



## Quelques relations entre les cohomologies des variétés de Shimura et celles de Griffiths–Schmid (cas du groupe $SU(2,1)$ )

HENRI CARAYOL

*Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS (URA 01), 7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France. e-mail: carayol@math.u-strasbg.fr*

(Received: 14 July 1998; in final form: 18 January 1999)

**Abstract.** Our aim is to study the cohomology groups of some coherent sheaves on a Griffiths–Schmid variety associated with an anisotropic  $\mathbf{Q}$ -form of the unitary group  $SU(2,1)$ . We define some transforms relating this cohomology to the coherent cohomology groups of some sheaves defined on certain threefolds, which are fibered in projective lines over Picard modular surfaces. In particular, we give a complete and explicit description, in terms of classical Picard modular forms, of the holomorphic (resp. anti-holomorphic) part of the 1-cohomology of the Griffiths–Schmid variety. From this, it results an explicit generating system for the part of the 2-cohomology which correspond to those automorphic representations whose archimedean component is a degenerate limit of discrete series.

**Mathematics Subject Classifications (2000):** 11F99, 32C35, 32E10, 32M10, 32N99.

**Key words:** Dolbeault cohomologie, automorphic form, unitary groups, Picard variety.

### Introduction et notations

Cette étude fait suite à l'article [Ca] où nous avons calculé la cohomologie de certains faisceaux cohérents sur les variétés de Griffiths–Schmid associées à des groupes unitaires de type  $(2, 1)$ . Partons du groupe unitaire  $G_{\mathbf{R}} = SU(2, 1)$ , associé à la forme

hermitienne  $h$  de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Ce groupe opère sur le plan projectif  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ,

avec deux orbites ouvertes: la boule unité ouverte  $\Delta$ , constituée des points  $p$  dont une coordonnée homogène  $\tilde{p}$  vérifie  $h(\tilde{p}) < 0$ , ainsi que l'extérieur de la boule fermée  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus \bar{\Delta}$ . Ce groupe opère également sur l'ensemble des drapeaux  $(p, L)$  du plan projectif  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ , avec  $p$  un point et  $L$  une droite, tels que  $p \in L$ . Pour cette dernière action, on a trois orbites ouvertes, notées  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  (les deux dernières étant désignées dans [Ca] respectivement par  $\mathbf{\Omega}'$  et  $\mathbf{\Omega}'$ ) et définies par:

$$\mathbf{\Omega} = \{(p, L); \quad p \notin \bar{\Delta} \text{ et } L \cap \Delta \neq \emptyset\};$$

$$\mathbf{X} = \{(p, L); \quad p \in \Delta\};$$

$$\mathbf{Y} = \{(p, L); \quad L \cap \bar{\Delta} = \emptyset\}.$$

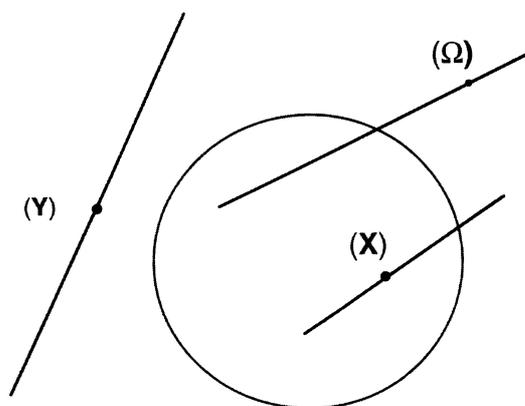


Figure 1.

Fixons maintenant une forme anisotrope  $G$  sur  $\mathbf{Q}$  de notre groupe unitaire (obtenue à partir d'une algèbre centrale simple de dimension 9 sur un corps quadratique imaginaire, et munie d'une involution de seconde espèce – cf. [Ca].) Les variétés de Griffiths–Schmid connexes associées sont les quotients  $\Gamma \backslash \Omega$  pour  $\Gamma$  un sous-groupe de congruence assez petit (i.e. agissant librement) dans  $G$ . Ce sont des variétés analytiques complexes de dimension 3. Dans l'article [Ca] (où  $G$  désigne plutôt une forme du groupe unitaire  $U(2, 1)$  et où l'on considère plutôt une version adélique de ces objets) nous avons montré que ces variétés, bien que non algébriques, présentaient du moins sur les variétés de Shimura associées au même groupe l'avantage suivant: de voir apparaître dans leur cohomologie certaines formes automorphes, dont le type à l'infini est une limite dégénérée de série discrète, et qui n'ont pas d'autre interprétation géométrique connue.

Lorsque l'on remplace  $\Omega$  par  $X$ , le quotient obtenu  $\Gamma \backslash X$  est une variété fibrée en  $\mathbf{P}^1$  au-dessus de la variété de Shimura  $\Gamma \backslash \Delta$  (surface de Picard). De même pour  $\Gamma \backslash Y$ : en fait la dualité par rapport à la forme hermitienne de type (2, 1) considérée fait de  $X$  la variété complexe conjuguée de  $Y$ , de façon équivariante, et il en est donc de même pour  $\Gamma \backslash X$  et  $\Gamma \backslash Y$ . Certaines formes automorphes de type holomorphe ou anti-holomorphe s'interprètent de façon essentiellement classique comme des sections de certains faisceaux sur  $\Gamma \backslash X$  ou  $\Gamma \backslash Y$ .

Le but du présent travail est d'essayer de comprendre, et de décrire de façon assez explicite, les groupes de cohomologie de certains faisceaux cohérents sur  $\Gamma \backslash \Omega$ . La méthode ici utilisée repose sur des idées de Gindikin (cf. [Ea-Gi-Wo 1], [Ea-Gi-Wo 2], [Gi]), lesquelles permettent de définir en termes purement holomorphes la cohomologie cohérente d'une variété complexe, à partir d'un certain fibré de Stein, à fibres contractiles, au dessus de celle-ci; il s'agit si l'on veut d'une variante continue de la cohomologie de Čech, l'espace étant recouvert par une famille d'ouverts indexée par une autre variété. Il se trouve que dans le cas ici con-

sidéré, une même variété  $\mathbf{U}$  (définie en fait par Gindikin) joue ce rôle d'espace fibré à la fois au-dessus de  $\mathbf{\Omega}$ , de  $\mathbf{X}$  et de  $\mathbf{Y}$  (et de même après passage au quotient par  $\Gamma$ ). Cela permet de relier les unes aux autres les cohomologies de ces différents espaces (en des degrés différents) par des transformations à la Penrose. Notons quelques relations entre l'approche proposée ici et des travaux plus anciens de Griffiths, Schmid, Wells et Wolf (cf. [Gr–Sc], [We–Wo]) où l'on retrouve (bien que dans un esprit différent) l'idée d'étudier la 'cohomologie automorphe' (de  $\mathbf{\Omega}$ ) en termes de fonctions sur le produit  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ .

Dans cet article, nous nous concentrons surtout sur des correspondances (notées  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ ) entre les groupes de sections sur  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$  et  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  de certains faisceaux, groupes associés à des formes modulaires au sens habituel de type holomorphe ou anti-holomorphe, et les groupes de 1-cohomologie de  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ . Le plan est le suivant: au Paragraphe 1, nous décrivons les faisceaux (fibrés en droites) utilisés sur chacune des variétés  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ ,  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$ ,  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$  et rappelons en quels degrés ils possèdent de la cohomologie. Au Paragraphe 2, nous définissons nos transformations  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ , tout d'abord des sections sur  $\mathbf{X}$  [resp.  $\mathbf{Y}$ ] vers la 1-cohomologie de  $\mathbf{\Omega}$ , et prouvons leur injectivité au Paragraphe 3. Le Paragraphe 4 est consacré à établir à la main quelques propriétés de  $\mathbf{\Omega}$ : en gros, le fait que cet espace n'a 'essentiellement' de la cohomologie cohérente qu'en degré 1; dans le cas de faisceaux suffisamment réguliers, on retrouve ainsi, dans cette situation particulière, des résultats de Griffiths et Schmid. Utilisant ces résultats, ou bien le fait que l'espace  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$  est de Stein, on obtient au Paragraphe 5 des versions automorphes des transformations  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  (des sections sur  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$  et  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  vers la 1-cohomologie de  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ ). Le résultat d'injectivité précédent prouve alors que l'on obtient ainsi des isomorphismes. Cela donne donc une description de la 1-cohomologie de  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$  qui est de type holomorphe ou anti-holomorphe. Tout cela a été fait dans le cadre de la théorie de Gindikin, mais on explique au Paragraphe 6 comment traduire cela en termes de cohomologie de Dolbeault.

Le Paragraphe 7 est le plus court de l'article: on se contente d'appliquer un théorème du travail précédent [Ca], affirmant que la cohomologie  $H^2(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{-1,-1})$  est 'virtuellement' engendrée par certains cup-produits associés à des 1-classes de type holomorphe et anti-holomorphe. Faisant usage des transformations précédentes, on obtient ainsi des cocycles explicites, construits en termes de formes automorphes classiques pour  $SU(2, 1)$ , et qui engendrent virtuellement  $H^2(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{-1,-1})$ . Ce dernier groupe est précisément associé aux représentations dont la partie archimédienne est une limite dégénérée de série discrète, et l'obtention d'un système générateur explicite est une des motivations essentielles de ce travail, dans la mesure où l'on peut espérer utiliser cette description en vue d'obtenir des renseignements sur la nature arithmétique des représentations en question.

Au Paragraphe 8, on montre que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  font partie d'un système de 12 transformations (notées  $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{Q}', \mathcal{R}', \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{P}'^*, \mathcal{Q}'^*, \mathcal{R}'^*$ ) qui relient les cohomologies de  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ ,  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  et  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ . Je ne sais d'ailleurs pas pour toutes prouver qu'elles sont bijectives, mais on donne en composant  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}'^*$  une autre preuve de la bijectivité de  $\mathcal{P}$ .

