap \Phi^c = \tau'(\mathcal{S}) \cap \phi^c = F_\phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S}.$$

Si Φ est irréductible et de type CII. On a alors $\tau' = \tau_\phi$ et

$$F_\phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S} = \tau'(\mathcal{S}) = \tau(\mathcal{S}) = F_\Phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S}.$$

Le lemme est démontré. ■

Lemme 6.15 *Soient* $\alpha, \beta \in \Phi$*. On suppose que* $\alpha \perp \beta$ *et* $\tau(\beta) \notin \Phi$ *alors* $\alpha \perp \tau(\beta)$*.*

Démonstration Il suffit de considérer le cas où Φ est de type A_1^p ou irréductible. Si Φ est de type A_1^p alors $\Phi' = \Phi$ et le résultat est évident. Si Φ est irréductible, il existe $\beta \in \Phi$ vérifiant $\tau(\beta) \notin \Phi$ si et seulement si Φ est de type A_n avec $n \geq 2$ et le résultat est clair. ■

Lemme 6.16 *On a les inclusions suivantes :*

$$W(\langle \mathcal{S}^{\tau'} \rangle_\phi) \times \widetilde{W}_{\mathrm{G}_\phi}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}) \subset W(\langle \mathcal{S}^{\tau} \rangle_\phi) \times \widetilde{W}_{\mathrm{G},1}(\mathfrak{h}_\mathcal{S}), \quad W(\bar{\phi}^c_{\mathcal{S},\tau'}) \subset W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S},\tau}).$$

Démonstration Cela découle des lemmes 6.13 et 6.14. ■

Lemme 6.17 *On a les égalités suivantes :*

$$E_\phi(\mathcal{S}) = E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \,\dot\cup\, \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\}, \quad E_\phi(\mathcal{S}) \cup \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau'} = E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \cup \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau}.$$

Démonstration On montre tout d'abord la première égalité. On a :

$$\begin{aligned} E_\phi(\mathcal{S}) &= \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau'(\alpha) = \alpha\} \,\dot\cup\, \big\{\nu_\alpha\big(\alpha \pm \tau'(\alpha)\big) \bigm| \alpha \in \mathcal{S}, \alpha > \tau'(\alpha)\big\} \\ &= \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) = \alpha\} \,\dot\cup\, \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\} \\ &\qquad \dot\cup\, \big\{\nu_\alpha\big(\alpha \pm \tau(\alpha)\big) \bigm| \alpha \in \mathcal{S}, \alpha > \tau(\alpha)\big\} \\ &= E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \,\dot\cup\, \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\}. \end{aligned}$$

Pour montrer la deuxième égalité, on observe que l'on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} E_\phi(\mathcal{S}) &= E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \cup \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\}, \\ \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau'} &= \{\alpha \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^{\tau} \mid \tau(\alpha) \in \Phi\}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle du lemme 6.13. On en déduit alors la deuxième égalité. ■

Lemme 6.18 *Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ tels que $\mathcal{S} \overset{\mathrm{G}_\phi}{\simeq} \mathcal{S}'$ et $w \in W_{\mathrm{G}_\phi}(\mathfrak{h}_\varnothing)$ vérifiant $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. On a alors* $\operatorname{sign}(\tilde w_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'}) = \operatorname{sign}(\tilde w_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\phi})$.

Démonstration Soit θ la réunion des composantes de Φ de type A_n avec $n \geq 2$. On pose $\mu = \theta \cap \phi$. Alors μ est une c-structure de θ ainsi μ est de type A_1^p. Comme $\mathcal{S} \overset{\mathrm{G}_\phi}{\simeq} \mathcal{S}'$, on a $\mathcal{S} \cap \mu = \mathcal{S}' \cap \mu$. Ensuite, on remarque que $\alpha \in \Phi$ vérifie $\tau(\alpha) \notin \Phi$ si et seulement si $\alpha \in \theta$. On en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\} &= \{\alpha \in \mathcal{S} \cap \theta \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\} \\ &= \{\alpha \in \mathcal{S}' \cap \theta \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\} \\ &= \{\alpha \in \mathcal{S}' \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 6.17, on a l'égalité suivante :

$$E_\phi(\mathcal{S}) = E_{\Phi'}(\mathcal{S}) \,\dot\cup\, \{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\}.$$

D'après la définition 4.35, la restriction de $\tilde w_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\phi}$ à $\{\alpha \in \mathcal{S} \mid \tau(\alpha) \notin \Phi\}$ est l'identité. On en déduit que l'on a $\operatorname{sign}(\tilde w_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\phi}) = \operatorname{sign}(\tilde w_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\phi|E_{\Phi'}(\mathcal{S})})$. Comme ϕ est adaptée à Σ d'après le lemme 5.15, on a l'égalité $\operatorname{sign}(\tilde w_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\phi|E_{\Phi'}(\mathcal{S})}) = \operatorname{sign}(\tilde w_{\mathcal{S},\mathcal{S}',\Phi'})$. Le résultat est démontré. ■

Démonstration du théorème 6.12 On s'intéresse tout d'abord au cas où $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Soit $\sigma \in W_{\mathrm{G}_\phi}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On observe que l'on a la relation $p_{\mathrm{G},\mathcal{S}}(\sigma) = p_{\mathrm{G}_\phi,\mathcal{S}}(\sigma)$ grâce au lemme 6.16. Ensuite, d'après le lemme 6.14, on a l'égalité $F_\Phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S} = F_\phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S}$ qui permet d'obtenir :

$$\{\alpha \in F_\Phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S} \mid \sigma.\alpha \in -\Sigma\} = \{\alpha \in F_\phi(\mathcal{S})\backslash\mathcal{S} \mid \sigma.\alpha \in -\Sigma\}.$$

On en déduit alors d'après la proposition 4.32 que l'on a $\omega_{\mathrm{G},\mathcal{S},\mathcal{S}}(w) = \omega_{\mathrm{G}_\phi,\mathcal{S},\mathcal{S}}(w)$. On considère à présent $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ tels que $\mathcal{S} \overset{\mathrm{G}_\phi}{\simeq} \mathcal{S}'$ et $w \in W_{\mathrm{G}_\phi}(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w * \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Les lemmes 6.17 et 6.18 ainsi que la proposition 4.36 permettent alors d'obtenir l'égalité suivante : $\omega_{\mathrm{G},\mathcal{S},\mathcal{S}'}(w) = \omega_{\mathrm{G}_\phi,\mathcal{S},\mathcal{S}'}(w)$. Le théorème est démontré. ■

L'action de $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ de $\Delta(\mathfrak{g})$ induit une action de $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ sur $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$.

Définition 6.19 On considère l'action suivante sur $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$.

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{h}_\varnothing) \times \mathfrak{W}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathfrak{W}(\mathfrak{g}), \\ (w, \psi) &\longmapsto w.\psi, \end{aligned}$$

où $(w.\psi)_{\mathcal{S}} = \omega_{w^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(w)w.\psi_{w^{-1}*\mathcal{S}}$.

D'après le lemme 6.3, l'espace $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. Le lemme suivant détermine l'action de $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ sur $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$:

Lemme 6.20 *Soient $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$ et $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On a alors $w.\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi) = \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_{w.\phi})$.*

Démonstration Soient $\theta \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ et $w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On sait déjà que $w.\theta \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. Il suffit de montrer les propriétés d'invariances pour montrer que $w.\theta \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_{w.\phi})$. Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_{w.\phi})$ et $u \in W_{\mathrm{G}_{w.\phi}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. On remarque que $w^{-1}uw \in W_{\mathrm{G}_\phi}(w^{-1}*\mathcal{S}, w^{-1}*\mathcal{S}')$. On en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} u.\big((w.\theta)_{\mathcal{S}}\big) &= \omega_{w^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(w)(uw).\theta_{w^{-1}*\mathcal{S}} \\ &= \omega_{w^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(w)w(w^{-1}uw).\theta_{w^{-1}*\mathcal{S}} \\ &= \omega_{w^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(w)\omega_{w^{-1}*\mathcal{S},w^{-1}*\mathcal{S}'}(w^{-1}uw)w.\theta_{w^{-1}*\mathcal{S}'} \\ &= \omega_{w^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(w)\omega_{w^{-1}*\mathcal{S},w^{-1}*\mathcal{S}'}(w^{-1}uw)\omega_{w^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}'}(w)(w.\theta)_{\mathcal{S}'} \\ &= (w.\theta)_{\mathcal{S}'}. \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. ■

Le principal résultat de cette sous-section est le théorème suivant.

Théorème 6.21 *Soit $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$. L'application Tr_ϕ est alors surjective. De plus, pour $\psi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$, il existe $\theta \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ telle que*

$$\psi = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\sigma \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)} \sigma.\theta.$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de quelques lemmes préparatoires. Il est nécessaire de considérer certains sous-ensembles de $W(\mathcal{S},\mathcal{S}')$.

Définition 6.22 Soient $\mathcal{S},\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S}\simeq\mathcal{S}'$. On pose

$$W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=\{w\in W(\mathcal{S},\mathcal{S}')\mid w*\mathcal{S}=\mathcal{S}'\},$$
$$W_{sp}(\mathcal{S})=\{w\in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\mid w*\mathcal{S}=\mathcal{S}\}.$$

Remarque Le lemme 6.25 justifie le fait de considérer les ensembles $W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$.

Lemme 6.23 *Soient $\mathcal{S},\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g}_\phi)$ tels que $\mathcal{S}\overset{\mathrm{G}_\phi}{\simeq}\mathcal{S}'$. On a alors*

$$W_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S},\mathcal{S}')\subset W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}').$$

Démonstration Soit Ψ une composante irréductible de Φ. Si Ψ est de type A_1, on a alors $\mathcal{S}\cap\Psi=\mathcal{S}'\cap\Psi$ et le résultat est clair. Si Ψ est de rang 2, on a alors deux cas. Soit $\Psi^c=\Psi$ et le résultat est clair. Sinon Ψ^{nc} est l'ensemble des racines courtes de Ψ en effet Ψ ne peut être de type CI par hypothèse. Si $\mathcal{S}\cap\Psi=\varnothing$, on a aussi $\mathcal{S}'\cap\Psi=\varnothing$ et le résultat est clair. Sinon $\mathcal{S}\cap\Psi$ et $\mathcal{S}'\cap\Psi$ sont réduits à un seul élément. Si $\mathcal{S}\cap\Psi=\mathcal{S}'\cap\Psi$, le groupe de Weyl associé à $\mathcal{S}\cap\Psi$ est engendré par les racines courtes ainsi tous les éléments de ce groupe vérifie $w*(\mathcal{S}\cap\Phi)=\mathcal{S}\cap\Psi$. Si $\mathcal{S}\cap\Psi\neq\mathcal{S}'\cap\Psi$, soit β une racine longue de Ψ. Alors β est compacte, $s_\beta\in W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')\cap W_{\mathrm{G}_\phi}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ et $\beta*(\mathcal{S}\cap\Psi)=\mathcal{S}'\cap\Psi$. Le cas précédent permet alors de conclure. Le résultat est démontré. ■

Lemme 6.24 *Soient $\mathcal{S},\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S}\simeq\mathcal{S}'$, $w\in W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ et $w'\in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$. On a alors $w'w\in W_{sp}(\mathcal{S},w'*\mathcal{S}')$.*

Démonstration Il suffit de remarquer que $w'\in W_{sp}(\mathcal{S}',w'*\mathcal{S}')$, ce qui découle du lemme 2.11. ■

Lemme 6.25 *Soient $\mathcal{S},S'\in\Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S}\simeq\mathcal{S}'$ et $\phi\in\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$. On suppose que $\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. Pour $w\in W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$, on a $w.\phi\in\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ et $w.\phi^c=(w.\phi)^c$.*

Remarque Cette propriété n'est pas vérifiée pour $w\in W(\mathcal{S},\mathcal{S}')$.

