Canad. Math. Bull. Vol. **25** (3), 1982

K_0 D'UN ANNEAU DONT LES LOCALISES CENTRAUX SONT SIMPLES ARTINIENS

BY

W. D. BURGESS* ET J.-M. GOURSAUD

ABSTRACT. The purpose of the note is to calculate the group $K_0(A)$ where A is a ring all of whose Pierce stalks are simple artinian. This generalizes known results for A self injective of type I_n. For A regular, with injective hull, $\hat{A}$, of type I_n, a characterization is given for when $A \to \hat{A}$ it induces an isomorphism $K_0(A) \to K_0(\hat{A})$.

Le but de cette note est de calculer le groupe $K_0(A)$ dans le cas où A est un anneau régulier dont tous les localisés centraux sont simples artiniens. De plus nous donnons, dans un cas particulier, une caractérisation d'anneau régulier A pour lequel l'injection canonique de A dans son enveloppe injective à gauche $\hat{A}$ induit un isomorphisme $K_0(A) \to K_0(\hat{A})$.

Les notations adoptées sont celles du livre de Goodearl [2] sur les anneaux réguliers exceptés pour les modules qui sont ici des modules à gauche. Le groupe $K_0(A)$ est le groupe abélien engendré par les classes d'équivalences des modules projectifs de type fini sur A. Nous écrirons "module projectif" pour "module projectif de type fini".

Les anneaux réguliers que nous étudions ici satisfont à la condition suivante, pour tout élément a de A, il existe un élément inversible u de A tel que $aua = a$. Ces anneaux sont appelés *unitairement réguliers*, ils sont en fait caractérisés par la loi de simplification pour les modules projectifs

$$M \oplus P \simeq N \oplus P \Rightarrow M \simeq N \quad (2, \text{Th. } 4.5)$$

ce qui montre que pour de tels anneaux la relation d'équivalence sur les projectifs est l'isomorphisme. Si on note les classes d'équivalence par des crochets alors $K_0(A) = \{[P]-[Q] \mid P, Q\ A\text{-modules projectifs}\}$. On définit sur $K_0(A)$ une relation de quasi-ordre par $[P]-[Q] \leq [R]-[S]$ si $[P]+[S]+[T] = [R]+[Q]$ pour un certain projectif T. En d'autres termes $\{[P] \mid P \text{ projectif}\}$ est le cône positif. Dans le cas d'un anneau régulier fini et en particulier d'un anneau unitairement régulier cette relation est un ordre partiel. L'élément $[A]$ de $K_0(A)$ est une unité d'ordre dans le sens que pour tout $[P]$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[P] \leq n[A]$. Chaque homomorphisme d'anneaux $\phi : A \to B$ induit un

---

Reçu par la redaction le 7 novembre 1980.

AMS Subject Classification Numbers: 16A30 and 16A54.

* Ce travail a été effectué en partie lors d'un séjour à l'Université de Poitiers pour lequel l'auteur remercie G. Renault. Le travail a été subventionné par l'octroi A7539 de CRSNG.

homomorphisme $K_0(\phi): K_0(A) \to K_0(B)$, donné par $K_0(\phi)([P]) = [P \otimes_A B]$, qui est compatible avec la relation d'ordre. Dans le cas d'un projectif de la forme Ae où $e = e^2 \in A$, on a $K_0(\phi)([Ae]) = [B\phi(e)]$. Ce résumé sur K_0 est tiré du livre [2] où le lecteur peut trouver tous les détails.