Finalement, dans un bref appendice nous prouvons un résultat qui est l’analogue, dans le cas d’un espace hermitien symétrique général  $\Delta$ , de l’assertion que  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$  est de Stein: le fait que  $\Gamma \setminus (\Delta \times \Delta^-)$  est de Stein pour  $\Delta^-$  la variété conjuguée de  $\Delta$  et  $\Gamma$  un groupe de congruence co-compact. Cela peut servir, en utilisant la théorie de Gindikin, à exprimer la cohomologie de faisceaux sur  $\Gamma \setminus \Delta$  de façon analogue à ce que nous faisons dans le présent article.

**1. Faisceaux définis sur les divers espaces, et leur cohomologie**

(1.1) Notons  $\mathbf{D}$  la variété des drapeaux de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ; chacun de nos espaces  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{X}$ , et  $\mathbf{Y}$  est un ouvert de  $\mathbf{D}$ . Notons d’autre part  $V$  l’espace vectoriel  $\mathbf{C}^3$ ,  $V^*$  son dual, et enfin  $\tilde{\mathbf{D}}$  la variété constituée des couples  $(p, L) \in V \times V^*$  tels que  $p \neq 0$ ,  $L \neq 0$ , et que  $L(p) = 0$ , de sorte que  $\tilde{\mathbf{D}}$  apparaît comme fibrée sur  $\mathbf{D}$  de groupe  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ . Pour  $a, b \in \mathbf{Z}$  deux entiers, nous désignerons par  $\mathcal{F}_{a,b}$  le faisceau localement libre sur  $\mathbf{D}$  obtenu par restriction du faisceau  $\mathcal{O}(a) \otimes \mathcal{O}(b)$  sur  $\mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(V^*)$ ; ainsi les sections de  $\mathcal{F}_{a,b}$  sur un ouvert de  $\mathbf{D}$  correspondent aux fonctions sur l’ouvert image réciproque dans  $\tilde{\mathbf{D}}$  qui sont bi-homogènes de degré  $(a, b)$ .

Nous utiliserons la même notation  $\mathcal{F}_{a,b}$  pour la restriction de ces faisceaux à chacun des espaces  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{X}$ , et  $\mathbf{Y}$ ; de même – comme ils sont évidemment équivariants – pour les faisceaux qu’on en déduit sur les différents quotients par un sous-groupe de congruence  $\Gamma$ . Nous noterons aussi  $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}$ , et  $\tilde{\mathbf{Y}}$  les images réciproques de  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{X}$ , et  $\mathbf{Y}$  dans  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Il y a une autre façon d’indexer ces faisceaux, en termes des caractères algébriques du tore diagonal  $T \subset G$ , mais cette nouvelle indexation dépend de celui des trois espaces que l’on considère. Plus précisément, ainsi qu’il est expliqué dans ([Ca] (3.1)), chacun des trois espaces  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{X}$ , et  $\mathbf{Y}$  est diffeomorphe au quotient  $G_{\mathbf{R}}/T$ , la structure complexe étant donnée par un plongement  $G_{\mathbf{R}}/T \subset G_{\mathbf{C}}/B$ , où  $B$  désigne un sous-groupe de Borel, constitué, suivant qu’il s’agit de  $\mathbf{\Omega}$ , de  $\mathbf{X}$ , ou de  $\mathbf{Y}$ , des matrices de la forme:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des trois cas, si  $\mu$  est un caractère algébrique du tore  $T$ , on l’étend de façon habituelle en un caractère du sous-groupe de Borel considéré  $B$ , et cela définit un faisceau localement libre équivariant  $\mathcal{F}_{\mu}$  sur la variété  $G_{\mathbf{C}}/B$ , d’où par restriction un faisceau équivariant sur  $G_{\mathbf{R}}/T$ .

Le dictionnaire entre les deux notations  $\mathcal{F}_{a,b}$  et  $\mathcal{F}_{\mu}$  (où  $\mu$  désignera tout aussi bien le caractère de  $T$  que le caractère correspondant de son algèbre de Lie  $\mathfrak{t}$ ) dépend de l’espace considéré. Si l’on désigne comme dans (loc. cit.) par  $e_1, e_2, e_3$  les trois racines:

$$e_1(\text{diag}(x, y, z)) = x - y, \quad e_2(\text{diag}(x, y, z)) = y - z, \quad e_3(\text{diag}(x, y, z)) = z - x,$$

( $e_1$  étant une racine compacte, tandis que les deux autres sont non compactes), alors on vérifie que la correspondance entre les deux notations est la suivante:

Pour  $\Omega$  :  $\mathcal{F}_{e_1} = \mathcal{F}_{-1,-1}$ ,  $\mathcal{F}_{e_2} = \mathcal{F}_{-1,2}$ ,  $\mathcal{F}_{e_3} = \mathcal{F}_{2,-1}$ .

Pour  $X$  :  $\mathcal{F}_{e_1} = \mathcal{F}_{1,-2}$ ,  $\mathcal{F}_{e_2} = \mathcal{F}_{1,1}$ ,  $\mathcal{F}_{e_3} = \mathcal{F}_{-2,1}$ .

Pour  $Y$  :  $\mathcal{F}_{e_1} = \mathcal{F}_{-2,1}$ ,  $\mathcal{F}_{e_2} = \mathcal{F}_{1,-2}$ ,  $\mathcal{F}_{e_3} = \mathcal{F}_{1,1}$ .

(1.2) On sait bien comment la cohomologie des espaces quotients  $\Gamma \backslash \Omega$ ,  $\Gamma \backslash X$ ,  $\Gamma \backslash Y$  s'exprime en termes de la  $(\mathfrak{b}, T)$ -cohomologie des espaces de formes automorphes, où  $\mathfrak{b}$  désigne l'algèbre de Lie du groupe de Borel  $B$  introduit ci-dessus. Plus précisément, si l'on désigne par  $\mathcal{A}_\Gamma$  l'espace des formes  $\Gamma$ -automorphes sur  $G$ , on a un isomorphisme (cf. [Ca](3.3)):

$$H^*(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_\mu) \simeq H^*(\mathfrak{b}, T, \mathcal{A}_\Gamma \otimes \mu);$$

de même pour  $\Gamma \backslash X$  et  $\Gamma \backslash Y$ . D'autre part, l'espace  $\mathcal{A}_\Gamma$  se décompose en une somme directe dénombrable de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules irréductibles, de sorte que la détermination de la cohomologie de nos espaces quotients se ramène au problème de décomposer  $\mathcal{A}_\Gamma$  en composantes irréductibles, puis de calculer la  $(\mathfrak{b}, T)$ -cohomologie de chacune de ces représentations irréductibles  $\pi$ . Le calcul de

$$H^*(\mathfrak{b}, T, \pi \otimes \mu) \simeq H^*(\mathfrak{n}, \pi)_{\mu^{-1}},$$

où  $\mathfrak{n}$  désigne le radical unipotent de  $\mathfrak{b}$ , a été décrit dans ([Ca] (3.5)) dans le cas de l'espace  $\Omega$ : il s'agit simplement, pour les séries discrètes et leurs limites non dégénérées, d'expliciter des résultats de Williams ([Wi]), tandis que le calcul dans le cas de la limite dégénérée a été effectué dans (loc. cit. §2). D'autre part, pour une raison expliquée dans (loc. cit. (3.5)), seules ces dernières représentations, ainsi que la représentation triviale, peuvent intervenir dans nos espaces de cohomologie (les autres représentations qui possèdent aussi de la cohomologie sont non tempérées et ne peuvent apparaître dans le cas du groupe que nous considérons ici: cf. infra (4.5)).

Nous laissons au lecteur le soin de refaire le calcul dans le cas des deux autres espaces  $X$  et  $Y$ . Les trois diagrammes qui suivent (le premier étant tiré de [Ca]) figurent les différents degrés de cohomologie qui peuvent se présenter, en fonction du faisceau que l'on considère.

Chacun de ces diagrammes fait apparaître une partition du plan en six secteurs, translatés du système des chambres de Weyl correspondant à notre système de racines. Nous avons représenté le degré de cohomologie associé à chacun de ces secteurs: les facteurs irréductibles non triviaux de  $\mathcal{A}_\Gamma$  qui contribuent à la cohomologie d'un faisceau, représenté par un point intérieur d'un tel secteur, sont tous équivalents à une même représentation de la série discrète  $\pi$ , dont le paramètre de Harish-Chandra s'obtient par la translation qui applique nos secteurs sur les chambres de Weyl; de plus la contribution correspondante  $H^*(\mathfrak{b}, T, \pi \otimes \mu)$  est alors

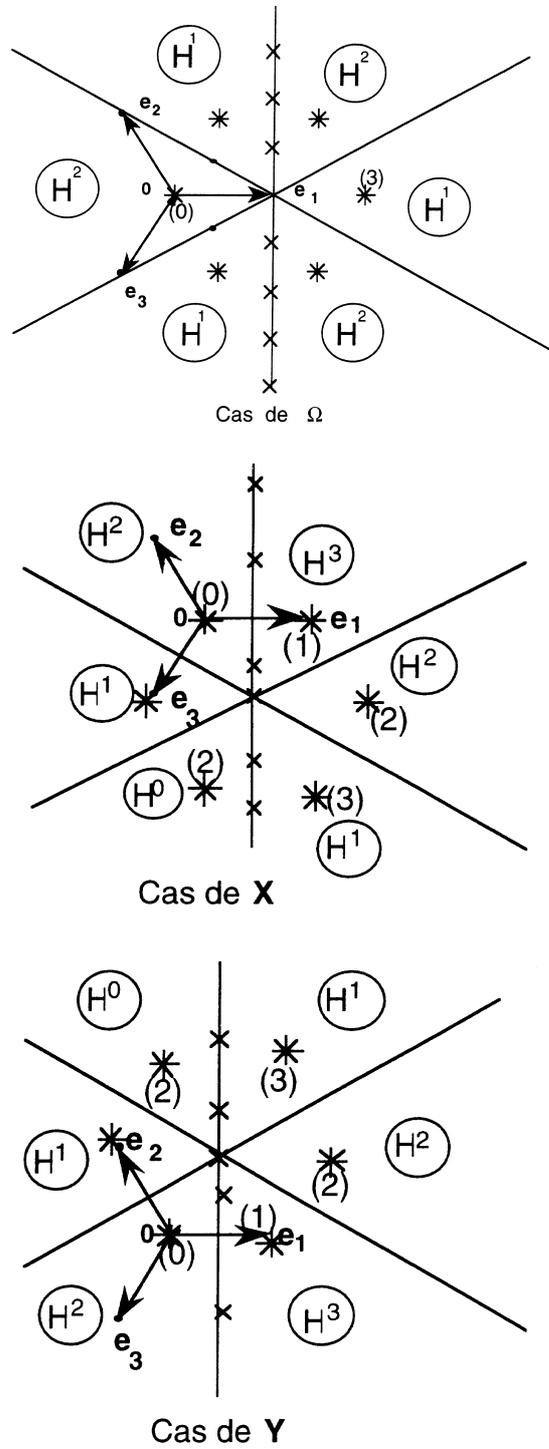


Figure 2.