Démonstration Soit $w\in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $w*\mathcal{S}=\mathcal{S}'$. On a alors $w.\phi\in\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ et $(w.\phi)^c=w.\phi^c$. Comme $W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=w\,W_{sp}(\mathcal{S})$, il suffit de montrer le résultat dans le cas où $\mathcal{S}=\mathcal{S}'$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}W_{sp}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})&=W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\{w\in W(\langle\mathcal{S}\rangle_\Phi)\mid w*\mathcal{S}=\mathcal{S}\}\\&=W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\langle\!\langle s_\alpha\mid\alpha\in\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}^\tau\rangle\!\rangle\{w\in W(\langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi)\mid w*\mathcal{S}^\tau=\mathcal{S}^\tau\}.\end{aligned}$$

Soit $w\in W(\langle\mathcal{S}^\tau\rangle_\Phi)$ tel que $w*\mathcal{S}^\tau=\mathcal{S}^\tau$. On souhaite montrer que $w.\phi=\phi$ et $w.\phi^c=(w.\phi)^c$. Si $\mathcal{S}^\tau=\varnothing$, le résultat est évident sinon, on peut supposer que Φ est irréductible. Cela implique que Φ est de type DI. Comme les facteurs irréductibles de ϕ sont de type A_1, on a $\phi=\mathcal{S}^\tau\cup-\mathcal{S}^\tau\cup\{\alpha\in\phi\mid\alpha\perp\mathcal{S}^\tau\}$, ainsi $w.\phi=\phi$ et $w.\phi^c=(w.\phi)^c$. Ensuite, pour $w\in W^{\varnothing}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\{s_\alpha\mid\alpha\in\mathcal{S}\}$, on a facilement $w.\phi\in\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ et $(w.\phi)^c=w.\phi^c$. Le lemme est démontré. ■

Le lemme suivant généralise la proposition 4.38 aux ensembles $W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$.

Lemme 6.26 *Soient $\mathcal{S},\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{S}\simeq\mathcal{S}'$, $\alpha\in\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $u\in W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$. On pose $\beta=u.\alpha_{\mathrm{pos}}$. On a alors $\beta\in\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'})$ et $u\in W_{sp}(\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}'_\beta)$. De plus, on a l'égalité*

$$\begin{aligned}&\{v\in W_{sp}(\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}'_\beta)\mid v.\alpha_{\mathrm{pos}}=\beta\}\\&\qquad=\begin{cases}\{v\in W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')\mid v.\alpha_{\mathrm{pos}}=\beta\}\times\{\mathrm{id},s_\alpha\} & \text{si } d(\mathcal{S},\alpha)=1,\\ \{v\in W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')\mid v.\alpha_{\mathrm{pos}}=\beta\} & \text{si } d(\mathcal{S},\alpha)=2.\end{cases}\end{aligned}$$

Démonstration Comme $W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')\subset W(\mathcal{S},\mathcal{S}')$, la première partie du lemme découle de la proposition 4.38. En utilisant les égalités de la proposition 4.38, on obtient :

$$\begin{aligned}\{v\in W_{sp}(\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}'_\beta)\mid v.\alpha_{\mathrm{pos}}=\beta\}&=\{v\in W(\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}'_\beta)\mid v.\alpha_{\mathrm{pos}}=\beta,\ v*\mathcal{S}=\mathcal{S}'\}\\&=\{v\in W(\mathcal{S},\mathcal{S}')\mid v.\alpha_{\mathrm{pos}}=\beta,\ v*\mathcal{S}=\mathcal{S}'\}\circ\{\mathrm{id},s_\alpha\}\\&=\{v\in W_{sp}(\mathcal{S},\mathcal{S}')\mid v.\alpha_{\mathrm{pos}}=\beta\}\circ\{\mathrm{id},s_\alpha\}.\end{aligned}$$ ■

Définition 6.27 Soit $\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})$. On considère la réunion disjointe suivante :

$$\Xi(\mathcal{S})_{sp}=\dot{\bigcup_{\substack{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}}}W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S})\subset\Xi(\mathcal{S}).$$

On pose $N_{sp,\mathcal{S}}=\mathrm{Card}\big(\Xi(\mathcal{S})_{sp}\big)$.

Lemme 6.28 *Soient $\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})$ et $\alpha\in\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. L'application*

$$\begin{aligned}I^{sp}_{\mathcal{S},\alpha}\colon\Xi(\mathcal{S})_{sp}&\longrightarrow\Xi(\mathcal{S}_\alpha)_{sp},\\ i_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)&\longmapsto i_{\mathcal{S}'_{u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}},\mathcal{S}_\alpha}(u),\end{aligned}$$

où $\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})$, $\mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}$ et $u\in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S})$. Cette application est définie et injective. De plus, on a

$$\Xi(\mathcal{S}_\alpha)_{sp}=\begin{cases}\mathrm{im}(I^{sp}_{\mathcal{S},\alpha})\circ\{id,s_\alpha\} & \text{si } d(\mathcal{S},\alpha)=2,\\ \mathrm{im}(I^{sp}_{\mathcal{S},\alpha}) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration La première partie du lemme découle du lemme 6.26. Soient $\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}_\alpha$ et $\gamma\in\mathcal{S}'$. On a alors $\gamma\in\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'\setminus\{\gamma\}})$ et $(\mathcal{S}'\setminus\{\gamma\})_\gamma$. On en déduit que l'on a la décomposition

$$W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}_\alpha)=\dot{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{S}'}}\{u\in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}_\alpha)\mid u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}=\gamma\}.$$

Le lemme 6.26 permet alors de conclure. ■

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Lemme 6.29 *On a l'égalité suivante :* $\mathfrak{W}(\mathfrak{g}) = \sum_{\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \mathfrak{W}(\mathfrak{g}_\phi)$.

Démonstration On introduit les notations suivantes. Pour $A \in \Delta(\mathfrak{g})$, on note P_A l'ensemble des parties de A. On observe que P_A vérifie $\overline{P_A} = P_A$. Soit Q une partie de $\Delta(\mathfrak{g})$ telle que $\bar{Q} = Q$. On note $T(Q)$ l'ensemble des parties de Q de la forme P_A avec $A \in Q$ maximale (pour l'inclusion). On a alors l'égalité $Q = \bigcup_{P \in T(Q)} P$. Montrons que l'on a la relation

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{g}, Q) = \sum_{P \in T(Q)} \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P). \tag{6.1}$$

On remarque tout d'abord que $Q \subset Q' \subset \Delta(\mathfrak{g})$ implique $\mathfrak{W}(\mathfrak{g}, Q) \subset \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, Q')$. L'égalité (6.1) est claire si $Q = \varnothing$. Soit $Q \neq \varnothing$. On raisonne par récurrence et on suppose que la relation est vérifiée pour toutes parties $Q_1 \subsetneqq Q$ vérifiant $\overline{Q_1} = Q_1$. Soit $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$, on a alors d'après le lemme 6.9

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{g}, Q) = \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, Q_\alpha) + \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, Q^\alpha).$$

Supposons que l'on ait pour tout $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$, $Q_\alpha = \varnothing$ ou $Q_\alpha = Q$. On pose

$$E = \{\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing) \mid Q_\alpha = Q\}.$$

On observe que l'on a les égalités suivantes :

$$\bigcup_{\mathcal{S} \in Q} \mathcal{S} = \bigcup_{\substack{\mathcal{S} \in Q \\ \alpha \in \mathcal{S}}} \mathcal{S} = \bigcup_{\substack{\mathcal{S} \in Q \\ E \subset \mathcal{S}}} \mathcal{S} \quad \text{pour } \alpha \in E.$$

Soit $\mathcal{S} \in Q$ tel que $E \subset \mathcal{S}$. Supposons que $E \neq \mathcal{S}$ et soit $\beta \in \mathcal{S} \backslash E$. On a alors $Q_\beta \neq \varnothing$ ainsi $\beta \in E$ ce qui est absurde. On en déduit que $E = \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ et comme Q vérifie $\bar{Q} = Q$, on a $Q = P_E$. La relation (6.1) est vérifiée.

Sinon, il existe $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $Q_\alpha \neq \varnothing$ et $Q_\alpha \neq Q$. Cela implique que $Q^\alpha \neq Q$ d'après le lemme 6.10. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à Q_α et Q^α qui permet d'obtenir la relation (6.1) pour Q.

D'après ce qui précède, on a en particulier la relation

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{g}) = \sum_{P \in T(\Delta(\mathfrak{g}))} \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, P).$$

Soit $P \in T\big(\Delta(\mathfrak{g})\big)$. Montrons qu'il existe $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ tel que $P \subset \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. On observe que $T\big(\Delta(\mathfrak{g})\big)$ s'identifie avec les éléments $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{h}_\mathcal{S}$ est une sous-algèbre de Cartan maximale pour l'ordre de Hiraï. On en déduit le résultat alors d'après la proposition 6.11.

Il reste ensuite à observer que les espaces $\mathfrak{W}(\mathfrak{g}_\phi)$ et $\mathfrak{W}\big(\mathfrak{g}, \Delta(\mathfrak{g}_\phi)\big)$ s'identifie de manière canonique pour en déduit l'égalité : $\mathfrak{W}(\mathfrak{g}) = \sum_{\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \mathfrak{W}(\mathfrak{g}_\phi)$. Le lemme est démontré. ■

Démonstration du théorème 6.21 On considère $\psi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$. D'après le lemme 6.29, pour $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$, il existe $\psi_\phi \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g}_\phi)$ telle que $\psi = \sum_{\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \psi_\phi$. Par définition de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$, on a l'égalité

$$\psi_{\mathcal{S}} = \frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \\ S' \simeq S}} \sum_{u \in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u) u.\psi_{\mathcal{S}'}.$$

En utilisant le lemme 6.25, on obtient l'égalité suivante :

$$\psi_{\mathcal{S}} = \frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}} \sum_{\phi,\phi' \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi'}) \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}}} \sum_{\substack{u \in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \\ u.\phi' = \phi}} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u) u.\psi_{\phi',\mathcal{S}'}.$$

Pour $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ et $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose

$$\theta_{\phi,\mathcal{S}} = \frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}} \sum_{\phi' \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}_{\phi'}) \\ \mathcal{S}' \simeq S}} \sum_{\substack{u \in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \\ u.\phi' = \phi}} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u) u.\phi_{\phi',\mathcal{S}'}.$$

On observe que l'on a $\theta_{\phi,\mathcal{S}} = 0$ dès que $\mathcal{S} \notin \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. On considère la famille de fonctions $\theta_\phi = (\theta_{\phi,\mathcal{S}})_{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})}$. Montrons que $\theta_\phi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$. Comme $\phi_{\phi',\mathcal{S}'} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}, \Sigma^{\mathrm{nc}}_{\phi'}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'}))$, on obtient en utilisant le lemme 6.25 que $\theta_{\phi,\mathcal{S}} \in \mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}, \Sigma^{\mathrm{nc}}_{\phi}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)$. D'après le théorème 6.12, on montre aisiment que θ_ϕ vérifie les propriétés d'invariance.