Le théorème [2, Th. 15.7] permet de calculer $K_0(A)$ dans le cas où A est régulier auto-injectif de type I_n. On remarque que si A est un tel anneau et M un idéal maximal de son centre, alors le localisé A_M est simple artinien. On considère ici le cas plus général d'un anneau régulier A dont tous les localisés centraux sont simples artiniens. Ces anneaux ont été caractérisés ([1, Th. 20]), il s'agit d'anneaux réguliers biréguliers satisfaisant à une certaine condition de chaîne sur les systèmes d'unités de matrices. Il est commode ici d'emprunter le langage des faisceaux de Pierce. Soit A un anneau. Posons $B(A)$ son algèbre d'idempotents centraux et $X = \operatorname{Spec} B(A)$, qui est un espace séparé, compact et totalement discontinu. L'anneau A est isomorphe à l'anneau de sections d'un certain faisceau sur X dont les fibres sont les anneaux $A_x = A/Ax$, $x \in X$. L'image de $a \in A$ dans la fibre A_x est notée a_x. Bien des propriétés des fibres peuvent être relevées à l'anneau A en employant, surtout, la compacité de X. Pour plus de détails, voir [7] et sous forme condensée [1]. Si A est régulier alors ses fibres sont précisément ses localisés centraux.

THEOREME 1. *Soit A un anneau régulier dont tous les localisés centraux sont simples artiniens, $B(A)$ son algèbre d'idempotents centraux et $X = \operatorname{Spec} B(A)$. Posons $A_x = A/Ax = M_{n_x}(C_x)$, C_x un corps gauche, $x \in X$. Alors $(K_0(A), [A]) \cong (G, u)$ en tant que groupes ordonnés munis d'unité d'ordre où $G = \{\phi : X \to \mathbb{Q} \mid \mathbb{Q}$ étant muni de la topologie discrète, ϕ une fonction continue, et pour tout $x \in X$, $\phi(x) \in (1/n_x)\mathbb{Z}\}$ et $u(x) = 1$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. On remarque que $K_0(A)$ est engendré par les éléments $[Ae]$, $e^2 = e \in A$.

(1) Soit $e^2 = e \in A$. On définit $\psi([Ae]) = \phi_e$ par $\phi_e(x) = (1/n_x)\, d(e_x)$ où $d(e_x)$ est le rang de l'idempotent e_x dans l'anneau simple artinien A_x. En particulier, $\psi([A]) = u$. La fonction ϕ_e est continue. Il suffit de montrer que ϕ_e est localement constante. Soit $\{f_x^{(1)}, \ldots, f_x^{(n_x)}\}$ un système complet d'idempotents isomorphes orthogonaux pour A_x où $e_x \sim f_x^{(1)} + \cdots + f_x^{(d)}$. En employant la propriété clef des faisceaux de Pierce ([7, Lemma 4.3]), on sait que l'équation $1_x = f_x^{(1)} + \cdots + f_x^{(n_x)}$ et celles qui définissent les isomorphismes entre les $f_x^{(i)}$, l'orthogonalité et l'isomorphisme $e_x \sim f_x^{(1)} + \cdots + f_x^{(d)}$ sont vraies sur un voisinage N de x. Soit $y \in N$. Posons $d(f_y^{(1)}) = m_y$; et alors $d(e_y) = d(e_x) m_y$. Donc

$$\phi_e(y) = d(e_x)\frac{m_y}{n_y} = \frac{d(e_x)}{n_x} \quad \text{puisque} \quad n_x m_y = n_y.$$

(2) Un projectif P sur A est isomorphe à $\bigoplus_1^r Ae_k$ pour certains idempotents

e_k. On définit $\psi([P])=\sum \phi_{e_k}$ et pour les projectifs P et Q, $\psi([P]-[Q])=\psi([P])-\psi([Q])$. Cette fonction est bien définie d'après [2, 2.8] et le fait que si e et f sont idempotents orthogonaux alors $\phi_{e+f}=\phi_e+\phi_f$.