de dimension 1. Lorsqu'au contraire le paramètre  $\mu$  se trouve sur le translaté de l'un des murs non compacts, alors deux limites de séries discrètes peuvent intervenir (si toutefois elles apparaissent dans l'espace des formes automorphes) en deux degrés distincts qui sont ceux attachés aux deux secteurs adjacents. Notons que pour  $\mu$  appartenant au translaté du mur compact ('vertical'), la cohomologie s'annule, sauf dans le cas de l'espace  $\Omega$  et du faisceau  $\mathcal{F}_{e_1}$ : cela correspond au fait que la limite dégénérée de série discrète (associée au paramètre de Harish-Chandra nul) admet de la  $n$ -cohomologie (en degrés 1 et 2) pour  $n$  le radical unipotent du sous-groupe de Borel associé à  $\Omega$ , mais que cette cohomologie au contraire s'annule dans le cas des espaces  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ .

Hormis les séries discrètes et leurs limites, la contribution de la *représentation triviale* est figurée, dans chacun des trois diagrammes, par six étoiles; nous avons explicité dans une parenthèse le degré de cette contribution, dans le cas où il différerait de celui attribué au secteur ambiant; ainsi la cohomologie des faisceaux associés admet deux contributions distinctes: celle qui provient de la série discrète correspondante d'une part, et celle qui provient de la représentation triviale d'autre part.

Notons enfin que les points 'centraux' de chacun des trois diagrammes (respectivement  $e_1, -e_2, -e_3$ ) correspondent tous trois au faisceau  $\mathcal{F}_{-1,-1}$ , dont le carré  $\mathcal{F}_{-2,-2}$  est isomorphe au faisceau "dualisant"  $\wedge^3 \Omega^1$ , et que la dualité de Serre est reflétée dans la symétrie par rapport à ce point que l'on observe dans chacun de ces diagrammes.

**(1.3)** Notre objectif est maintenant d'établir une correspondance entre:

(i) d'une part les groupes de *sections* sur  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$  [resp.  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$ ] des faisceaux précédemment définis: il s'agit donc des  $\mathcal{F}_\mu$  lorsque  $\mu$  se trouve dans le secteur inférieur [resp. supérieur] gauche du diagramme correspondant; si l'on préfère, ce sont les  $\mathcal{F}_{a,b}$  vérifiant:  $b \geq 0$  et  $a + b \leq -2$  [resp.  $a \geq 0$  et  $a + b \leq -2$ ]. En particulier, les faisceaux  $\mathcal{F}_{a,0}$  ( $a \leq -2$ ) [resp.  $\mathcal{F}_{0,b}$  ( $b \leq -2$ )] sont ceux qui correspondent aux séries discrètes holomorphes et antiholomorphes dont le paramètre est le plus proche possible du mur compact, et dont nous avons expliqué dans [Ca] le lien avec l'étude des représentations automorphes associées à la limite dégénérée de série discrète. Quant aux faisceaux  $\mathcal{F}_{2-b,b}$  ( $b \geq 0$ ) [resp.  $\mathcal{F}_{a,2-a}$  ( $a \geq 0$ )], ils détectent les limites de séries discrètes holomorphes et anti-holomorphes.

(ii) d'autre part les groupes  $H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_\mu)$  lorsque  $\mu$  appartient à l'un des deux secteurs analogues du diagramme correspondant à  $\Omega$ : il s'agit donc des faisceaux  $\mathcal{F}_{a,b}$  tels que  $a + b \geq -1$  et  $b \leq -1$  [resp. tels que  $a + b \geq -1$  et  $a \leq -1$ ]. Ici encore on notera les cas limites où  $a + b = -1$ , correspondant de nouveau aux séries discrètes dont le paramètre se trouve le plus près possible du mur compact, ainsi que ceux où  $b = -1$  [resp.  $a = -1$ ], associés aux limites de séries discrètes holomorphes et anti-holomorphes.

Pour cela nous allons commencer par rappeler quelques constructions de Gindikin.

## 2. L'espace $U$ . Définition des Transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

(2.1) Nous noterons  $U$  l'ouvert du produit  $\Omega \times \Omega$  constitué des couples de drapeaux  $(z, l; \xi, \alpha)$  vérifiant les conditions suivantes:

- (i) les points  $z$  et  $\xi$  sont distincts et la droite  $J$  qui les joint ne rencontre pas  $\bar{\Delta}$ .
- (ii) les droites  $l$  et  $\alpha$  sont distinctes et leur intersection  $I$  appartient à  $\Delta$ .

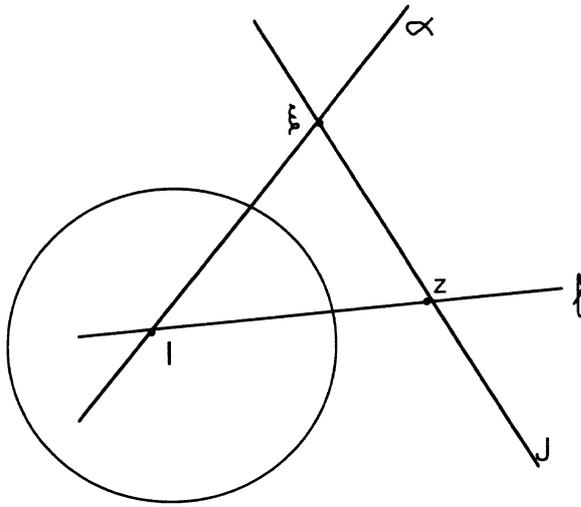


Figure 3.

Nous noterons  $\pi: U \rightarrow \Omega$  la projection sur le premier facteur. L'espace  $U$  a déjà été considéré par Gindikin dans un contexte analogue. C'est un espace *de Stein*, en fait isomorphe (mais de façon non équivariante) au produit de la boule  $\Delta$ , de la variété complexe conjuguée (espace des droites extérieures à  $\bar{\Delta}$ ), et enfin du complémentaire de la diagonale dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ : en effet la donnée d'un point  $(z, l; \xi, \alpha)$  de  $U$  revient à la donnée de  $I$ , de  $J$ , et du couple de points obtenu en intersectant  $l$  et  $\alpha$  avec une droite fixée extérieure à  $\bar{\Delta}$ ; or il est bien connu et facile de vérifier que le troisième espace est, comme les deux premiers facteurs, un espace de Stein. Enfin on voit aussi que les fibres de la projection  $\pi$  sont *contractiles*. Sous ces deux hypothèses, Gindikin ([Ea-Gi-Wo 1], [Ea-Gi-Wo 2], [Gi]) a construit un isomorphisme entre la cohomologie de  $\Omega$  à valeurs dans un faisceau  $\mathcal{F}$  et la cohomologie du complexe  $\Gamma(U, \Omega_{\pi}^*(\mathcal{F}))$  des sections globales sur  $U$  du faisceau des différentielles relatives à valeurs dans  $\mathcal{F}$ .

Nous nous intéresserons bien sûr dans la suite aux faisceaux  $\mathcal{F}_{a,b}$ . Désignons par  $\tilde{U}$  l'image réciproque de  $U$  dans  $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ , et notons encore  $(z, l; \xi, \alpha)$  un élément de  $\tilde{U}$ , où  $z, l; \xi, \alpha$  sont maintenant des vecteurs plutôt que les éléments correspondants des espaces projectifs. On voit alors que la donnée d'un élément de  $\Gamma(U, \Omega_{\pi}^*(\mathcal{F}_{a,b}))$  revient à la donnée d'une  $\bullet$ -forme différentielle holomorphe en la deuxième 'variable' sur  $\tilde{U} \subset \tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ , qui est bi-homogène de degré  $(a, b)$  en la première 'variable'  $(z, l)$  et

de degré  $(0, 0)$  en la seconde  $(\xi, \alpha)$  (autrement dit, qui provient de l'ouvert correspondant de  $\tilde{\Omega} \times \Omega$ .)

**(2.2)** Nous allons maintenant définir des éléments canoniques:

$$\omega_I \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{-2,1})) = \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{-e_3})),$$

$$\omega_J \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{1,-2})) = \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{-e_2})).$$

Pour cela nous fixons dans toute la suite de ce travail un déterminant sur l'espace ambiant:  $\det : \wedge^3 V \rightarrow \mathbf{C}$ ; le plan d'équation  $l = 0$  dans  $V$  hérite alors d'un déterminant  $\det_l$  (dépendant de l'équation  $l$ ) défini par:

$$\det_l(\quad, \quad) = l^{-1}(\ast) \det(\quad, \quad, \ast),$$

où  $\ast$  désigne un quelconque vecteur extérieur au plan. On en déduit une coordonnée affine, bien définie à une constante près, sur la droite affine obtenue en ôtant à la droite projective  $l$  le point  $z$ : une origine  $p_0 \neq z$  étant choisie sur  $l$ , la coordonnée  $x(p)$  d'un point  $p$  distinct de  $z$  est donnée par:

$$x(p) = \frac{\det_l(p, p_0)}{\det_l(p, z) \det_l(p_0, z)} .$$

On voit que cette expression ne dépend que de l'image de  $p$  et de  $p_0$  dans la droite projective, et qu'elle est homogène de degré  $-2$  en  $z$  et de degré  $1$  en  $l$ . Localement sur  $\mathbf{U}$  on peut choisir une origine  $p_0(z, l)$  dépendant holomorphiquement du drapeau  $(z, l)$ . Considérons alors la coordonnée  $x(I)$  du point  $I$ : elle est définie localement et un changement d'origine correspond à la translation par une fonction holomorphe de  $(z, l)$ . Il en résulte que sa différentielle relative:

$$\omega_I = d_{\pi}x(I)$$

est un élément canonique de  $\Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{-2,1}))$ . Elle est (relativement) fermée.