Soient $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nc}}_\phi(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$ et $w \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})$. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle \partial(w)\theta_{\phi,\mathcal{S}} \rangle_\alpha &= \frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}} \sum_{\phi' \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}}} \sum_{\substack{u \in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \\ u.\phi' = \phi}} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u) \langle \partial(w) u.\phi_{\phi',\mathcal{S}'} \rangle_\alpha \\
&= \frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}}} \sum_{\substack{u \in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \\ u.\phi' = \phi}} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)\, \mathrm{sign}(u^{-1}.\alpha) u.\langle \partial(u^{-1}.w)\psi_{u.\phi,\mathcal{S}'} \rangle_{u^{-1}.\alpha_{\mathrm{pos}}} \\
&= i\frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}_\alpha}} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}_\alpha}} \sum_{\substack{u \in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}_\alpha) \\ u.\phi' = \phi}} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}_\alpha}(u) u.\Big(\partial\big(c_{u^{-1}.\alpha}(u^{-1}.w)\big)\, \phi_{u.\phi,\mathcal{S}'}\Big) \circ j_\alpha \\
&= i\frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}_\alpha}} \sum_{\substack{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \\ \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}_\alpha}} \sum_{\substack{u \in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S}_\alpha) \\ u.\phi' = \phi}} \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}_\alpha}(u) \partial\big(c_\alpha(w)\big)\, u.\phi_{u.\nu,\mathcal{S}'} \circ j_\alpha \\
&= i\partial\big(c_\alpha(w)\big)\, \theta_{\phi,\mathcal{S}_\alpha} \circ j_\alpha.
\end{aligned}$$

On rappelle que l'on a $D(\mathcal{S},\alpha) = 1$. La troisième égalité découle du lemme 6.28. On en déduit que $\theta_\phi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ et on a en particulier l'inclusion suivante :

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{g}) \subset \sum_{\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi) \quad \text{(en tant que sous-espaces de } \mathfrak{W}(\mathfrak{g})\text{)}.$$

Soient $v \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ et $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$. On a alors $v.\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$. Montrons que l'on a la relation

$$v.\theta_\phi = \theta_{v.\phi}. \tag{6.2}$$

Soient $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. On a $v * \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_{v.\phi})$. On rappelle que la fonction $v.\theta_\phi$ est définie par $(v.\theta_\phi)_{v*\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S},v*\mathcal{S}}(v)v.\theta_{\phi,\mathcal{S}}$. On obtient les égalités suivantes en utilisant le lemme 6.24

$$\begin{aligned}
(v.\theta_\phi)_{v*\mathcal{S}}(x) &= \omega_{\mathcal{S},v*\mathcal{S}}(v)\theta_{\phi,\mathcal{S}}(v^{-1}.x)\\
&= \omega_{\mathcal{S},v*\mathcal{S}}(v)\frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}}\sum_{\phi'\in\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)}\sum_{\substack{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g}_{\phi'})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}}\sum_{\substack{u\in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S})\\ u.\phi'=\phi}}\omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\phi_{\phi',\mathcal{S}'}(v^{-1}.x)\\
&= \frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}}\sum_{\phi'\in\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)}\sum_{\substack{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g}_{\phi'})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}}\sum_{\substack{u\in W_{sp}(\mathcal{S}',\mathcal{S})\\ u.\phi'=\phi}}\omega_{\mathcal{S}',v*\mathcal{S}}(vu)(vu).\phi_{\phi',\mathcal{S}'}(x)\\
&= \frac{1}{N_{sp,\mathcal{S}}}\sum_{\phi'\in\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)}\sum_{\substack{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})\\ \mathcal{S}'\simeq v*\mathcal{S}}}\sum_{\substack{u\in W_{sp}(\mathcal{S}',v*\mathcal{S})\\ u.\phi'=\phi}}\omega_{\mathcal{S}',v*\mathcal{S}}(u)u.\phi_{\phi'\mathcal{S}'}(x)\\
&= (\theta_{v.\phi})_{v*\mathcal{S}}(x).
\end{aligned}$$

La relation (6.2) est démontrée. On a ainsi montré que

$$\psi = \frac{1}{\mathrm{Card}\{v\in W(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid v.\phi=\phi\}}\sum_{v\in W(\mathfrak{h}_\varnothing)} v.\theta_\phi.$$

Cela prouve la deuxième partie du théorème. Soit $\sigma \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Montrons que l'on a la relation $\Gamma(\theta_{\sigma.\phi}) = \Gamma(\theta_\phi)$. Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(\sigma.\theta_\phi)_\mathcal{S} &= \frac{1}{N_\mathcal{S}}\sum_{\substack{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}}\sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})}\omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.(\sigma.\theta_\phi)_{\mathcal{S}'}\\
&= \frac{1}{N_\mathcal{S}}\sum_{\substack{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}}\sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})}\omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\big(\omega_{\sigma^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}'}(\sigma)\sigma.\theta_{\phi,\sigma^{-1}*\mathcal{S}'}\big)\\
&= \frac{1}{N_\mathcal{S}}\sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}}\sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})}\omega_{\sigma^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u\sigma)u\sigma.\theta_{\phi,\sigma^{-1}*\mathcal{S}}\\
&= \frac{1}{N_\mathcal{S}}\sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ \mathcal{S}'\simeq\mathcal{S}}}\sum_{u\in W(\mathcal{S}',\mathcal{S})}\omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(u)u.\theta_{\phi,\mathcal{S}'} = \Gamma(\theta_\phi)_\mathcal{S}.
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

On rappelle que l'on a l'égalité $\psi = \sum_{\nu \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \theta_\nu$. Comme d'après le lemme 6.11, le groupe $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$ agit transitivement sur $\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$ et que Γ est un projecteur d'image $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$, d'après le théorème 5.10, on a

$$\begin{aligned}\psi = \Gamma(\psi) &= \sum_{\nu \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)} \Gamma(\theta_\nu) = \mathrm{Card}\big(\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)\big)\,\Gamma(\theta_\phi)\\ &= \mathrm{Tr}_\phi\Big(\mathrm{Card}\big(\mathrm{Str}^{\max}(\Phi)\big)\,\theta_\phi\Big).\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ∎

Corollaire 6.30 *Soient* G *dans la classe* $\tilde{\mathcal{H}}$ *et* $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. *On suppose que les facteurs simples de* $\mathfrak{g}$ *sont de type* AIII, CII *ou* DIII. *L'application*

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi) &\longrightarrow \mathfrak{I}(\mathfrak{g}),\\ \theta &\longmapsto \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\sigma \in W(\mathfrak{h}_\varnothing)} \sigma.\theta\end{aligned}$$

est définie. Cette application est surjective si et seulement si $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$.

Démonstration Cela découle directement du théorème précédent et du lemme 5.5. ∎

On souhaite à présent montrer que l'on peut prendre la moyenne des éléments de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$ par un groupe plus petit que $W(\mathfrak{h}_\varnothing)$.

Définition 6.31 On pose

$$W'(\mathfrak{h}_\varnothing) = \{w \in W(\mathfrak{h}_\varnothing) \mid w.\alpha \in \Sigma' \;\forall\, \alpha \in \Sigma' \text{ longue}\}.$$

Lemme 6.32 *On suppose* Φ *irréductible. Si* Φ *est de type* AIII *ou* DIII *alors* $W'(\mathfrak{h}_\varnothing) = W(\mathfrak{h}_\varnothing)$. *Si* Φ *est de type* CII *alors*

$$W(\mathfrak{h}_\varnothing) = W'(\mathfrak{h}_\varnothing) \lhd \langle\!\langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \textit{ longue} \rangle\!\rangle.$$

Démonstration Le cas où Φ est de type AIII ou DIII découle directement de la sous-section 1.2. Supposons Φ de type CII. On remarque que les racines longues sont compactes. Avec les notations de la section 1.2, le système de racines Φ^c est de type $\mathrm{C}_p \times \mathrm{C}_{n-p}$. Soit $\mathcal{S}_p$ (resp. $\mathcal{S}_{n-p}$) le groupe des permutations des racines $2e_i$ pour $1 \le i \le p$ (resp. $2e_i$ pour $p+1 \le i \le n$). On a alors

$$W(\Phi^c) = (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_{n-p}) \lhd \langle\!\langle s_{2e_i} \mid 1 \le i \le n \rangle\!\rangle.$$

On observe que $\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_{n-p} \subset W'(\mathfrak{h}_\varnothing)$ et

$$\langle\!\langle s_{2e_i} \mid 1 \le i \le n \rangle\!\rangle \cap W'(\mathfrak{h}_\varnothing) = \{\mathrm{id}\}.$$

On en déduit que $W'(\mathfrak{h}_\varnothing) = \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_{n-p}$. ∎

Proposition 6.33 *Soient* G *dans la classe* $\tilde{\mathcal{H}}''$ *et* $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$*. On suppose que les facteurs simples de* $\mathfrak{g}$ *sont de type* AIII, CII *ou* DIII*. Pour* $\theta \in \mathfrak{I}(\phi)$*, on a :*

$$\mathrm{Tr}_{\phi}(\theta) = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{\sigma \in W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})} \sigma.\theta.$$

Démonstration On peut supposer que Φ est irréductible. Si Φ est de type AIII ou DIII alors le résultat est évident d'après le corollaire 6.30 et le lemme 6.32. On suppose que Φ est de type CII. Soient n le rang de Φ et α une racine longue de Φ. On a alors $\alpha \in \phi^c$ ainsi $s_\alpha.\phi = \phi$ et pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$, on a $s_\alpha * \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\phi)$. Par définition de l'espace $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi)$, on a la relation $\omega_{\mathrm{G}_\phi,\mathcal{S},s_\alpha*\mathcal{S}}(s_\alpha)s_\alpha\phi_{\mathcal{S}} = \phi_{s_\alpha*\mathcal{S}}$ pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. D'après la proposition 6.12 et le lemme 5.15, on a $(s_\alpha\phi)_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S},s_\alpha*\mathcal{S}}(s_\alpha)s_\alpha\phi_{s_\alpha*\mathcal{S}} = \phi_{\mathcal{S}}$. En utilisant le lemme 6.32, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{\mu \in W(\mathfrak{h}_{\varnothing})} \mu.\phi &= \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)\,2^n} \sum_{\substack{\mu_1 \in W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})\\ \mu_2 \in \langle\langle s_\alpha | \alpha \text{ longue}\rangle\rangle}} \mu_1\mu_2.\phi \\ &= \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{\mu_1 \in W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})} \mu_1.\phi.\end{aligned}$$

On en déduit le résultat d'après le corollaire 6.30. ■

Définition 6.34 Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. On pose $W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})^{\phi} = \{w \in W'(\mathfrak{h}_{\varnothing}) \mid w.\phi = \phi\}$ et

$$\mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_\phi) = \{\phi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\phi) \mid w.\phi = \phi \,\forall\, w \in W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})^{\phi}\}.$$

La proposition précédente à le corollaire suivant.

Corollaire 6.35 *Soit* $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$*. L'application* $\mathrm{Tr}_\phi \colon \mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_\phi) \to \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ *est définie. Cette application est surjective si et seulement si* $\phi \in \mathrm{Str}^{\max}(\Phi)$*.*

Dans la partie suivante, on aura aussi besoin du résultat immédiat suivant.