(3) ψ est une injection. En effet supposons que $e_1,\ldots,e_m$ et $f_1,\ldots,f_n$ soient des idempotents de A tels que $\psi([\oplus Ae_i])=\psi([\oplus Af_j])$. Alors pour tout $x\in X, \sum d(e_{ix})(1/n_x)=\sum d(f_{jx})(1/n_x)$. Or, $A_x e_{ix}\cong Ae_i/(Ax)e_i$ et les Ax parcourent l'ensemble des idéaux premiers de A([2, Th. 6.2]). De plus les rangs déterminent les projectifs sur A_x à isomorphisme près. Alors [2, Th. 4.19] montre que $\oplus Ae_i\cong\oplus Af_j$.

(4) ψ est une surjection. Soit $\phi: X\to\mathbb{Q}$ une fonction continue telle que $\phi(x)\in(1/n_x)\mathbb{Z}$ pour tout $x\in X$. On suppose, sans perdre de généralité, que $\phi(x)\geq 0$ pour tout $x\in X$. Vu que ϕ est locallement constante on peut également supposer que ϕ soit constante, disons que pout tout $x\in X$, $\phi(x)=a/b$, $a, b\in\mathbb{N}$, $pgcd(a, b)=1$. On a également $\phi(x)=c_x/n_x$ pour un certain $c_x\in\mathbb{N}$, ce qui montre que b divise n_x, disons $n_x=bm_x$. Pour tout $x\in X$ choisissons $e_x^2=e_x\in A_x$ tel que $d(e_x)=m_x$ et alors $d(e_x)(1/n_x)=m_x/n_x=1/b$. Le fait que $d(e_x)=m_x$ s'exprime par une famille d'équations vraies sur un voisinage N de x, c'est-à-dire qu'il existe $e^2=e\in A$ tel que pour tout $y\in N$,

$$d(e_y)\frac{1}{n_y}=\frac{m_x r_y}{n_y}=\frac{m_x r_y}{n_x r_y}=\frac{1}{b}$$

pour un certain $r_y\in\mathbb{Q}$. En employant la compacité de X, il existe un revêtement ouvert $N_1,\ldots,N_s$ de X et des idempotents $f_1,\ldots,f_s$ de sorte que $d(f_{ix})(1/n_x)=1/b$ si $x\in N_i$ et $f_{ix}=0$ si $x\notin N_i$. Le projectif cherché est la somme de a exemplaires de $\bigoplus_1^s Af_i$.

THEOREME 2. *Soient $M\subseteq\mathbb{N}$ et $A_n=M_n(D_n)$, D_n régulier réduit, $n\in M$. Posons $A=\Pi_M A_n$,* Spec $B(A_n)=X_n$ *et* Spec $B(A)=X$. *Alors $(K_0(A),[A])=(G,u)$ où $G=\{\phi: X\to\mathbb{R}\mid \phi$ fonction continue, $\phi(x)\in(1/n)\mathbb{Z}$ pour $x\in X_n\}$ et $u(x)=1$ pour tout $x\in X$.*

Démonstration (esquisse). On voit d'après la dualité stonienne que $X=\beta(\bigcup_M X_n)$. Soit $e_n\in B(A)$ l'idempotent qui engendre A_n comme idéal de A. Pour un A-projectif P on définit $\phi:\bigcup X_n\to\mathbb{R}$ par $\phi(x)=[e_nP]1/n$ si $x\in X_n$ où $[e_nP]\in K_0(A_n)$. On voit que ϕ est continue et bornée sur $\bigcup X_n$ et donc elle a un prolongement unique à un élément de G. Ceci donne un monomorphisme de $K_0(A)$ dans G.

Si $\phi\in G^+$ alors ϕ est bornée et localement constante sur $\bigcup X_n$ et donc sur chaque X_n, $n\in M$. On construit des idempotents dans A_n comme dans le théorème précédent ce qui permet de trouver un projectif sur A qui induit ϕ. Si $\phi(x)\leq k$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$ alors chacun de ces projectifs a un ensemble générateur à au plus k éléments.