La construction de  $\omega_J$  est duale de la précédente: on a un déterminant sur  $V^*$  (tel que les bases de volume 1 soient les bases duales des bases de volume 1 de  $V$ ); le plan défini par  $z$  dans  $V^*$  est muni d'un déterminant

$$\det_z(\quad, \quad) = z^{-1}(\ast) \det(\quad, \quad, \ast),$$

lequel permet, une origine  $q_0 \neq l$  étant choisie localement, de définir une coordonnée affine sur la droite affine obtenue en privant du point  $l$  la droite projective définie par  $z$  dans  $\mathbf{P}(V^*)$ :

$$y(q) = \frac{\det_z(q, q_0)}{\det_z(q, l) \det_z(q_0, l)} .$$

La différentielle relative de la coordonnée de  $J$ :

$$\omega_J = d_{\pi}y(J)$$

est alors un élément canoniquement défini dans  $\Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{1,-2}))$ .

**(2.3)** LA TRANSFORMATION  $\mathcal{P}$  [RESP.  $\mathcal{P}'$ ].

Pour deux vecteurs  $v$  et  $w$  de  $V$ , nous noterons  $v \wedge w$  l'élément de  $V^*$  tel que  $(v \wedge w)(\ ) = \det(v, w, \ )$ . De même, pour  $l$  et  $m \in V^*$ ,  $l \wedge m \in V$  est tel que  $(l \wedge m)(\ ) = \det(l, m, \ )$ . On voit que, lorsque  $v$  et  $w$  représentent deux points distincts du plan,  $v \wedge w$  est une équation de la droite qui les joint, tandis que pour deux droites distinctes d'équations  $l$  et  $m$ ,  $l \wedge m$  représente leur point d'intersection.

Partons d'une section  $f \in H^0(\mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$ . On peut la voir comme une fonction sur  $\tilde{\mathbf{X}}$  bi-homogène de degré  $(a, b)$ . L'expression suivante:

$$\mathcal{P}(f)(z, l; \xi, \alpha) = f(l \wedge \alpha, l) \alpha(z)^{-a} \omega_I$$

définit alors une 1-forme différentielle en la deuxième variable sur  $\tilde{\mathbf{U}}$  qui est bi-homogène en la première de degré  $(-a-2, a+b+1)$ ; On remarquera que l'expression  $f(l \wedge \alpha, l) \alpha(z)^{-a}$ , pour  $(z, l)$  fixé, ne dépend que du point  $I$  (remplacer  $\alpha$  par une combinaison linéaire de  $l$  et de  $\alpha$ ). Il en résulte que cette forme différentielle relative, qui 'ne dépend que de  $I$ ' est fermée. Compte tenu de ce qui a été expliqué plus haut, cet élément  $\mathcal{P}(f) \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{-a-2, a+b+1}))$  définit une classe de cohomologie dans  $H^1(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{-a-2, a+b+1})$ .

La transformation qui au faisceau  $\mathcal{F}_{a,b}$  associe le faisceau  $\mathcal{F}_{-a-2, a+b+1}$  admet une interprétation plus claire au niveau de la paramétrisation par les poids: on vérifie aisément que c'est celle qui associe au faisceau  $\mathcal{F}_{\mu}$  le faisceau  $\mathcal{F}_{\mu-e_3}$ . A une translation près, c'est donc simplement le changement de dictionnaire lorsque l'on passe de l'espace  $\mathbf{X}$  à  $\mathbf{\Omega}$ ; cette translation est exactement celle qui applique le cône du  $H^0$  dans le diagramme relatif à  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$  sur le cône inférieur gauche (où du  $H^1$  apparaît) dans le diagramme relatif à  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ .

On définit de façon duale la transformation  $\mathcal{P}'$ : partant de  $f' \in H^0(\mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a,b})$ , on pose:

$$\mathcal{P}'(f')(z, l; \xi, \alpha) = f'(z, z \wedge \xi) l(\xi)^{-b} \omega_J,$$

et on obtient ainsi un élément  $\mathcal{P}'(f') \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{a+b+1, -b-2}))$  qui est une forme fermée relative, et la classe de cohomologie correspondante dans  $H^1(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{a+b+1, -b-2})$ . Ici encore on vérifie que le changement de faisceau est celui qui associe à  $\mathcal{F}_{\mu}$  le faisceau  $\mathcal{F}_{\mu-e_2}$ , et cela correspond à la translation qui applique le cône du  $H^0$  dans le diagramme relatif à  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  sur le cône supérieur gauche (où du  $H^1$  apparaît) dans le diagramme relatif à  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ .

Pour alléger et lorsque cela ne créera pas de confusion, nous utiliserons la même notation  $\mathcal{P}(f)$  [resp.  $\mathcal{P}'(f')$ ] pour les formes différentielles et pour les classes qu'elles définissent dans la cohomologie.

### 3. Injectivité des Transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

Nous venons de définir deux applications linéaires:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : H^0(\mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b}) &\longrightarrow H^1(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{-a-2,a+b+1}), \\ \mathcal{P}' : H^0(\mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a,b}) &\longrightarrow H^1(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{a+b+1,-b-2}). \end{aligned}$$

**(3.1) PROPOSITION:** *Pour  $b \geq 0$  et  $a + b \leq -2$ , l'application  $\mathcal{P}$  est injective. De même, pour  $a \geq 0$  et  $a + b \leq -2$ , l'application  $\mathcal{P}'$  est injective.*

*Remarque:* L'hypothèse  $b \geq 0$  dans l'énoncé relatif à la transformation  $\mathcal{P}$  est en quelque sorte inutile: en effet si  $b < 0$ , il est clair que le faisceau  $\mathcal{F}_{a,b}$  n'a pas de section non nulle sur  $\mathbf{X}$ . De même pour l'hypothèse  $a \geq 0$  dans l'énoncé relatif à la transformation  $\mathcal{P}'$ . On notera aussi que les hypothèses de la proposition (3.1) délimitent précisément les cônes où apparaissent les sections automorphes.

**(3.2) Preuve de la proposition:** Supposons que  $\mathcal{P}(f)$  soit la différentielle d'une section holomorphe  $\phi \in \Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{F}_{a',b'})$ , où l'on a posé:  $a' = -a - 2$  et  $b' = a + b + 1$ . Alors  $\phi(z, l; \xi, \alpha)$  ne dépend en fait que du triple  $(z, l; I)$ , où  $I \in \Delta$  désigne comme plus haut le point d'intersection des droites  $l$  et  $\alpha$ : en effet, ce triple étant fixé, le couple  $(\xi, \alpha)$  décrit une variété connexe où la restriction de  $\phi$  admet une différentielle nulle (car  $\mathcal{P}(f)$  est un multiple de la différentielle d'une coordonnée de  $I$ , ici constante). Cela définit une fonction que nous notons un peu abusivement  $\phi(z, l; I)$ , le triple  $(z, l; I)$  variant dans  $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \Delta$  en étant assujéti à la condition que  $I \in l$ ; cette fonction est bi-homogène de degré  $(a', b')$  en  $(z, l)$ .

Posons alors:  $\psi(z, I) = \phi(\underline{z}, z \wedge I; I)$ ; c'est une fonction définie sur  $(V \setminus (\{0\} \cup \bar{\Delta})) \times \tilde{\Delta}$ , où  $\tilde{\Delta}$  (resp.  $\bar{\Delta}$ ) désigne l'image réciproque de  $\Delta$  (resp.  $\bar{\Delta}$ ) dans  $V \setminus \{0\}$ , et qui est bi-homogène de degré  $a' + b' = b - 1$  en  $z$  et  $b' = a + b + 1$  en  $I$ . Le théorème d'extension d'Hartogs, appliqué en la variable  $z$ , nous dit que  $\psi$  se prolonge en une fonction bi-homogène, que nous noterons encore  $\psi$ , définie sur  $(V \setminus \{0\}) \times \tilde{\Delta}$  (et même sur  $V \times \tilde{\Delta}$ ); c'est donc une fonction polynômiale en la variable  $z$ . D'autre part on a l'identité, pour  $l$  une équation de la droite  $[z I]$ :

$$z \wedge I = l \cdot \det_l(z, I);$$

en effet, si l'on pose  $z \wedge I = \kappa l$ , on a:

$$\kappa l(\ ) = z \wedge I(\ ) = \det(z, I, \ ) = l(\ ) \det_l(z, I).$$

Cette identité nous permet de retrouver  $\phi$  à partir de  $\psi$ :

$$\phi(z, l; I) = \det_l(z, I)^{-a-b-1} \cdot \psi(z, I).$$

Fixons  $l \in V^* \setminus \{0\}$  tel que la droite définie par  $l$  intersecte  $\Delta$ , et choisissons dans le plan vectoriel d'équation  $l = 0$  une droite affine ne passant pas par  $0$ , munie d'une coordonnée affine. Nous noterons par  $I(u)$  et  $z(v)$  les points de coordonnées

respectives  $u$  et  $v$ , vus comme points de ce plan; ils définissent donc deux points de la droite  $l$ .