Lemme 6.36 *Soient* $w \in W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})$ *et* $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$*. On a alors* $\omega_{\mathcal{S},w*\mathcal{S}}(w) = \mathrm{sign}(w)$*.*

Démonstration On peut supposer Φ irréductible. Si Φ est au moins de rang 3, alors $\mathcal{S}^\tau = \varnothing$ ainsi $E_{\Phi'}(\mathcal{S}) = \varnothing$. D'après la définition de $W'(\mathfrak{h}_{\varnothing})$, on a

$$\{\alpha \in \mathcal{S} \mid w.\alpha \in -\Sigma\} = \varnothing.$$

On en déduit d'après la proposition 4.36 que l'on a $\omega_{\mathcal{S},w*\mathcal{S}}(w) = \mathrm{sign}(w)$. ■

Partie 4 Application : Une formule de réduction pour l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra

Dans cette section, on étudie l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra pour les paires duales réductives $\big(\mathrm{U}(p,q),\mathrm{U}(r,s)\big)$ et $\big(\mathrm{Sp}(p,q),\mathrm{O}^*(2n)\big)$ avec $p+q=r+s=n$.

7 Paires duales réductives et c-structures

On désigne par $\mathbb{D}$ soit $\mathbb{C}$ soit $\mathbb{H}$ et V un $\mathbb{D}$-espace vectoriel à droite de dimension n. Soit $(\ ,\ )$ une forme non dégénérée hermitienne ou anti-hermitienne sur V. On désigne par G le groupe des isométries associé à $(\ ,\ )$ que l'on note aussi $\mathrm{U}(V)$. On fixe un sous-groupe de Cartan compact de G que l'on note $\mathrm{H}_\varnothing$. On considère la décomposition de V en composantes irréductibles sous l'action de $\mathrm{H}_\varnothing$:

$$V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_n.$$

Les espaces V_i sont des espaces vectoriels de dimension 1 sur $\mathbb{D}$. Soit P une partie de $\{1,\dots,n\}$. On considère le sous-espace $V_P = \bigoplus_{i\in P} V_i$ de V. La forme $(\ ,\ )$ se restreint en une forme non dégénérée sur V_P que l'on note $(\ ,\ )_P$. On considère le sous-groupe $\mathrm{U}(V_P)$ des isométries de V_P pour le produit $(\ ,\ )_P$.

Soit $\phi \in \mathrm{Str}(\Phi)$. Il existe alors une unique partition $\mathrm{A}_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} A_t$ de $\{1,\dots,n\}$ telle que $\mathrm{G}_\phi = \bigtimes_{i=1}^{t} \mathrm{U}(V_{A_i})$. On note Par(G) l'ensemble des partitions de $\{1,\dots,n\}$ associé à une c-structure par l'égalité précédente. On a alors par définition la bijection suivante :

$$P_{\mathrm{G}}\colon\ \mathrm{Str}(\Phi) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Par}(\mathrm{G}),$$
$$\phi \longmapsto (A_1,\dots,A_t).$$

Le groupe G est isomorphe à $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$ ou $\mathrm{O}^*(2n)$ avec $p+q=n$. On en déduit en particulier que $\mathrm{G}\in\tilde{\mathcal{H}}'$ et que l'ordre de Hiraï de $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ est linéaire. De plus, pour $\phi\in\mathrm{Str}(\Phi)$, on a

$$\mathrm{Card}\big(P_{\mathrm{G}}(\phi)\big) = \Big\lfloor \frac{n+1}{2} \Big\rfloor. \tag{7.1}$$

Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels à droite de dimension n sur $\mathbb{D}$. On pose $W=\mathrm{Hom}(V_1,\,V_2)$. On considère sur V_1 et V_2 des structures hermitiennes ou anti-hermitiennes $(\cdot\,,\,\cdot)_1$ et $(\cdot\,,\,\cdot)_2$. On suppose que $(\cdot\,,\,\cdot)_1$ est anti-hermitienne si et seulement si $(\cdot\,,\,\cdot)_2$ est hermitienne. On considère l'application

$$\mathrm{Hom}(V_1,\,V_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_2,\,V_1),$$
$$w \longmapsto w^*$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

telle que $(w^* v_2, v_1)_1 = (v_2, w v_1)_2$ pour tout $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. On pose alors pour $w, w' \in W$, $\langle w, w' \rangle = \mathrm{Tr}(w'^* w)$. Le produit $\langle\, ,\rangle$ définit une structure d'espace symplectique sur l'espace vectoriel réel W. On note $\mathrm{Sp}(W)$ le groupe symplectique associé à $(W, \langle\, ,\,\rangle)$. On note G_i le groupe des isométries associés à $(\, ,\,)_i$. On désigne par $\mathfrak{g}_i$ les algèbres de Lie de G_i. La paire $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ est une paire duale irréductible au sens de Howe du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$. On fixe un sous-groupe de Cartan compact $\mathrm{H}_{i,\varnothing}$ compact de G_i, on pose $\mathfrak{h}_{i,\varnothing} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}_{i,\varnothing})$ et Φ_i le système de racines de $\mathfrak{h}_{i,\varnothing,\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{i,\mathbb{C}}$ pour $i = 1, 2$. On considère la décomposition de V_i en composantes irréductibles sous l'action de $\mathrm{H}_{i,\varnothing}$: $V_i = V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,n}$.

Définition 7.1 Soient $\phi_i \in \mathrm{Str}(\Phi_i)$ pour $i = 1, 2$. Comme d'après l'égalité (7.1), on a $\mathrm{Card}\big(P_{\mathrm{G}_1}(\phi_1)\big) = \mathrm{Card}\big(P_{\mathrm{G}_2}(\phi_2)\big)$, on peut considérer l'ensemble des bijections de $P_{\mathrm{G}_1}(\phi_1)$ dans $P_{\mathrm{G}_2}(\phi_2)$ que l'on note $B(\phi_1, \phi_2)$. Pour $l \in B(\phi_1, \phi_2)$, on considère le sous-espace de W :

$$W_l = \bigoplus_{j \in P_{\mathrm{G}_1}(\phi_1)} \mathrm{Hom}(V_{1,j}, V_{2,l(j)}).$$

On note $\mathrm{Sp}(W_l)$ le groupe symplectique associé à W_l pour la structure symplectique induite par $\langle\, ,\rangle$ sur W_l.

On a alors le résultat suivant.

Lemme 7.2 *Avec les notations de la définition précédente, pour tout $l \in B(\phi_1, \phi_2)$, la paire $(\mathrm{G}_{1,\phi_1}, \mathrm{G}_{2,\phi_2})$ est une paire duale réductive de $\mathrm{Sp}(W_l)$.*

Démonstration On pose $P_{\mathrm{G}}(\phi_i) = (A_{i,1}, \dots, A_{i,n})$ pour $i = 1, 2$. Par définition, la paire de groupes $(\mathrm{G}_{1,\phi_1}, \mathrm{G}_{2,\phi_2})$ est le produit des paires de groupes

$$\big(\mathrm{U}(V_{1,A_{1,j}}), \mathrm{U}(V_{2,A_{2,L(j)}})\big) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n.$$

Le sous-espace $\mathrm{Hom}(V_{2,A_{2,L(i)}}, V_{1,A_{1,i}})$ de W hérite d'une structure symplectique naturelle. D'après [7, §I.1.18], la paire

$$\big(\mathrm{U}(V_{1,A_{1,i}}), \mathrm{U}(V_{2,A_{2,L(i)}})\big) \subset \mathrm{Sp}\big(\mathrm{Hom}(V_{1,A_{1,i}}, V_{2,A_{2,L(i)}})\big)$$

est une paire duale irréductible. On en déduit alors de nouveau [7, §I.1.18] que $(\mathrm{G}_{1,\phi_1}, \mathrm{G}_{2,\phi_2})$ est une paire duale de $\mathrm{Sp}(W_l)$. ∎

Remarque La paire duale réductive $(\mathrm{G}_{1,\phi_1}, \mathrm{G}_{2,\phi_2})$ est en général non irréductible.

8 L'intégrale de Cauchy Harish-Chandra

Dans cette section, on souhaite montrer une formule de réduction de l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra. On désigne par G un groupe de la classe $\mathcal{H}'$ dont les facteurs simples de $\mathfrak{g}$ sont de type AIII, CII ou DIII. On introduit l'espace de fonctions suivant :

Définition 8.1 Soit G un groupe dans la classe $\tilde{\mathcal{H}}'$. On note $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des familles de fonctions $(\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ telles que $\phi_{\mathcal{S}}$ soit une fonction lisse sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{reg}}$ pour tout $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On considère aussi le sous-espace $\hat{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ des familles de fonctions $\phi = (\phi_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})}$ qui vérifient $u.\phi_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(u)\phi_{\mathcal{S}'}$ pour $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}$ et $u \in W(\mathcal{S},\mathcal{S}')$.

8.1 Pour une sous-algèbre de Cartan compacte

La définition de **Chc** pour une sous-algèbre de Cartan elliptique fait intervenir certaines fonctions polynomiales (*cf.* [8, théorème 10.19]). On s'intéresse tout d'abord à expliciter ces fonctions polynomiales. Il s'agit de généraliser la proposition 2.1 de [1] pour les systèmes de racines de type D_n et C_n.

Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels $n' \leq n$. On pose $\mathcal{I} = \{1,\dots,n\}$ et $\mathcal{J} = \{1,\dots,n'\}$. On désigne par $F(n,n')$ l'ensemble des couples d'applications (L,ϵ) où L est une application $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{I}$ et ϵ est une application de $\mathcal{J}$ dans $\{\pm 1\}$. On pose $F(n) = F(n,n)$. Pour $x \in \mathbb{C}^n$ (resp. $x' \in \mathbb{C}^{n'}$), on pose :

$$\pi(x) = \begin{cases} \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i \pm x_j) & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases},$$

$$\pi'(x') = 2^{n'} \sum_{1\leq i\leq n'} x'_i \sum_{1\leq i<j\leq n'} (x'_i \pm x'_j),$$

$$Q_{L,\epsilon}(x,x') = \prod_{\substack{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J},\eta\in\{\pm1\} \\ i\neq L(j) \\ i=L(j) \text{ et } \eta\neq\epsilon(j)}} (x_i + \eta x'_j),$$

où $(L,\epsilon) \in F(n,n')$. On dit que (L,ϵ) est une injection si l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\longrightarrow \mathcal{I} \times \{\pm 1\}, \\ i &\longmapsto \big(L(i), \epsilon(i)\big) \end{aligned}$$

est injective. Si $\mathbb{K}$ désigne un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par $\mathbb{K}[x]$ (resp. $\mathbb{K}(x)$) l'algèbre des fonctions polynomiales (resp. des fractions rationnelles) à coefficient dans $\mathbb{K}$ en $(x_i)_{1\leq i\leq n}$. Pour tout ensemble fini E, $\mathcal{S}(E)$ désigne le groupe des permutations de E. Dans la suite de cette sous-section, (L,ϵ) désignera toujours un élément de $F(n,n')$. On pose aussi :

$$\sigma(L) = (-1)^{\mathrm{Card}\{(i,j)\in\mathcal{J}\times\mathcal{J} \mid i<j,\, L(i)>L(j)\}}, \quad \eta(L) = (-1)^{\mathrm{Card}\{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I} \mid j\in \mathrm{im}(L),\, j<i\}},$$

où $\mathrm{im}(L)$ représente l'image de L.