Il y a aussi moyen de trouver K_0 sous les hypothèses du théorème 2 grâce à

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-048-0 Published online by Cambridge University Press

[5, Prop. 3.3]. M. Handelman nous a dit que sa proposition a besoin d'une hypothèse plus forte que celle donnée dans [5] et que la condition que les anneaux en question soient unitairement réguliers est certainement suffisante.

Handelman a montré dans [5, Lemma 3.1] que dans certains cas un prolongement d'anneaux $A \subseteq B$ où B est inclus dans l'anneau complet des quotients de A donne lieu à un isomorphisme $K_0(A) \to K_0(B)$. Nous aborderons ici une question connexe pour laquelle nous aurons besoin du résultat suivant de Goodearl, Handelman et Lawrence ([3, Lemma 11.14.1]): Soit A un anneau unitairement régulier alors $K_0(A)$ détermine $B(A)$.

THEOREME 3. *Soient A un anneau régulier et $\hat{A} = M_n(D)$ son enveloppe injective à gauche où D est réduit. Alors le prolongement $A \to \hat{A}$ induit un isomorphisme $K_0(A) \to K_0(\hat{A})$ si et seulement si* (i) *il existe un système d'unités de matrices d'ordre $n, \{e_{ij}\}$, pour A et* (ii) *$B(D') = B(D'')$ où D' et D'' sont définis par $e_{11}Ae_{11} = D'$ et $e_{11}\hat{A}e_{11} = D'' \cong D$.*

Démonstration. Supposons d'abord les conditions i) et ii). Alors $B(A) = B(D') = B(\hat{A})$ et le résultat suit du théorème 1.

D'autre part d'après le résultat cité, et en tenant compte du fait que A est unitairement régulier ([2, Cor 7.11]) on a que $B(A) \cong B(\hat{A})$ et de plus ([4, Th. 1.10] et [6, Cor. p. 45]) $B(\hat{A})$ est le complété de $B(A)$, d'où $B(A) = B(\hat{A})$. Il existe des unités de matrices d'ordre $n, \{f_{ij}\}$, pour $\hat{A}$ et donc $n[\hat{A}f_{11}] = [\hat{A}]$. D'après l'isomorphisme des K_0 il existe un projectif P sur A tel que $n[P] = [A]$, d'où $nP \cong A$. Donc il existe une famille d'idempotents isomorphes orthogonaux $\{e_{11}, \ldots, e_{nn}\}$ de A qui donne lieu aux unités de matrices désirées.

Comme illustration du théorème on rappele un exemple bien connu. Soient $D = \Pi_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ et D' le sousanneau de D consistant en suites dont toutes sauf un nombre fini des composantes sont rationnelles. Alors $K_0(M_n(D')) \simeq K_0(M_n(D))$.

REFERENCES

1. W. D. Burgess et W. Stephenson, *Pierce sheaves of non-commutative rings*. Comm. Algebra, **4** (1976), 51–75.
2. K. R. Goodearl, *Von Neumann Regular Rings*. Pitman, Londres, 1979.
3. K. R. Goodearl, D. Handelman et J. Lawrence, *Affine representations of Grothendieck groups and applications to Rickart C^*-algebras and $\aleph_0$-continuous regular rings*, Memoirs Amer. Math. Soc. **234** (1980).
4. J.-M. Goursaud et L. Jérémy, *Sur l'enveloppe injective des anneaux réguliers*, Comm. Algebra, **3** (1975), 763–779.
5. D. Handelman, *K_0 of von Neumann and AFC* algebras*, Quart. J. Math. Oxford, **29** (1978), 427–441.
6. J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*. Blaisdell, Waltham, Mass., Toronto, Londres, 1966.
7. R. S. Pierce, *Modules over commutative regular rings*, Memoires Amer. Math. Soc., **70** (1967).

UNIVERSITÉ D'OTTAWA
OTTAWA, CANADA
UNIVERSITÉ DE POITIERS
POITIERS, FRANCE