On voit sans peine que  $\det_l(z(v), I(u)) = c(v - u)$ , où  $c \neq 0$  ne dépend pas de  $u$  ni de  $v$ , puis que la forme différentielle  $\omega_l$  peut s'exprimer en fonction du paramètre  $u$  de la façon suivante:

$$\omega_l(z(v), l) = c^{-1}(v - u)^{-2}du.$$

Remarquons que, pour  $\alpha \in V^*$  choisi de telle sorte que  $l \wedge \alpha = I$ , on a:  $\alpha(z) = \det_l(z, I)$ . En effet, fixons  $J \in V^*$  tel que  $J(z) = 0$  et que  $(l, \alpha, J)$  soit une base de volume 1 dans  $V^*$ ; posons  $\xi = \alpha \wedge J$ . Il existe un scalaire non nul  $\mu$  tel que  $J \wedge l = \mu z$ ; comme le triple  $(\alpha \wedge J, J \wedge l, l \wedge \alpha) = (\xi, \mu z, I)$  est la base duale de  $(l, \alpha, J)$ , on a:  $\alpha(z) = \mu^{-1}$ , et  $\det(\xi, \mu z, I) = 1$ . Il en résulte que

$$\alpha(z) = \mu^{-1} = \det(\xi, z, I) = l(\xi)\det_l(z, I) = \det_l(z, I).$$

Nous en déduisons que  $\mathcal{P}(f)$ , évalué en la fibre au dessus de  $(z(v), l)$  en fonction du paramètre  $u$ , est donné par l'expression:

$$\mathcal{P}(f) = f(u)(c(v - u))^{-a}c^{-1}(v - u)^{-2}du = c^{-a-1}f(u)(v - u)^{-a-2}du,$$

où l'on a noté pour simplifier:  $f(u) = f(I(u), l)$ . Cette expression doit coïncider avec la différentielle par rapport à  $u$  de la fonction:

$$\phi(z(v), l; I(u)) = c^{-a-b-1}(v - u)^{-a-b-1}\psi(u, v),$$

avec  $\psi(u, v) = \psi(z(v), I(u))$ : c'est une fonction polynômiale de degré  $\leq b - 1$  en la variable  $v$ , que l'on peut développer suivant les puissances de  $v - u$ :

$$\psi(u, v) = \sum_{i=0}^{b-1} \psi_i(u)(v - u)^i.$$

D'où:

$$\phi(z(v), l; I(u)) = c^{-a-b-1} \sum_{i=0}^{b-1} \psi_i(u)(v - u)^{i-a-b-1}$$

et, après dérivation et multiplication par  $c^{a+b+1}(v - u)^{a+2}$ , on obtient l'identité:

$$\sum_{i=0}^{b-1} \psi'_i(u)(v - u)^{i-b+1} - \sum_{i=0}^{b-1} (i - a - b - 1)\psi_i(u)(v - u)^{i-b} = c^b f(u).$$

On notera qu'en vertu de l'inégalité  $a + b \leq -2$ , les coefficients  $(i - a - b - 1)$  qui figurent dans la seconde somme sont tous non nuls. La formule ci-dessus fait apparaître des puissances  $(v - u)^j$ ,  $j$  variant entre  $-b$  et  $0$ . On identifie: pour  $j = -b$ , on obtient  $\psi_0 = 0$ ; ensuite, pour  $j = -b + 1$ , on obtient l'identité  $\psi_1 = 0$ . De proche en proche en raisonnant avec  $j$  croissant de  $-b$  à  $1$ , on obtient la nullité

de chacun des  $\psi_i$  ( $0 \leq i \leq b - 1$ ). Finalement, regardant le terme constant ( $j = 0$ ), on trouve que  $f(u) = f(I(u), l) = 0$ . Comme la droite  $l$  était arbitraire, on voit donc que notre section  $f$  est nulle, ce qui achève la démonstration.

Le cas de la transformation duale  $\mathcal{P}'$  se traite de façon identique.

**4. Intermède: Relations entre la cohomologie de  $\Gamma \setminus \Omega$  et celle de  $\Omega$ .**

(4.1) Les résultats ci-dessous, qui ne sont d'ailleurs pas tous indispensables pour la suite, peuvent se résumer par l'assertion vague que  $\Omega$  ne possède 'presque pas' de cohomologie en dehors du degré 1.

Le lemme suivant traduit la 'concavité' du sous-espace  $\Omega$  de  $\mathbf{D}$ :

(4.2) LEMME: *Toute section sur  $\Omega$  de l'un des faisceaux  $\mathcal{F}_{a,b}$  ci-dessus définis se prolonge en une section sur  $\mathbf{D}$  tout entier.*

(4.3) *Preuve du lemme:* Soit  $s$  une telle section, que l'on peut donc voir comme une fonction bi-homogène de degré  $(a, b)$  sur  $\tilde{\Omega}$ . Procédant de façon analogue à ce que l'on a fait lors de la preuve de la proposition (3.1), on définit une fonction  $\sigma$ , bi-homogène de degré  $(a + b, b)$  sur  $(V \setminus (\{0\} \cup \tilde{\Delta})) \times \tilde{\Delta}$ , par:

$$\sigma(z, I) = s(z, z \wedge I).$$

Comme plus haut, il résulte de l'égalité  $z \wedge I = l \cdot \det_l(z, I)$  que l'on peut retrouver  $s$  à partir de  $\sigma$ , par la formule:

$$s(z, I) = \det_l(z, I)^{-b} \sigma(z, I),$$

où  $I$  désigne un quelconque point de l'intersection avec  $\Delta$  de la droite  $l$ .

Le théorème d'extension d'Hartogs entraîne que  $\sigma$  se prolonge à  $(V \setminus \{0\}) \times \tilde{\Delta}$ ; on peut donc étendre  $s$ , en faisant usage de la formule ci-dessus, à l'ensemble des drapeaux  $(z, l) \in \mathbf{D}$  tels que la droite  $l$  intersecte  $\Delta$  (mais sans condition sur le point  $z$ ). On remarque alors que la condition que la droite intersecte  $\Delta$  délimite l'extérieur d'une boule dans  $\mathbf{P}(V^*)$ . On peut alors conclure en appliquant une nouvelle fois le théorème d'Hartogs en la variable  $l$ ; plus précisément, si on se limite à ne considérer que l'espace affine  $\mathcal{A}$  constitué des droites  $l$  qui ne passent pas par un point fixé  $A$  de  $\Delta$ , notre variété de drapeaux ainsi restreinte est isomorphe au produit  $\mathcal{A} \times \mathbf{P}^1$  (via la donnée de  $l$  et celle de la droite  $[A z]$ ). Notre section est alors définie sur  $\mathcal{A}' \times \mathbf{P}^1$ , où  $\mathcal{A}'$  désigne le complémentaire d'une boule fermée de  $\mathcal{A}$ , et on peut donc l'étendre à  $\mathcal{A} \times \mathbf{P}^1$  tout entier. □

On a donc  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a,b}) \simeq H^0(\mathbf{D}, \mathcal{F}_{a,b})$ , et c'est un espace de dimension finie. S'il n'est pas nul, c'est l'espace d'une représentation algébrique irréductible du groupe  $G$ . On retrouve ainsi le fait, déjà constaté en (1.2), que les groupes de sections

$$H^0(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,b}) = H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a,b})^\Gamma$$

sont *nuls* sauf dans le cas du faisceau trivial  $\mathcal{F}_{0,0}$ , pour lequel on obtient un espace de dimension 1 (en effet,  $\Gamma$  étant Zariski-dense dans  $G$ , les invariants par  $\Gamma$  coïncident avec les invariants par  $G$  tout entier; d'autre part, la représentation triviale est obtenue seulement pour le faisceau trivial.)

**(4.4) Remarque:** Il est bien connu également (cf [Sc] §4) que  $\Omega$  est 2-complet au sens d'Andreotti et Grauert, ce qui a pour conséquence l'annulation de la cohomologie  $H^q(\Omega, \mathcal{F}_{a,b})$  pour  $q > 1$ .

Le lemme qui précède entraîne le suivant:

**(4.5) LEMME:** *Quelques soient  $a$  et  $b$ , on a:  $H^1(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a,b})) = 0$ .*

*Preuve:* Notons  $\mathcal{V} = H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a,b})$ . Il est bien connu que la cohomologie de  $\Gamma$  à coefficients dans  $\mathcal{V}$ , qui coïncide avec la cohomologie du système local défini par  $\mathcal{V}$  sur l'espace quotient  $\Gamma \backslash \Delta$ , se calcule comme la  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie de  $\mathcal{A}_\Gamma \otimes \mathcal{V}$ , où  $\mathcal{A}_\Gamma$  désigne l'espace des formes automorphes  $\Gamma$ -invariantes. L'annulation de  $H^1$  pour des groupes unitaires tels que ceux considérés ici avait été d'abord remarquée dans certains cas par Rapoport et Zink, puis prouvée par Rogawski: voir [Ro] (15.2), ainsi que [Cl] pour une discussion plus générale. Cette annulation tient au fait que les seules représentations irréductibles qui peuvent posséder de la 1-cohomologie (après torsion par  $\mathcal{V}$ ) sont certaines représentations non tempérées, dont on prouve qu'elles n'interviennent pas dans  $\mathcal{A}_\Gamma$  pour un groupe unitaire associé à une algèbre à division.

**(4.6)** Le lemme (4.5) admet la conséquence suivante: écrivant la suite exacte des termes de bas degrés associée à la suite spectrale de Cartan–Leray:

$$H^p(\Gamma, H^q(\Omega, \mathcal{F}_{a,b})) \Rightarrow H^{p+q}(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{a,b}),$$

on obtient:

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{a,b})^\Gamma \longrightarrow H^2(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a,b}));$$

la 1-cohomologie de  $\Gamma \backslash \Omega$  apparaît donc comme un sous-espace de la cohomologie automorphe. On laisse au lecteur le soin de vérifier que si une classe de 1-cohomologie  $\Gamma$ -invariante est donnée, via la théorie de Gindikin, par une forme différentielle  $\omega \in H^0(\mathbf{U}, \Omega_\pi^1(\mathcal{F}_{a,b}))$ , alors son image dans  $H^2(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a,b}))$  s'obtient de la façon suivante: utilisant l'invariance de la classe de cohomologie de  $\omega$ , on voit que pour chaque  $\gamma \in \Gamma$ , la différence  $\gamma.\omega - \omega$  est la différentielle d'une section  $s_\gamma \in H^0(\mathbf{U}, \mathcal{F}_{a,b})$ . Pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ , la section:

$$c(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1.s_{\gamma_2} - s_{\gamma_1\gamma_2} + s_{\gamma_1},$$

admet une différentielle relative nulle. C'est donc un élément de  $H^2(\Omega, \mathcal{F}_{a,b})$ , et  $c$  est un 2-cocycle qui définit la classe de 2-cohomologie cherchée.