Remarque Si $n = n'$ et L est une application bijective de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$ alors $\sigma(L)$ est la signature de L au sens habituel.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Proposition 8.2 *Il existe une unique famille de fonctions polynomiales $(P_{L,\epsilon})_{(L,\epsilon)}$ de $\mathbb{R}[x]$ indexée sur l'ensemble des éléments (L,ϵ) de $F(n,n')$ tels que (L,ϵ) est une injection vérifiant :*

$$\pi(x)\pi'(x') = \sum_{\substack{(L,\epsilon)\in F(n,n') \\ (L,\epsilon)\ \textit{injective}}} P_{L,\epsilon}(x) Q_{L,\epsilon}(x,x') \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n,\ x' \in \mathbb{C}^{n'}.$$

On a de plus la propriété suivante :

$$P_{L,\epsilon}(x) = \sigma(L)\eta(L) \prod_{\substack{1\leq i<j\leq n \\ i,j\notin \mathrm{im}(L)}} (x_i - x_j),$$

où x'_L est l'élément de $\mathbb{C}^{n'}$ définit par $(x'_L)_i = x_{L(i)}$ pour $i \in \mathcal{J}$.

Démonstration La démonstration est directe. ∎

Corollaire 8.3 *Si $n = n'$, on a $P_{L,\epsilon} = \sigma(L)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j\in\mathcal{J}} \epsilon(j)$.*

On considère la paire duale $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ introduite dans la sous-section précédente. On pose

$$\mathcal{I}_{\mathbb{D}} = \begin{cases} \mathcal{I} \times \{\pm 1\} & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{H}, \\ \mathcal{I} & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

et $F_{\mathbb{D}}$, l'ensemble des injections de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}_{\mathbb{D}}$. Si $\mathbb{D} = \mathbb{H}$, l'ensemble $F_{\mathbb{H}}$ s'identifie canoniquement avec $F(n)$. Soient $i, j \in \mathcal{I}$. Si $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, l'espace $\mathrm{Hom}(V_{1,i}, V_{2,j})$ est un espace vectoriel réel irréductible sous l'action de $\mathrm{H}_{1,\varnothing} \times \mathrm{H}_{2,\varnothing}$. On pose

$$W_{i,j} = \mathrm{Hom}(V_{1,i}, V_{2,j}).$$

Si $\mathbb{D} = \mathbb{H}$, l'espace vectoriel réel $\mathrm{Hom}(V_{1,i}, V_{2,j})$ est non irréductible sous l'action de $\mathrm{H}_{1,\varnothing} \times \mathrm{H}_{2,\varnothing}$. Il a deux composantes irréductibles $W_{i,j,\pm}$. On a ainsi l'égalité :

$$\mathrm{Hom}(V_{1,i}, V_{2,j}) = W_{i,j,-} \oplus W_{i,j,+}.$$

Pour $\mathbb{D} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, on obtient que la décomposition de W en $\mathbb{R}$-modules irréductibles sous l'action de $\mathrm{H}_{1,\varnothing} \times \mathrm{H}_{2,\varnothing}$ est $W = \bigoplus_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}_{\mathbb{D}}} W_{i,j}$. Sur $\mathfrak{h}_{2,\varnothing}$, il existe des coordonnées x_i pour $1 \leq i \leq n$ tels que $x|_{V_{1,i}} = ix_i$ pour $x \in \mathfrak{h}_{2,\varnothing}$. On note H_i la base de $\mathfrak{h}_{2,\varnothing}$ associée à ces coordonnées. On note p la projection canonique de $\mathcal{I}_{\mathbb{D}}$ dans $\mathcal{I}$. Pour $M \in F_{\mathbb{D}}(n)$ et $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_2)$, on pose

$$y_{\mathcal{S}}^M = \sum_{\substack{j\in\mathcal{I} \\ \alpha(H_{p(M(j))})=0\,\forall\,\alpha\in\mathcal{S}}} \mathrm{sign}\langle H_{p(M(j))}, \rangle|_{W_{j,M(j)}} H_{p(M(j))}$$

Définition 8.4 Soient $\nu_i \in \mathrm{Str}(\Phi_i)$ pour $i = 1, 2$ et $l \in \mathrm{B}(\nu_1, \nu_2)$. On pose

$$F_{\mathbb{D}}(\nu_1, \nu_2, l) = \{M \in F_{\mathbb{D}} \mid p \circ M(A) = l(A)\,\forall\, A \in P_{\mathrm{G}_1}(\nu_1)\}.$$

On a alors pour $\nu_2 \in \mathrm{Str}(\Phi_2)$, la réunion disjointe suivante :

$$F_{\mathbb{D}} = \dot{\bigcup_{\substack{\nu_1 \in \mathrm{Str}(\Phi_1) \\ l \in \mathrm{B}(\nu_1, \nu_2)}}} F_{\mathbb{D}}(\nu_1, \nu_2, l). \tag{8.1}$$

Comme dans le cas étudié ici, les groupes G_1 et G_2 ont le même rang, les fonctions polynomiales nécessaires pour définir **Chc** sont des constantes. Plus, précisément d'après le corollaire 8.3 et la proposition 2.1 de [1], on a pour $M \in F_{\mathbb{D}}(n)$:
(8.2)

$$P_M = \begin{cases} \sigma(L)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i \in \mathcal{I}} \epsilon(i) & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{H}, M = (L, \epsilon) \text{ et } \mathrm{G}_2 \text{ est de type DIII}, \\ \sigma(L)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{H}, M = (L, \epsilon) \text{ et } \mathrm{G}_2 \text{ est de type CII}, \\ \sigma(M)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

La deuxième égalité se déduit facilement de la démonstration de la proposition 8.2; il suffit d'échanger les rôles de π' et π. Pour $M \in F_{\mathbb{D}}$, on pose pour $x_i \in \mathfrak{h}_{i,\varnothing,\mathbb{C}}$ avec $i = 1, 2$

$$\mathrm{chc}^M(x_1 + x_2) = \frac{i^n}{\prod_{i \in \mathcal{I}} \det_{W_{i,M(i)}}(x_1 + x_2)},$$

et pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_1)$, on pose $\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}} = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}} \mid \alpha(x) > 0 \, \forall \, \alpha \in \mathcal{S}\}$. Soit

$$\check{\Delta}(\mathfrak{g}) = \{\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid w.\alpha \in \Sigma \, \forall \, w \in W'(\mathfrak{h}_{\varnothing}), \alpha \in \mathcal{S}\}.$$

On obtient aisément le résultat suivant.

Lemme 8.5 *On suppose Φ irréductible. Si Φ est de type* AIII *ou* DIII *alors $\check{\Delta}(\mathfrak{g}) = \Delta(\mathfrak{g})$. Si Φ est de type* CII *alors pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, il existe $\mathcal{S}' \in \Delta^+(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$; de plus, on a*

$$\mathrm{Card}\{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}\} = 2^{\mathrm{Card}(\mathcal{S})} \, \mathrm{Card}\{\mathcal{S}' \in \check{\Delta}(\mathfrak{g}) \mid \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}\}.$$

Le lemme précédent permet d'obtenir la version suivante de la formule d'intégration de Weyl. On utilise les notations de [8, §10].

Lemme 8.6 *Soit $\phi \in \mathcal{C}(\mathfrak{g})$. On a alors*

$$\int_{\mathfrak{g}} \phi(x) \, dx = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\varnothing})\big)} \sum_{\mathcal{S} \in \check{\Delta}(\mathfrak{g})} f(\mathcal{S}) \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} \pi_{\mathfrak{h}_{\varnothing}} \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) \psi_{\mathcal{S}}(x) dx_{\mathcal{S}},$$

où $f(\mathcal{S}) = 2^{\mathrm{Card}(\mathcal{S} \cap \Psi)}$ et Ψ est la réunion des composantes de type CII *de Φ.*

Démonstration Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on pose

$$n_{\mathcal{S}} = \frac{\mathrm{Card}\{\sigma|_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^-} \mid \sigma \in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\}}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\big)}.$$

Comme on a $\mathcal{S}^\tau = \varnothing$, d'après la proposition 4.11, on a

$$\mathrm{Card}\{\sigma|_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^-} \mid \sigma \in W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}})\} = \mathrm{Card}(\mathcal{S})!\, 2^{\mathrm{Card}(\mathcal{S})}.$$

D'après la proposition 4.11, on a

$$\mathrm{Card}\, W(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}) = \mathrm{Card}\big(W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}})\big)\ \mathrm{Card}(\mathcal{S})!\, 2^{\mathrm{Card}(F_\Phi(\mathcal{S}))}$$

On en déduit que

$$n_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}})\big)\, 2^{F_\Phi(\mathcal{S})\setminus\mathcal{S}}}. \tag{8.3}$$

On a ensuite

$$\mathrm{Card}\{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}\} = \frac{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)}{\mathrm{Card}\big(W(\bar{\Phi}^c_{\mathcal{S}})\big)\ \mathrm{Card}(\mathcal{S})!\, 2^{\mathrm{Card}(F_\Phi(\mathcal{S}))\setminus\mathcal{S}}}. \tag{8.4}$$

Pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$, on note $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^+ = \mathfrak{t}_{\mathcal{S}} + \mathfrak{a}_{\mathcal{S}}^+$ où $\mathfrak{t}_{\mathcal{S}}$ est la partie compacte de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$, $\mathfrak{a}_{\mathcal{S}}$ est la partie déployée de $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ et $\mathfrak{a}_{\mathcal{S}}^+$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}_{\mathcal{S}}$ telle que pour $x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{S}}^+$, on ait $\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) > 0$. D'après [8, (10.17)], on a

$$\int_{\mathfrak{g}} \phi(x)\, dx = \sum n_{\mathcal{S}} \int_{\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}^+} \pi_{\mathfrak{h}_\varnothing} \circ c_{\mathcal{S}}^{-1} \psi_{\mathcal{S}}\, dx_{\mathcal{S}},$$

où la somme est sur un système de représentants de $\Delta(\mathfrak{g})$. En utilisant les égalités (8.3) et (8.4), la formule précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{g}} \phi(x)\, dx &= \sum \frac{n_{\mathcal{S}}}{\mathrm{Card}(\mathcal{S})!} \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} \pi_{\mathfrak{h}_\varnothing} \circ c_{\mathcal{S}}^{-1} \psi_{\mathcal{S}}\, dx_{\mathcal{S}} \\
&= \sum_{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})} \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} \pi_{\mathfrak{h}_\varnothing}(x) \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) \psi_{\mathcal{S}}\, dx_{\mathcal{S}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\mathcal{S}\in\check{\Delta}(\mathfrak{g})} f(\mathcal{S}) \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} \pi_{\mathfrak{h}_\varnothing} \circ c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) \psi_{\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}}.
\end{aligned}$$

Le lemme est démontré. ■

Dans [8], l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra (**Chc**) est définie comme une application de $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_1)$ (l'espace des fonctions test de $\mathfrak{g}_1$) dans l'ensemble des fonctions définies sur l'ouvert des éléments semi-simple réguliers de $\mathfrak{g}_2$ invariante par le groupe G_2 (cf. définition 1.9 de [8]). D'après le théorème 10.19 et la proposition 11.14 de [8], **Chc** se factorise naturellement en une application de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_1)$ dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_2)$. On note aussi cette application **Chc**. On obtient le lemme suivant.

Lemme 8.7 *Soient* $\phi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_1)$ *et* $x_1 \in \mathfrak{h}_{1,\varnothing}^{\mathrm{reg}}$. *On a*

$$\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2,W}(\phi)_\varnothing(x_1) = C_W \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\check{\Delta}(\mathfrak{g})\\ M\in F_{\mathrm{D}}}} f(\mathcal{S}) \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} P_M \operatorname{chc}^M(c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) + ity_{\mathcal{S}}^M + x_1)\phi_{\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}},$$

où

$$C_W = \frac{(2i)^{\dim_{\mathbb{R}}(W)}\big(\operatorname{sign}(V_1)\operatorname{sign}(V_2)\big)^n}{\operatorname{Card}\big(W(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)}.$$

Remarque L'exposant W signifie que la paire $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ est une paire duale du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$.

Définition 8.8 On note $\mathrm{Str}^c(\Phi)$ le sous-ensemble des éléments $\nu \in \mathrm{Str}(\Phi)$ tels que si on pose $P_{\mathrm{G}}(\nu) = (A_1, \dots, A_p)$. Alors, quitte à réindexer les A_i, on ait :

(8.5) $$\alpha \in A_i, \beta \in A_j \text{ et } i < j \text{ impliquent } \alpha < \beta.$$

On pose $\mathrm{Str}^{\max,c}(\Phi) = \mathrm{Str}^{\max}(\Phi) \cap \mathrm{Str}^c(\Phi)$.

On obtient aisément le résultat suivant.

Lemme 8.9 *On a* $\mathrm{Str}^{\max,c}(\Phi) \neq \varnothing$.

Définition 8.10 Soient $\nu_1 \in \mathrm{Str}(\Phi_1)$, $\nu_2 \in \mathrm{Str}^c(\Phi_2)$ et $l \in \mathrm{B}(\nu_1, \nu_2)$. On considère la partition $(A_1, \dots, A_m)$ associée à ν_2 vérifiant la propriété (8.5). On pose $l^{-1}(A_i) = B_i$ pour $1 \le i \le m$ et on pose

$$\Gamma(\nu_1, \nu_2, l) = \prod_{1\le i<j\le m} (-1)^{\operatorname{Card}\{(\beta',\beta'')B_i\times B_j \mid \beta'>\beta''\}}.$$

Théorème 8.11 *Soient* $\nu_2 \in \mathrm{Str}^{\max,c}(\Phi_2)$ *et* $\psi \in \mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_{\nu_2})$. *On a alors*

$$\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2,W}\big(\mathrm{Tr}_{\nu_2}(\psi)\big)_\varnothing = \sum_{\substack{\nu_1\in\mathrm{Str}(\Phi_1)\\ l\in\mathrm{B}(\nu_1,\nu_2)}} \frac{C_W \Gamma(\nu_1,\nu_2,l)}{C_{W_l}} \mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_{1,\nu_1},\mathrm{G}_{2,\nu_2},W_l}(\psi)_\varnothing.$$

Démonstration On pose

$$\theta = \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)} \mu.\psi.$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2,W}(\theta)_\varnothing(x_1) = \frac{C_W}{\operatorname{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)} \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ M\in F_{\mathrm{D}}}} f(\mathcal{S}) \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} P_M \operatorname{chc}^M(c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) + ity_{\mathcal{S}}^M + x_1)\mu\,.\,\psi_{\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Si on considère l'action de $W'(\mathfrak{h}_\varnothing)$ sur l'ensemble des racines longues de Σ', le groupe $W'(\mathfrak{h}_\varnothing)$ s'identifie naturellement à un sous-groupe du groupe des permutations de Σ'. On considère l'action suivante de $W'(\mathfrak{h}_\varnothing)$ sur $F_{\mathbb{D}}$. Soient $M \in F_{\mathbb{D}}$ et $\mu \in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)$. Si $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, on pose $\mu.M = \mu \circ M$. Si $\mathbb{D} = \mathbb{H}$, $M = (L, \epsilon)$ et on pose $\mu.M = (\mu \circ L, \epsilon)$. On rappelle que l'on a les relations suivantes :

$$(\mu.\psi)_{\mathcal{S}} = \omega_{\mu^{-1}*\mathcal{S},\mathcal{S}}(\mu)\mu.\psi_{\mu^{-1}*\mathcal{S}} \quad \text{et} \quad (y_{\mathcal{S}}^{M})_{M(i)} = (y_{\mu^{-1}*\mathcal{S}}^{\mu^{-1}.M})_{\mu^{-1}.M(i)}$$

(*cf.* [8, (10.18)])

On en déduit que l'on a la relation

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Chc}^{G_1,G_2}(\theta)_\varnothing(x_1)\\
&= \frac{C_W}{\mathrm{Card}(W'(\mathfrak{h}_\varnothing))} \sum_{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)} \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ M\in F_{\mathbb{D}}}} f(\mathcal{S})\\
&\qquad \times \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \omega_{\mathcal{S},\mu*\mathcal{S}}(\mu) \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} P_M\, \mathrm{chc}^M(c_{\mathcal{S}}^{-1}(\mu(x)) + ity_{\mathcal{S}}^M + x_1)\mu.\psi_{\mu^{-1}*\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}}\\
&= \frac{C_W}{\mathrm{Card}(W'(\mathfrak{h}_\varnothing))} \sum_{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)} \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ M\in F_{\mathbb{D}}}} f(\mathcal{S})\\
&\qquad \times \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \omega_{\mathcal{S},\mu*\mathcal{S}}(\mu) \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mu^{-1}*\mathcal{S}}} P_M\, \mathrm{chc}^{\mu^{-1}M}\big(c_{\mu^{-1}*\mathcal{S}}^{-1}(x) + ity_{\mu^{-1}*\mathcal{S}}^{\mu^{-1}M} + x_1\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \psi_{\mu^{-1}*\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mu^{-1}*\mathcal{S}}\\
&= \frac{C_W}{\mathrm{Card}(W'(\mathfrak{h}_\varnothing))} \sum_{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)} \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ M\in F_{\mathbb{D}}}} f(\mathcal{S})\\
&\qquad \times \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \omega_{\mathcal{S},\mu*\mathcal{S}}(\mu) \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} P_{\mu M}\, \mathrm{chc}^M\big(c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) + ity_{\mathcal{S}}^M + x_1\big)\, \psi_{\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}}.
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que l'on a $P_{\mu M} = \sigma(\mu)P_M$ d'après l'égalité (8.2) et

$$\omega_{\mathcal{S},\mu*\mathcal{S}}(\mu) = \mathrm{sign}(\mu) = \sigma(\mu)$$

d'après le lemme 6.36, ainsi l'expression précédente s'écrit :

$$C_W \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ M\in F_{\mathbb{D}}}} f(\mathcal{S}) \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} P_M\, \mathrm{chc}^M\big(c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) + ity_{\mathcal{S}}^M + x_1\big)\, \psi_{\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}}.$$

Cette dernière expression peut s'écrire d'après l'égalité (8.1) :

$$C_W \sum_{\substack{\nu_1\in\mathrm{Str}(\Phi_1)\\ l\in\mathcal{B}ij(\nu_1,\nu_2)}} \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})\\ M\in F_{\mathbb{D}}(\nu_1,\nu_2,l)}} f(\mathcal{S}) \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} P_M\, \mathrm{chc}^M\big(c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) + ity_{\mathcal{S}}^M + x_1\big)\, \psi_{\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-049-x Published online by Cambridge University Press

Pour $M \in F_{\mathbb{D}}(\nu_1, \nu_2, l)$, on désigne par $\sigma_{\nu_1,\nu_2,l}(p \circ M)$ le produit des signatures de $p \circ M|_A$ pour $A \in P_{G_2}(\nu_2)$. On pose $P_{G_2}(\nu_2) = (A_1, \dots, A_n)$ et $P_{G_1}(\nu_1) = (B_1, \dots, B_n)$ avec $l(B_i) = A_i$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. Comme $\nu_2 \in \mathrm{Str}^{\max,c}(\Phi)$, on peut supposer que l'on a de plus $\alpha \in A_i, \beta \in A_j$ avec $i < j$ impliquent $\alpha < \beta$. On en déduit la relation

$$\sigma_{\nu_1,\nu_2,l}(L) = \sigma(L)(-1)^{\mathrm{Card}\{(\beta',\beta'')\in B_i\times B_j | i>j \text{ et } \beta'>\beta''\}}.$$

Soit $(P_M^{\nu_1,\nu_2,l})_M$ la famille de fonctions polynomiales permettant de définir

$$\mathbf{Chc}^{G_{1,\nu_1},G_{2,\nu_2},W_l}.$$

D'après l'égalité (8.2), on a les expressions suivantes :

$$P_M^{\nu_1,\nu_2,l} = \begin{cases} \sigma_{\nu_1,\nu_2,l}(L)(-1)^{n-\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \prod_{i\in\mathcal{I}} \epsilon(i) & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{H}, M = (L,\epsilon) \\ & \quad \text{et } G_2 \text{ est de type DIII}, \\ \sigma_{\nu_1,\nu_2,l}(L)(-1)^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{H}, M = (L,\epsilon) \\ & \quad \text{et } G_2 \text{ est de type CII}, \\ \sigma_{\nu_1,\nu_2,l}(M)(-1)^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} & \text{si } \mathbb{D} = \mathbb{C}\ (G_2 \text{ est de type AIII}). \end{cases}$$

Comme $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \frac{n(n+1)}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \frac{n(n-1)}{2} = 0 \mod 2$, on en déduit que

$$P_M^{\nu_1,\nu_2,l} = P_M \Gamma(\nu_1, \nu_2, l).$$

On peut remarquer que les fonctions f et $f_{G_{\nu_2}}$ coïncident, cela permet d'obtenir l'égalité :

$$\begin{aligned} &\mathbf{Chc}^{G_{1,\nu_1},G_{2,\nu_2},W_l}(\psi)_{\varnothing}(x_1) \\ &\quad = \Gamma(\nu_1,\nu_2,l) C_{W_l} \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g}_{1,\nu_1}) \\ M\in\mathcal{B}ij(\phi_1,\phi_2,l)}} f(\mathcal{S}) \sum_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{\check{\mathfrak{h}}_{\mathcal{S}}} P_M \,\mathrm{chc}^M\big(c_{\mathcal{S}}^{-1}(x) + ity_{\mathcal{S}}^M + x_1\big) \\ &\qquad\qquad \times \psi_{\mathcal{S}}(x)\, dx_{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

On en déduit la relation

$$\mathbf{Chc}^{G_1,G_2,W}(\theta)_{\varnothing}(x_1) = \sum_{\substack{\nu_1\in\mathrm{Str}(\Phi_1)\\ l\in \mathrm{B}(\nu_1,\nu_2)}} \frac{C_W \Gamma(\nu_1,\nu_2,l)}{C_{W_l}} \mathbf{Chc}^{G_{1,\nu_1},G_{2,\nu_2},W_l}(\psi)_{\varnothing}(x_1).$$

On a montré le résultat. ■

On souhaite étendre la formule de réduction de **Chc** du théorème précédent pour les sous-algèbres de Cartan non compactes. On fixe un élément $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On considère la décomposition $H_{\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}} T_{\mathcal{S}}$ où $A_{\mathcal{S}}$ (resp. $T_{\mathcal{S}}$) est la partie déployée (resp. compacte) de $H_{\mathcal{S}}$. On note Φ_1' un clôture pleine de Φ_1. Suivant la sous-section 1.2, on fixe un ordre Σ_1' sur Φ_1'. On observe ensuite qu'il existe une involution Σ'-admissible τ telle que $\mathcal{S}^\tau = \varnothing$ pour $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_1)$. Si Φ_1 est de rang au moins 3 ou de type AIII, cela est clair. Si Φ est de rang 2, on a Φ de type B_2 et les racines courtes sont les racines non compactes; il suffit que τ laisse fixe les racines longues. On fixe une telle application.