**5. Les Transformations  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  : version automorphe**

(5.1) Revenons maintenant à notre transformation  $\mathcal{P}$  [resp.  $\mathcal{P}'$ ]. Pour  $f \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$ , il est clair que la forme différentielle relative  $\mathcal{P}(f)$  est  $\Gamma$ -invariante; en vertu de ce qu'on vient de voir, son image dans  $H^2(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a',b'}))$  est alors nulle. Par suite  $\mathcal{P}(f) \in H^1(\Omega, \mathcal{F}_{a',b'})^\Gamma$  provient d'un élément bien déterminé de  $H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a',b'})$ , lequel sera noté encore  $\mathcal{P}(f)$ . Nous retrouverons au paragraphe suivant le fait que  $\mathcal{P}(f)$  provient de  $H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a',b'})$  en exprimant cet élément sous la forme d'une classe de cohomologie de Dolbeault: on obtiendra une forme ( $\bar{\partial}$ -fermée) sur  $\Omega$  invariante par  $\Gamma$ , d'où une forme sur  $\Gamma \setminus \Omega$ . Tout ceci vaut aussi pour la transformation  $\mathcal{P}'$ .

On peut aussi retrouver ce qui précède en utilisant la proposition suivante:

(5.2) PROPOSITION: *L'espace  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$  est de Stein.*

En effet, on peut alors appliquer les résultats de Gindikin rappelés en (2.1) à la projection  $\pi : \Gamma \setminus \mathbf{U} \rightarrow \Gamma \setminus \Omega$  et remarquer que pour  $f \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$ , la forme différentielle relative  $\mathcal{P}(f)$  définit de façon évidente un élément de  $H^0(\Gamma \setminus \mathbf{U}, \Omega_\pi^1(\mathcal{F}_{a',b'}))$ , et donc aussi sa classe dans  $H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a',b'})$ .

De même pour l'application  $\mathcal{P}'$ .

(5.3) *Démonstration de la proposition (5.2):* Remarquons que  $\mathbf{U}$  apparaît de façon équivariante comme un ouvert du produit  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  : en effet, reprenant les notations de (2.1), la donnée d'un point  $(z, l; \xi, \alpha)$  de  $\mathbf{U}$  revient à la donnée du couple  $((I, l), (\xi, J)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ , ce dernier étant assujéti à la condition:  $\xi \notin l$ .

Le procédé suivant permet d'obtenir des fonctions holomorphes  $\Gamma$ -invariantes sur  $\mathbf{U}$  à partir de formes automorphes sur  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ : partant d'entiers  $a$  et  $b$  vérifiant les inégalités  $b \geq 0$  et  $a + b \leq -2$ , et de sections:

$$f \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b}), \quad g \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{b,a})$$

(cf (1.3)), on pose, pour  $((\tilde{I}, \tilde{l}), (\tilde{\xi}, \tilde{J})) \in \tilde{\mathbf{U}}$ :

$$\Phi_{f,g}((\tilde{I}, \tilde{l}), (\tilde{\xi}, \tilde{J})) = f(\tilde{I}, \tilde{l})g(\tilde{\xi}, \tilde{J})\tilde{J}(\tilde{I})^{-a}\tilde{l}(\tilde{\xi})^{-b}.$$

Cette expression, qui est homogène de degré 0 en chacune des variables et invariante sous  $\Gamma$ , définit bien une fonction sur  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ .

D'autre part, il résulte de la théorie des séries de Poincaré que pour  $a$  et  $b$  convenablement choisis ( $b > 0$ ), le faisceau  $\mathcal{F}_{a,b}$  sur  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$  est très ample, autrement dit que les sections correspondantes séparent les points (y compris infinitésimalement). Il en est alors de même du faisceau  $\mathcal{F}_{b,a}$  sur  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$ , comme on le voit par dualité. On en déduit alors sans mal que l'ensemble des fonctions  $\Phi_{f,g}$  obtenues, pour un tel choix de  $a$  et  $b$ , sépare les points de  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ .

Il nous reste alors à prouver la propriété suivante (convexité holomorphe): pour toute suite  $((I_n, l_n), (\xi_n, J_n))$ , sans valeur d'adhérence, d'éléments de  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ , il existe une fonction holomorphe  $\Phi$  sur  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$  telle que la suite  $\Phi((I_n, l_n), (\xi_n, J_n))$  ne soit pas bornée. Comme le quotient  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  est compact, nous pouvons supposer (quitte à extraire une sous-suite) qu'on a choisi une suite de représentants  $((I_n, l_n), (\xi_n, J_n)) \in \mathbf{U}$  de telle sorte que la seconde composante  $(\xi_n, J_n)$  converge vers un point  $(\xi, J)$  de  $\mathbf{Y}$ . Parce que notre suite ne possède pas de valeur d'adhérence, on peut supposer (extrayant de nouveau une suite) soit que  $I_n$  tend vers un point intérieur  $I$  de la boule  $\Delta$  et que  $l_n$  converge vers une droite  $l$  telle que  $\xi \in l$ , ou bien sinon que  $I_n$  a pour limite un point de la frontière de  $\Delta$ . Dans le premier cas il suffit de choisir  $a$  et  $b$  comme plus haut, avec  $b > 0$ , et  $f$  et  $g$  ne s'annulant pas en  $(I, l)$  et  $(\xi, J)$  respectivement, pour que  $|\Phi_{f,g}((I_n, l_n), (\xi_n, J_n))|$  tende vers  $+\infty$ .

Plaçons nous maintenant dans le second cas, où  $I_n$  converge vers la frontière, et limitons nous pour simplifier à n'utiliser que les faisceaux que l'on obtient pour  $b = 0$  ( $a \leq -2$ ), et dont les sections sont en fait les sections des faisceaux correspondants sur la variété de Picard  $\Gamma \setminus \Delta$  et sur sa conjuguée. On peut choisir des systèmes de coordonnées projectives  $\tilde{I}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \in V$  des points  $I_n$  normalisés de

telle sorte que  $|x_n|^2 + |y_n|^2 - |z_n|^2 = -1$ ; le fait que  $I_n$  tende vers la frontière de la boule implique que  $|z_n| \rightarrow +\infty$ , et il est facile d'en déduire que  $|\tilde{J}_n(\tilde{I}_n)| \rightarrow +\infty$ , où un système de représentants  $\tilde{J}_n \in V^*$  des  $J_n$  est supposé choisi de façon à converger dans  $V^*$  vers un représentant  $\tilde{J}$  de  $J$ . On remarque alors que  $f(\tilde{I}_n)$  est bornée: en fait  $f$  est bornée sur l'ensemble des points  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \setminus \{0\}$  qui se projettent sur  $\Delta$  et qui

vérifient  $|x|^2 + |y|^2 - |z|^2 = -1$ , ainsi qu'on le voit en prenant l'image réciproque d'un domaine fondamental (relativement compact) de  $\Delta$  modulo l'action de  $\Gamma$ . De plus, il résulte de la relative compacité d'un tel domaine fondamental que l'on peut trouver des  $\gamma_n \in \Gamma$  et extraire une sous-suite de telle sorte que  $\gamma_n(\tilde{I}_n)$  converge vers  $\tilde{I}' \in V$  se projetant sur un point intérieur  $I'$  de  $\Delta$ . De tout cela on déduit que si la suite

$$\Phi_{f,g}(I_n, J_n) = f(\gamma_n(\tilde{I}_n))g(\tilde{J}_n)\tilde{J}_n(\tilde{I}_n)^{-a}$$

est bornée, alors  $f(\tilde{I}')g(\tilde{J}) = 0$ . Cela ne peut pas être toujours le cas, car les sections de  $\mathcal{F}_{a,0}$  [resp. de  $\mathcal{F}_{0,a}$ ] séparent, lorsque  $a$  est suffisamment petit, les points de  $\Gamma \setminus \Delta$  [resp. de la variété duale]: il existe donc bien un choix de  $a, f$ , et  $g$  tel que cette suite ne soit pas bornée. □

**(5.4) LE THÉORÈME DE BIJECTIVITÉ DANS LE CAS AUTOMORPHE**

Pour  $a$  et  $b$  comme en (3.1), c'est-à-dire vérifiant les inégalités  $b \geq 0$  et  $a + b \leq -2$ , et posant  $a' = -a - 2$ ,  $b' = a + b + 1$ , nous avons donc défini une application

linéaire:

$$\mathcal{P} : H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{a',b'}).$$

De même, pour  $a \geq 0$  et  $a + b \leq -2$ ,  $a' = a + b + 1$ ,  $b' = -b - 2$ , on a:

$$\mathcal{P}' : H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{a',b'}).$$

**(5.5) THÉORÈME:** *Pour  $(a, b) \neq (-3, 0)$ , l'application  $\mathcal{P}$  est un isomorphisme; de même, pour  $(a, b) \neq (0, -3)$ ,  $\mathcal{P}'$  est un isomorphisme.*

**(5.6)** Le ‘grain de sel’ pour la transformation  $\mathcal{P}$  lorsque l’on part d’une section du faisceau  $\mathcal{F}_{-3,0}$  consiste en ceci: la représentation triviale intervient dans l’espace d’arrivée  $H^1(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{1,-2})$  mais pas dans l’espace de départ. Elle intervient par une contribution de dimension 1, qui ne saurait appartenir à l’image de  $\mathcal{P}$ . On voit d’ailleurs que cette contribution triviale est représentée par la forme  $\omega_J$ , c’est-à-dire qu’elle provient en quelque sorte de la représentation triviale, vue dans  $H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{0,0})$ , par un prolongement (trivial) de  $\mathcal{P}'$ . De même en ce qui concerne la transformation  $\mathcal{P}'$ .