Définition 8.12 On pose $V^{\mathcal{S}} = \{v \in V \mid a.v = v \forall a \in A_{\mathcal{S}}\}$. On désigne par $G^{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathfrak{g}^{\mathcal{S}}$) le groupe (resp. l'algèbre de Lie) associé à l'espace $V^{\mathcal{S}}$.

Le groupe $T_{\mathcal{S}}|_{V^{\mathcal{S}}}$ est un sous-groupe de Cartan compact de $G^{\mathcal{S}}$. On pose $H^{\mathcal{S}}_{\varnothing} = T_{\mathcal{S}}|_{V^{\mathcal{S}}}$ et $\mathfrak{h}^{\mathcal{S}}_{\varnothing} = \mathfrak{t}_{\mathcal{S}}|_{V^{\mathcal{S}}}$. Le système de racines de $\mathfrak{h}^{\mathcal{S}}_{\varnothing}$ s'identifie canoniquement à $\bar{\Phi}_{\mathcal{S}}$. Pour $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})$, on a l'injection canonique suivante : $\mathfrak{a}_{\mathcal{S}} \oplus \mathfrak{h}^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}'} \hookrightarrow \mathfrak{h}_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}$. Pour $\mathcal{S}_1 \in \Delta(\mathfrak{g}')$ tel que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}_1) = \mathrm{Card}(\mathcal{S})$, on désigne par $\mu(\mathcal{S}_1, \mathcal{S})$ un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{a}_{\mathcal{S}_1,\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{a}_{\mathcal{S},\mathbb{C}}$ tel qu'il existe une bijection μ de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}$ vérifiant $\mu(\mathcal{S}_1, \mathcal{S})(H_\alpha) = H_{\mu(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_1$. Pour $x \in \mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$, on pose $x = x_s + x_c$ avec $x_s \in \mathfrak{a}_{\mathcal{S}}$ et $x_c \in \mathfrak{t}_{\mathcal{S}}$.

Définition 8.13 Soit $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g})$. On a $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}}) = \{\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \mathcal{S} \dot{\cup} \mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g})\}$. Pour $\phi \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$, on pose pour $z \in \mathfrak{a}_{\mathcal{S}}$, $y \in \mathfrak{h}^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}'}$ régulier et $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})$

$$\phi^{\mathcal{S}}_{z,\mathcal{S}'}(y) = \phi_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(z + y)$$

et on désigne par $\phi^{\mathcal{S}}$ la famille de fonctions $(\phi^{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}'\in\Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})}$. Pour $\mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})$, on pose

$$\begin{aligned} W_{G^{\mathcal{S}}}(\mathcal{S}', \mathcal{S}'') &= \{u \colon \mathfrak{h}_{\mathcal{S}'} \to \mathfrak{h}_{\mathcal{S}''} \mid \text{il existe } g \in G^{\mathcal{S}} \text{ tel que } u = \mathrm{Ad}(g).\} \\ &\subset W_G(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}', \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'') \end{aligned}$$

pour $u \in W_{G^{\mathcal{S}}}(\mathcal{S}', \mathcal{S}'')$. On note $\omega_{G^{\mathcal{S}},\mathcal{S}',\mathcal{S}''}$ la fonction définie sur $W_{G^{\mathcal{S}}}(\mathcal{S}', \mathcal{S}'')$ relativement au groupe $G^{\mathcal{S}}$, définition 3.6.

Proposition 8.14 *Soient* $\mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})$ *tels que* $\mathcal{S}' \overset{G_{\mathcal{S}}}{\simeq} \mathcal{S}''$. *On a alors* $\mathcal{S}' \cup \mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'' \cup \mathcal{S}$ *et*

$$\omega_{G,\mathcal{S}'\cup\mathcal{S},\mathcal{S}''\cup\mathcal{S}}|_{W_{G^{\mathcal{S}}}(\mathcal{S}',\mathcal{S}'')} = \omega_{G^{\mathcal{S}},\mathcal{S}',\mathcal{S}''}. \tag{8.6}$$

L'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathfrak{I}(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}}), \\ \phi &\longmapsto \phi^{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

est définie.

Démonstration Soient $\mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})$ tels que $\mathcal{S}' \overset{G^{\mathcal{S}}}{\simeq} \mathcal{S}''$. Comme $W(\mathfrak{h}^{\mathcal{S}}_{\varnothing}) \subset W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$, on a alors $\mathcal{S}' \cup \mathcal{S} \overset{G}{\simeq} \mathcal{S}'' \cup \mathcal{S}$. Soit $w \in W(\mathfrak{h}^{\mathcal{S}}_{\varnothing})$ tel que $w * \mathcal{S}' = \mathcal{S}''$. On a alors $w * (\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}) = \mathcal{S}'' \cup \mathcal{S}$. D'après la définition 4.33, on a $E_{\Phi'_{\mathcal{S}}}(\mathcal{S}') = E_{\Phi'}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}') = \varnothing$. La fonction sign sur $W(\mathfrak{h}_{\varnothing,\mathcal{S}})$ est la restriction de la fonction sign sur $W(\mathfrak{h}_{\varnothing})$. On en déduit d'après la proposition 4.36 que l'on a

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{S}'\cup\mathcal{S},\mathcal{S}''\cup\mathcal{S}}(w) &= \mathrm{sign}(w)(-1)^{\mathrm{Card}\{\alpha\in\mathcal{S}'\cup\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}'\cup\mathcal{S}^{\tau}\mid w.\alpha\in-\Sigma\}} \\ &= \mathrm{sign}(w)(-1)^{\mathrm{Card}\{\alpha\in\mathcal{S}'\cup\mathcal{S}\mid w.\alpha\in-\Sigma\}} = \omega_{\mathcal{S}',\mathcal{S}''}(w). \end{aligned}$$

On considère à présent $u \in W_{G^{\mathcal{S}}}(\mathcal{S}', \mathcal{S}')$ et l'application

$$p_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} \colon W_{G^{\mathcal{S}}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}'} \longrightarrow W\left(\overline{(\overline{\Phi}_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}'}}\right), \qquad u \longmapsto u|_{\overline{(\overline{\Phi}_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}'}}}.$$

On observe que l'on a $\overline{(\overline{\Phi}_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}'}} = \overline{\Phi_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}}$. On en déduit que $p_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} = p_{\mathcal{S}}|_{\overline{\Phi}_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\mathrm{Card}\{\alpha\in\tau(\mathcal{S}\cup\mathcal{S}')\cap\Phi^c | u.\alpha\in-\tau(\mathcal{S}\cup\mathcal{S}')\cap\Phi^c\}}\\
&\quad = (-1)^{\mathrm{Card}\{\alpha\in\tau(\mathcal{S}')\cap\Phi^c | u.\alpha\in-\tau(\mathcal{S}')\cap\Phi^c\}}\\
&\quad = (-1)^{\mathrm{Card}\{\alpha\in\tau_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}')\cap\Phi^{\mathcal{S},c} | u.\alpha\in-\tau_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}')\cap\Phi^{\mathcal{S},c}\}}.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 4.32 et les égalités précédentes, on obtient :

$$\omega_{G,\mathcal{S}'\cup\mathcal{S},\mathcal{S}''\cup\mathcal{S}}(u) = \omega_{G^{\mathcal{S}},\mathcal{S}',\mathcal{S}''}(u)$$

et l'égalité (8.6) est prouvée. On en déduit aisément que $\phi^{\mathcal{S}} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})$. ∎

Soient $\nu \in \mathrm{Str}(\Phi)$ et $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\nu)$, on pose

$$A(\nu, \mathcal{S}) = \frac{\mathrm{Card}\{w \in W'(\mathfrak{h}_\varnothing) \mid w * \mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\nu)\}}{\mathrm{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)}.$$

Proposition 8.15 *Soient $\nu \in \mathrm{Str}(\Phi)$, $\phi \in \mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_\nu)$, $z \in \mathfrak{a}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S} \in \Delta(\mathfrak{g}_\nu)$. On a alors $\phi_z^{\mathcal{S}} \in \mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_\nu^{\mathcal{S}})$ et on la relation*

$$\mathrm{Tr}_\nu(\phi)_z^{\mathcal{S}} = A(\nu, \mathcal{S})\,\mathrm{Tr}_{\nu^{\mathcal{S}}}(\phi_z^{\mathcal{S}}).$$

Remarque Comme $(\mathfrak{g}_\nu)^{\mathcal{S}} = (\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})_{\nu^{\mathcal{S}}}$, la notation $\mathfrak{g}_\nu^{\mathcal{S}}$ est sans ambiguïté. L'égalité précédente montre que le transfert et l'induction commutent.

Démonstration D'après le lemme précédent, on a $\phi^{\mathcal{S}} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_\nu^{\mathcal{S}})$. Soient $\mathcal{S}' \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathcal{S}})$ et $w \in W'(\mathfrak{h}_\varnothing^{\mathcal{S}})$. On observe que l'on a l'inclusion $W'(\mathfrak{h}_\varnothing^{\mathcal{S}}) \subset W'(\mathfrak{h}_\varnothing)$. En utilisant la proposition 8.14, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(w.\phi_z^{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}'} &= \omega_{G^{\mathcal{S}},w^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}'}(w) w.\phi_{\mathcal{S}\cup w^{-1}*\mathcal{S}'}(z + \cdot\,)\\
&= \omega_{G,\mathcal{S}\cup w^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(w) w.\phi_{\mathcal{S}\cup w^{-1}*\mathcal{S}'}(z + \cdot\,)\\
&= \phi_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(z + \cdot\,) = \phi_{z,\mathcal{S}'}^{\mathcal{S}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\phi_z^{\mathcal{S}} \in \mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_\nu^{\mathcal{S}})$ et la première partie de la proposition est démontrée. Ensuite, on a

(8.7)

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_\nu(\phi)^{\mathcal{S}}_{z,\mathcal{S}'} &= \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)} (\mu.\phi)_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(z+.)\\ &= \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)} \omega_{\mu^{-1}*(\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'),\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(\mu)\mu.\phi_{\mu^{-1}*(\mathcal{S}\cup\mathcal{S}')}(z+.)\\ &= \frac{1}{\operatorname{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\substack{\mathcal{S}_1\in\Delta(\mathfrak{g}_\nu)\\ \mathcal{S}_1\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)*\mathcal{S}}} \sum_{\substack{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\\ \mu^{-1}*\mathcal{S}=\mathcal{S}_1}}\\ &\qquad\qquad \omega_{\mathcal{S}_1\cup\mu^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(\mu)\mu.\phi_{\mathcal{S}_1\cup\mu^{-1}*\mathcal{S}'}(z+.)\end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathcal{S}_1$ qui apparant dans l'expression précédente, on fixe un élément $j_{\mathcal{S}_1} \in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)$ tel que $j_{\mathcal{S}_1} * \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$. Grâce à la proposition 4.11, on a les égalités :

$$\begin{aligned}\{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing) \mid \mu*\mathcal{S}_1=\mathcal{S}\} &= j_{\mathcal{S}_1}\{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid \mu*\mathcal{S}_1=\mathcal{S}_1\}\\ &= j_{\mathcal{S}_1}W'(\mathfrak{h}_\varnothing^{\mathcal{S}_1})\langle\!\langle w_{\alpha,\beta}\mid \alpha,\beta\in\mathcal{S}_1\rangle\!\rangle.\end{aligned}$$

Soient $\mu_1 \in W'(\mathfrak{h}_\varnothing^{\mathcal{S}_1})$ et $\mu_2 \in \langle\!\langle w_{\alpha,\beta} \mid \alpha,\beta\in\mathcal{S}_1\rangle\!\rangle$. On pose $\mu = j_{\mathcal{S}_1}\mu_1\mu_2$. On a alors en utilisant le lemme 6.36

$$\begin{aligned}\omega_{G,\mathcal{S}_1\cup\mu^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(\mu) = \operatorname{sign}(\mu) &= \operatorname{sign}(j_{\mathcal{S}_1})\operatorname{sign}(\mu_1)\operatorname{sign}(\mu_2)\\ &= \operatorname{sign}(j_{\mathcal{S}_1})\operatorname{sign}(\mu_1).\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\phi\in\mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_\nu)$, on a

$$\mu.\phi_{\mathcal{S}_1\cup\mu^{-1}*\mathcal{S}'}(z+\cdot) = j_{\mathcal{S}_1}\mu_1.\phi_{\mathcal{S}_1\cup\mu_1^{-1}j_{\mathcal{S}_1}^{-1}*\mathcal{S}'}(z+\cdot.) = j_{\mathcal{S}_1}.(\mu_1.\phi^{\mathcal{S}_1}_{j_{\mathcal{S}_1}^{-1}.z+\mu_1^{-1}j_{\mathcal{S}_1}^{-1}*\mathcal{S}'}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\\ \mu*\mathcal{S}_1=\mathcal{S}}} \omega_{\mathcal{S}_1\cup\mu^{-1}*\mathcal{S}',\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}(\mu)\mu.\phi_{\mathcal{S}_1\cup\mu^{-1}*\mathcal{S}'}\\ &\quad= \operatorname{Card}\{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid\mu*\mathcal{S}=\mathcal{S}\}\operatorname{sign}(j_{\mathcal{S}_1})j_{\mathcal{S}_1}.\big(\operatorname{Tr}_{\nu^{\mathcal{S}_1}}(\phi^{\mathcal{S}_1}_{j_{\mathcal{S}_1}^{-1}.z})_{j_{\mathcal{S}_1}^{-1}*\mathcal{S}'}\big)\\ &\quad= \operatorname{Card}\{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid\mu*\mathcal{S}=\mathcal{S}\}\big(j_{\mathcal{S}_1}.\operatorname{Tr}_{\nu^{\mathcal{S}_1}}(\phi^{\mathcal{S}_1}_{j_{\mathcal{S}_1}^{-1}})\big)_{\mathcal{S}'}\\ &\quad= \operatorname{Card}\{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid\mu*\mathcal{S}=\mathcal{S}\}\operatorname{Tr}_{\nu^{\mathcal{S}}}(\phi^{\mathcal{S}}_z)_{\mathcal{S}'}.\end{aligned}$$

L'expression précédente permet de réécrire l'expression (8.7) de la manière suivante :

$$\frac{1}{\operatorname{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)} \sum_{\substack{\mathcal{S}_1\in\Delta(\mathfrak{g}_\nu)\\ \mathcal{S}_1\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)*\mathcal{S}}} \operatorname{Card}\{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid \mu*\mathcal{S}=\mathcal{S}\}\operatorname{Tr}_{\nu^{\mathcal{S}}}(\phi_z^{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}'}$$
$$=\frac{\operatorname{Card}\{\mu\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid \mu*\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g}_\nu)\}}{\operatorname{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)}\operatorname{Tr}_{\nu_{\mathcal{S}}}(\phi_z^{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}'}.$$

L'égalité est démontrée. ■

Pour $\mathcal{S}_i\in\Delta(\mathfrak{g}_i)$ avec $i=1,2$, on pose $W^{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}=\operatorname{Hom}(V_1^{\mathcal{S}_1},V_2^{\mathcal{S}_2})$.

Lemme 8.16 *Soit $\mathcal{S}\in\Delta(\mathfrak{g})$. Il existe $\zeta_\Phi(\mathcal{S})\in\{\pm1\}$ tel que*

$$\prod_{\alpha\in\Sigma}\alpha(x)=\zeta_\Phi(\mathcal{S})\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathcal{S}}}\alpha(x)\Big|\prod_{\alpha\in\Sigma\setminus\Sigma_{\mathcal{S}}}\alpha(x)\Big|$$

pour tout $x\in\mathfrak{h}_\varnothing^{\mathrm{reg}}$.

Démonstration On a les égalités suivantes :

$$\prod_{\alpha\in\Sigma}\alpha(x)=\Big|\prod_{\alpha\in\Sigma}\alpha(x)\Big|(-1)^{\operatorname{Card}\{\alpha\in\Sigma\mid\bar\alpha\in-\Sigma\}}$$

et

$$\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathcal{S}'}}\alpha(x)=\Big|\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathcal{S}}}\alpha(x)\Big|(-1)^{\operatorname{Card}\{\alpha\in\Sigma_{\mathcal{S}}\mid\bar\alpha\in-\Sigma_{\mathcal{S}}\}},$$

ainsi il suffit de poser $\zeta_\Phi(\mathcal{S})=(-1)^{\operatorname{Card}\{\alpha\in\Sigma\setminus\Sigma_{\mathcal{S}}\mid\bar\alpha\in-\Sigma\}}$. Le lemme est démontré. ■

A partir de [8, proposition 11.14], on obtient la formule d'induction suivante.

Lemme 8.17 *Soient $\mathcal{S}_1\in\Delta(\mathfrak{g}_1)$ et $\theta\in\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ et $x'\in\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_1}^{\mathrm{reg}}$. Si il existe $\mathcal{S}_2\in\Delta(\mathfrak{g}_2)$ tel que* $\operatorname{Card}(\mathcal{S}_1)=\operatorname{Card}(\mathcal{S}_2)$*, on a*

$$\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2,W}(\theta)_{\mathcal{S}_1}(x')=\zeta_{\Phi_1}(\mathcal{S}_1)\zeta_{\Phi_2}(\mathcal{S}_2)\,\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1^{\mathcal{S}},\mathrm{G}_2^{\mathcal{S}_2},W^{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}}(\theta^{\mathcal{S}_2}_{\mu(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)(x'_s)})_\varnothing(x'_c)$$

sinon, on a $\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2,W}(\phi)_{\mathcal{S}_1}=0$.

Remarque L'isomorphisme $\mu(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)$ n'est pas unique mais on peut montrer que l'expression de gauche ci-dessus est indépendante du choix de $\mu(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)$.

Théorème 8.18 *Soient $\nu_2\in\operatorname{Str}^{\max,c}(\Phi_2)$, $\phi\in\mathfrak{I}_i(\mathfrak{g}_{1,\nu_1})$ et $\mathcal{S}_1\in\Delta(\mathfrak{g}_1)$. On a alors :*

$$\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2,W}\big(\operatorname{Tr}_{\nu_2}(\phi)\big)_{\mathcal{S}_1}=\sum_{\substack{\nu_1\in\operatorname{Str}(\Phi_1)\\ l\in\mathrm{B}(\nu_1,\nu_2)}}C(\nu_1,\nu_2,l,\mathcal{S}_1)\,\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_{1,\nu_1},\mathrm{G}_{2,\nu_2},W_l}(\phi)_{\mathcal{S}_1}.$$

où

$$C(\nu_1,\nu_2,l,\mathcal{S}_1)=\sum_{\substack{\mathcal{S}_1\in\Delta(\mathfrak{g}_{\nu_1})\\ \mathrm{Card}(\mathcal{S}_1)=\mathrm{Card}(\mathcal{S}_2)}}\frac{\begin{array}{r}C_{W^{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}}\Gamma(\nu_1^{\mathcal{S}_1},\nu_2^{\mathcal{S}_2},l|_{\nu_1^{\mathcal{S}_1}})\zeta_{\nu_1}(\mathcal{S}_1)\zeta_{\nu_2}(\mathcal{S}_2)\\ \times\,\mathrm{Card}\{w\in W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\mid w*\mathcal{S}_1=\mathcal{S}_1\}\end{array}}{\begin{array}{r}C_{W_l^{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}}\zeta_{\Phi_1}(\mathcal{S}_1)\zeta_{\Phi_2}(\mathcal{S}_2)\\ \times\,\mathrm{Card}(\mathcal{S}_1)!\;\mathrm{Card}\big(W'(\mathfrak{h}_\varnothing)\big)\end{array}}.$$

Démonstration La démonstration est directe. ∎

Si l'on considère la question de savoir si l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra est une intégrale invariante, c'est-à-dire, si

$$(8.8)\quad \mathrm{im}(\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2}) \subset \{\text{espace des intégrales invariantes sur } \mathfrak{g}_1 \text{ sans condition de support}\}.$$

Le cas des paires duales de groupes unitaire a été étudié dans [1]. Supposons $\mathbb{D}=\mathbb{H}$. D'après le théorème précédent et le corollaire 6.35 si l'inclusion (8.8) est vérifiée pour les paires duales $\big(\mathrm{O}^*(2),\mathrm{Sp}(p,q)\big)$ et $\big(\mathrm{Sp}(p,q),O^*(2)\big)$ avec $p+q=2$ alors on obtient que pour une paire $(\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2)$ où G_1 et G_2 sont de même rang $n\geq 2$, $\phi\in\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_2)$ et $\mathcal{S}_1\in\Delta(\mathfrak{g}_1)$ alors $\mathbf{Chc}^{\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2}(\phi)_{\mathcal{S}_1}\in\mathfrak{F}\big(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_1},\Sigma^{\mathrm{nc}}(\mathfrak{h}_{\mathcal{S}_1})\big)$. Une étude plus fine des constantes $C(\nu_1,\nu_2,l,\mathcal{S}_1)$ permettrait sans doute aussi d'étudier les relations de sauts.

Remerciements Je remercie A. Bouaziz pour ses nombreuses remarques ainsi que F. Courtès au sujet de la définition des applications admissibles.

Références

[1] F. Bernon, *Propriétés de l'intégrale de Cauchy Harish-Chandra pour certaines paires duales d'algèbres de Lie.* Mém. Soc. Math. Fr. **93**(2003).
[2] A. Bouaziz, *Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives.* Invent. Math. **115**(1994), 163–207.
[3] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique: Groupes et algèbres de Lie.* Chapitres 4,5 et 6. Masson, Paris, 1981.
[4] R. Herb, *Fourier inversion and the Plancherel theorem.* In: Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1980), Lecture Notes in Math. **880**(1981), 197–210.
[5] ———, *Discrete series characters as lifts from two-structures groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **353**(2001), 2557–2599.
[6] A. Knapp, *Lie groups beyond an introduction.* Second edition. Progress in Mathematics 140, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
[7] C. Moeglin, M. F. Vignéras and J. L. Waldspurger, *Correspondance de Howe sur un corps p-adique.* Lecture Notes in Math. 1291. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
[8] T. Przebinda, *A Cauchy Harish-Chandra Integral, for a real reductive dual pair.* Invent. Math. **141**(2000), 299–363.
[9] W. Schmid, *On the characters of the discrete series. The Hermitian symmetric case.* Invent. Math. **30**(1975), 47–144.
[10] D. Shelstad, *Characters and inner forms of a quasi-split group over* $\mathbb{R}$. Compositio Math. **39**(1979), 11–45.
[11] M. Sugiura, *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras.* J. Math. Soc. Japan **11**(1959), 374–434.
[12] V. S. Varadarajan, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups.* Lecture Notes in Math. 576. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

Department of Mathematics, University of Oklahoma, Norman, OK, 73019-0315, USA
courriel: florent.bernon@gmail.com