**(5.7) Preuve:** Il résulte de la proposition (3.1) que  $\mathcal{P}$  est injective, et il suffit donc de montrer que les deux espaces considérés ont la même dimension. D’après ce que nous avons rappelé en (1.2), la dimension de  $H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$  est égale à la somme des dimensions des espaces  $H^0(\mathfrak{b}', T, \pi \otimes \mu)$ , où  $\mu$  est associé au couple  $(a, b)$  (paramétrisation relative à  $\mathbf{X}$ ), où  $\mathfrak{b}'$  désigne l’algèbre de Lie du sous-groupe de Borel attaché à  $\mathbf{X}$ , et enfin où  $\pi$  décrit les composantes irréductibles de l’espace  $\mathcal{A}_\Gamma$  des formes automorphes. Or, utilisant ce qui a été expliqué en (1.2), on voit que, parmi les représentations irréductibles de  $G$  qui peuvent intervenir, seule la série discrète holomorphe (ou limite d’icelle)  $\pi_\lambda$  de paramètre  $\lambda = \mu + e_2$  admet, après torsion par  $\mu$ , de la  $(\mathfrak{b}', T)$ -cohomologie, laquelle est alors de dimension 1. La dimension cherchée est donc égale à la multiplicité avec laquelle  $\pi_\lambda$  apparaît dans  $\mathcal{A}_\Gamma$ . De même, la dimension de  $H^1(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{a',b'})$  est égale à la somme des dimensions des espaces  $H^1(\mathfrak{b}, T, \pi \otimes \mu')$ , où  $\mathfrak{b}$  correspond à  $\mathbf{\Omega}$  et où  $\mu'$  est maintenant associé au couple  $(a', b')$  (paramétrisation relative à  $\mathbf{\Omega}$ ). Pour ce  $H^1$ , c’est la série discrète de paramètre  $\lambda' = \mu' - e_1$  qui contribue (une contribution encore de dimension 1). Or  $\mu' = \mu - e_3$  (cf. (2.3)); par suite,  $\lambda' = \lambda$ , et l’on voit donc que nos deux espaces admettent la même dimension (à savoir, la multiplicité de  $\pi_\lambda$  dans  $\mathcal{A}_\Gamma$ ). Un argument identique s’applique à la transformation  $\mathcal{P}'$ .

### 6. Expression de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en cohomologie de Dolbeault

**(6.1)** Voici, d’après ([Ea-Gi-Wo 1] §3), l’application entre cochaînes au sens de Gindikin (cf. ci-dessus (2.1)) et cochaînes de Dolbeault qui induit l’isomorphisme naturel entre les deux cohomologies: on commence par choisir une section  $s$  de

la projection  $\pi$  de  $\mathbf{U}$  sur  $\mathbf{\Omega}$ ; ici une section naturelle (équivariante sous l'action du groupe  $G$ ) est donnée par:  $s(z, l) = (z, l; \xi, \alpha)$ , où  $(\xi, \alpha) = (l^\perp, z^\perp)$  désigne le drapeau orthogonal à  $(z, l)$  par rapport à la forme hermitienne  $h$ .

Étant donnée  $\omega \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega^i_\pi(\mathcal{F}))$  une  $i$ -forme différentielle relative, on commence par la relever localement en une forme différentielle absolue  $\tilde{\omega} \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega^i(\mathcal{F}))$ , puis on montre que la composante de type  $(0, i)$  de son pull-back par  $s$ :  $\kappa\omega = (s^*(\tilde{\omega}))^{(0,i)}$  ne dépend pas du choix du relèvement  $\tilde{\omega}$ , et définit ainsi l'application cherchée:

$$\kappa : \Gamma(\mathbf{U}, \Omega^i_\pi(\mathcal{F})) \rightarrow \Gamma(\mathbf{\Omega}, \Omega^{0,i}(\mathcal{F})).$$

Nous allons déterminer ci-dessous l'image par  $\kappa$  des différentielles canoniques  $\omega_I$  et  $\omega_J$  construites en (2.2).

**(6.2)** Fixons un difféomorphisme  $G$ -équivariant entre  $\mathbf{\Omega}$  et  $G/T$  comme en (1.1) ci-dessus, c'est-à-dire tel que la classe de l'origine corresponde au drapeau

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_0 = (0 \ 1 \ 0).$$

Le stabilisateur de ce drapeau dans  $G_{\mathbb{C}}$ , ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, consiste alors en le sous-groupe de Borel  $B$ , constitué des matrices de la forme:  $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ . D'autre part, l'espace tangent complexifié à  $G/T$  en la classe de l'élément neutre s'identifie à  $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ , où  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{t}$  désignent les algèbres de Lie complexifiées de  $G$  et  $T$ . Enfin, on peut identifier  $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$  à la somme  $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$ , où  $\mathfrak{n}$  (resp.  $\mathfrak{n}^-$ ) désigne le radical nilpotent de l'algèbre de Lie de  $B$  (resp. de l'algèbre opposée relativement à  $\mathfrak{t}$ ). Si on transporte la structure complexe de  $\mathbf{\Omega}$  sur  $G/T$  par le difféomorphisme ci-dessus, alors l'espace tangent holomorphe (resp. anti-holomorphe) s'identifie à  $\mathfrak{n}^-$  (resp.  $\mathfrak{n}$ ).

Les trois matrices suivantes constituent une base de  $\mathfrak{n}$  (notations du §1 de [Ca]):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons alors par  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$  les trois formes linéaires sur l'algèbre  $\mathfrak{g}$  définies comme suit: elles s'annulent sur  $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^-$  et leurs restrictions à  $\mathfrak{n}$  constituent la base duale de la base  $(B, C, A)$ . Ces trois formes se prolongent en des formes différentielles invariantes sur  $G$  et se transforment sous l'action du tore  $T$  par les caractères de différentielles respectives  $e_3, e_2, -e_1$ . Comme il est expliqué dans ([Ca] (3.4)) ou dans ([Gr-Sc] §1 et 2), il leur correspond trois formes différentielles  $G$ -invariantes de type  $(0, 1)$ :

$$\bar{\eta}_1 \in \Gamma(\mathbf{\Omega}, \Omega^{0,1}(\mathcal{F}_{-e_3})), \quad \bar{\eta}_2 \in \Gamma(\mathbf{\Omega}, \Omega^{0,1}(\mathcal{F}_{-e_2})), \quad \bar{\eta}_3 \in \Gamma(\mathbf{\Omega}, \Omega^{0,1}(\mathcal{F}_{e_1})).$$

On peut calculer la différentielle anti-holomorphe de chacune d'elles en utilisant la formule de Maurer–Cartan comme dans ([Gr-Sc] (1.6)) ou bien en remarquant (cf. [Ca] (3.4)) que la différentielle  $\bar{\partial}$  correspond à l'opérateur cobord du complexe qui calcule la  $n$ -cohomologie. De l'une ou l'autre de ces façons, on déduit des formules

$$[A, B] = [A, C] = 0 ; [B, C] = A$$

le résultat suivant:  $\bar{\partial}\bar{\eta}_1 = \bar{\partial}\bar{\eta}_2 = 0$ ;  $\bar{\partial}\bar{\eta}_3 = -\bar{\eta}_1 \wedge \bar{\eta}_2$ .

**(6.3)** Nous allons montrer maintenant que les images des formes  $\omega_I$  et  $\omega_J$ , par l'opérateur  $\kappa$  ci-dessus défini, coïncident à des multiples scalaires près avec  $\bar{\eta}_1$  et  $\bar{\eta}_2$ . Ces scalaires dépendent de certaines normalisations que nous devons préciser. La première de ces normalisations tient au fait que nous avons défini nos faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$  de deux manières essentiellement différentes: d'une part, à partir des fonctions bi-homogènes d'un certain degré sur  $\tilde{\Omega}$ , et d'autre part à partir du caractère  $\mu$  de  $T$ , ce dernier étant vu comme le stabilisateur du drapeau

$$(z_0, l_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (0 \ 1 \ 0) \right\}.$$

Pour identifier nos deux constructions, il suffit d'identifier à  $\mathbf{C}$  la fibre au dessus de  $(z_0, l_0)$  du fibré déterminé par la première construction, et nous le ferons en évaluant nos fonctions bi-homogènes au point

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (0 \ 1 \ 0) \right\}$$

de  $\tilde{\Omega}$ . La seconde normalisation est le choix du déterminant sur  $V$ , que nous avons utilisé dans nos constructions du Paragraphe 2: nous prendrons le déterminant habituel sur  $V = \mathbf{C}^3$ .

Ces normalisations étant précisées, on a la:

**(6.4) FORMULE:**  $\kappa(\omega_I) = -\bar{\eta}_1$ ,  $\kappa(\omega_J) = -\bar{\eta}_2$ .

**(6.5) Preuve:** Tout étant  $G$ -équivariant, il suffit de démontrer ces formules au point 'base'  $(z_0, l_0)$  qui correspond à la classe de l'élément neutre dans  $G/T$ . D'autre part, une origine  $p_0 \neq z$  étant choisie localement sur la droite  $l$ , et variant de façon holomorphe, on peut prendre pour relèvement  $\tilde{\omega}_I$  la différentielle absolue de la coordonnée  $x(I)$ . De même on définit  $\tilde{\omega}_J$  à partir du choix local d'une origine  $q_0 \neq l$  de la droite définie par  $z$ .

Considérons les applications  $f_1$  et  $f_2$  d'un voisinage de  $\mathbf{1}$  dans  $G$  vers  $\mathbf{C}$  qui sont définies par:

$$f_1(g) = x(I(g(z_0, l_0))) ; f_2(g) = y(J(g(z_0, l_0))) ,$$

où l'on désigne par  $I(z, l)$  (resp.  $J(z, l)$ ) le point d'intersection des droites  $l$  et  $z^\perp$  (resp. la droite joignant  $z$  et  $l^\perp$ ). Nous choisirons comme origine  $p_0(g)$  sur la droite  $g.l_0$  le point dont la première coordonnée projective est nulle. De même sur la droite du dual définie par  $g.z_0$  nous prendrons  $q_0(g) = (* 0 *)$ . Pour ce choix, on a  $p_0(\mathbf{1}) = I(z_0, l_0)$ ,  $q_0(\mathbf{1}) = J(z_0, l_0)$ , de sorte que  $f_1(\mathbf{1}) = f_2(\mathbf{1}) = 0$ . On obtiendra les formes  $\kappa(\omega_I)$  et  $\kappa(\omega_J)$  au point base en évaluant sur  $n$  les différentielles à l'élément neutre des applications  $f_1$  et  $f_2$ .

Nous allons déterminer ces différentielles: partons d'un élément de l'algèbre de Lie (réelle) de  $G$  modulo l'algèbre de Lie de  $T$  (car il est bien clair que notre différentielle s'annule sur cette dernière):

$$X = \begin{pmatrix} * & a & b \\ -\bar{a} & * & c \\ \bar{b} & \bar{c} & * \end{pmatrix}.$$

Alors pour  $t$  réel, la matrice:

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 + t* & ta & tb \\ -t\bar{a} & 1 + t* & tc \\ t\bar{b} & t\bar{c} & 1 + t* \end{pmatrix} + \text{termes de deg. } \geq 2 \text{ en } t$$

transforme le drapeau  $(z_0, l_0)$  en le drapeau  $(z, l)$  déterminé à des termes de degré  $\geq 2$  près par:

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ -t\bar{a} \\ t\bar{b} \end{pmatrix} + \dots, \quad l = (t\bar{a}, 1, -tc) + \dots .$$

On exprime aussi le drapeau orthogonal:

$$\xi = l^\perp = \begin{pmatrix} ta \\ 1 \\ t\bar{c} \end{pmatrix} + \dots, \quad \alpha = z^\perp = (1, -ta, -tb) + \dots .$$

Le point d'intersection  $I$  de  $l$  et  $\alpha$  ainsi que la droite  $J$  joignant  $z$  et  $\xi$  admettent alors les coordonnées:

$$I = \begin{pmatrix} tb \\ tc \\ 1 \end{pmatrix} + \dots, \quad J = (-t\bar{b}, -t\bar{c}, 1) + \dots .$$

Finalement, les ‘origines’  $p_0$  et  $q_0$  sont données par:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ tc \\ 1 \end{pmatrix} + \dots, \quad q_0 = (-t\bar{b}, 0, 1) + \dots.$$

On calcule alors aussitôt:

$$\det_I(I, p_0) = -tb + \dots, \quad \det_I(I, z) = 1 + \dots, \quad \det_I(p_0, z) = 1 + \dots;$$

et:

$$\det_z(J, q_0) = -t\bar{c} + \dots, \quad \det_z(J, l) = -1 + \dots, \quad \det_z(q_0, l) = -1 + \dots.$$

D’où:

$$x(I) = -tb + \dots, \quad y(J) = -t\bar{c} + \dots,$$

et nous avons ainsi déterminé les différentielles en **1** des applications  $f_1$  et  $f_2$ :

$$df_1 \begin{pmatrix} * & a & b \\ -\bar{a} & * & c \\ \bar{b} & \bar{c} & * \end{pmatrix} = -b; \quad df_2 \begin{pmatrix} * & a & b \\ -\bar{a} & * & c \\ \bar{b} & \bar{c} & * \end{pmatrix} = -\bar{c}.$$

On détermine enfin l’image par  $\kappa$  de  $\omega_I$  et  $\omega_J$  en évaluant ces deux différentielles sur les éléments de  $\mathfrak{n}$ . Décomposons  $A$ ,  $B$ , et  $C$  comme combinaisons d’éléments de l’algèbre de Lie réelle:

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix};$$

on voit alors que  $df_1$  s’annule sur  $A$  et  $C$  et que  $df_1(B) = -1$  tandis que  $df_2$  est nulle sur  $A$  et  $B$  et que  $df_2(C) = -1$ , conformément au résultat annoncé.

**(6.6)** Il est facile maintenant d’exprimer  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  en cohomologie de Dolbeault. Pour cela, étant donné  $(z, l) \in \tilde{\Omega}$ , choisissons un représentant  $(\xi, \alpha) \in \tilde{\Omega}$  du drapeau orthogonal à  $(z, l)$  en le normalisant de telle sorte que  $\alpha(z) = l(\xi) = 1$ . Ensuite, choisissons un représentant, noté  $I(z, l) \in V$ , du point d’intersection de  $l$  et  $\alpha$  de telle sorte que  $\det(z, \xi, I(z, l)) = -1$ . De même, fixons une équation  $J(z, l) \in V^*$  de la droite  $[z \xi]$ , normalisée de telle manière que  $\det(l, \alpha, J(z, l)) = -1$ . On voit alors

que les deux bases  $(z, \xi, -I(z, l))$  et  $(\alpha, l, J(z, l))$  sont duales l'une de l'autre, et donc que  $J(z, l)I(z, l) = -1$ . On en déduit aussi que  $l \wedge \alpha = I(z, l)$ ,  $z \wedge \xi = J(z, l)$ , ainsi que les deux égalités suivantes, qui caractérisent le choix effectué de nos représentants:

$$\det_l(z, I(z, l)) = 1, \quad \det_z(l, J(z, l)) = 1.$$

Remarque que  $I(z, l)$  [resp.  $J(z, l)$ ] est bi-homogène de degré  $(-1, +1)$  [resp.  $(+1, -1)$ ] en  $(z, l)$ .

Compte tenu de la définition (2.3) des transformations  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  et de ce que nous avons rappelé en (6.1), ainsi que du calcul de  $\kappa(\omega_I)$  et  $\kappa(\omega_J)$  ci dessus, on obtient finalement l'expression cherchée en cohomologie de Dolbeault:

*Partons de  $f \in H^0(\mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$ ; alors  $\mathcal{P}(f)$  est représentée par la classe en cohomologie de Dolbeault de la forme différentielle:  $-f(I(z, l), l) \bar{\eta}_1$  (on remarquera que c'est bien un élément de  $H^0(\mathbf{\Omega}, \Omega^{0,1}(\mathcal{F}_{-a-2, a+b+1}))$ ).*

*De même, pour  $f' \in H^0(\mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a,b})$ ,  $\mathcal{P}'(f')$  est représentée par la classe de la forme:  $-f'(z, J(z, l)) \bar{\eta}_2$ .*

### 7. Cup-produits

Si l'on part de deux formes modulaires

$$f \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b}) \quad \text{et} \quad f' \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a',b'}),$$

alors on peut former le cup-produit  $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}'(f')$ . C'est un élément de  $H^2(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{-a+a'+b'-1, a+b-b'-1})$  qui peut s'exprimer dans le formalisme de Gindikin par la 2-forme différentielle relative suivante sur  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ :

$$c_G(z, l; \xi, \alpha) = f(l \wedge \alpha, l) \cdot f'(z, z \wedge \xi) \cdot \alpha(z)^{-a} l(\xi)^{-b'} \cdot \omega_I \wedge \omega_J,$$

tandis qu'en cohomologie de Dolbeault cette classe peut être représentée par la forme de type  $(0, 2)$  sur  $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$  qui s'écrit, avec les notations ci-dessus:

$$c_D(z, l) = f(I(z, l), l) \cdot f'(z, J(z, l)) \cdot \bar{\eta}_1 \wedge \bar{\eta}_2.$$

Le cas particulier le plus intéressant de ces cup-produits est celui où  $b = a' = 0$ , avec  $a = b'$  ( $\leq -2$ ): la forme modulaire  $f$ , qui ne dépend que de  $I \in \Delta$ , est une forme modulaire de poids  $-a$  au sens usuel; de même,  $f'$  ne dépend que de  $J$ . Il s'agit de formes associées à des séries discrètes holomorphe et anti-holomorphe de paramètres les plus proches possibles du mur compact (cf. (1.3)). Le cup-produit obtenu est alors un élément de  $H^2(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}, \mathcal{F}_{-1,-1})$ , correspondant à une représentation de  $G_{\mathbf{R}}$  qui est une limite dégénérée de série discrète. On a:

$$c_G(z, l; \xi, \alpha) = f(l \wedge \alpha) \cdot f'(z \wedge \xi) \cdot (\alpha(z)l(\xi))^{-a} \cdot \omega_I \wedge \omega_J,$$

ou, si l'on préfère:

$$c_G(z, l; \zeta, \alpha) = f(l \wedge \alpha) \cdot f'(z \wedge \zeta) \cdot (-z \wedge \zeta) \cdot (l \wedge \alpha)^{-a} \cdot \omega_I \wedge \omega_J ;$$

et:

$$c_D(z, l) = f(I(z, l)) \cdot f'(J(z, l)) \cdot \bar{\eta}_1 \wedge \bar{\eta}_2.$$

Combinant le théorème (5.2) de [Ca] et notre résultat (5.5) ci-dessus, on obtient le fait suivant: *dès que  $a \leq -5$ , les cup-produits ainsi obtenus engendrent virtuellement (c'est-à-dire, quitte à remplacer  $\Gamma$  par un de ses sous-groupes de congruence) la cohomologie  $H^2(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{-1,-1})$ .*

### 8. Autres transformations

**(8.1)** Commençons par remarquer que la définition de la transformation  $\mathcal{P}$  peut s'étendre au cas d'une classe de 1-cohomologie dans  $H^1(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$ : en effet, il résulte de la théorie de Gindikin qu'une telle classe peut être représentée par une 1-forme différentielle relative fermée sur  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ , relativement cette fois à la projection naturelle  $\pi_{\mathbf{X}}$  sur  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ , laquelle envoie  $(z, l; \zeta, \alpha)$  sur  $(I, l)$ , avec  $I = l \wedge \alpha$ . Partons d'une telle forme  $\sigma$ ; pour  $(z, l) \in \Omega$  fixé, on peut restreindre  $\sigma$  à la fibre  $\pi^{-1}(z, l)$  et obtenir ainsi une 1-forme relative à la projection de cette fibre sur la droite  $l$ , qui envoie  $(\zeta, \alpha)$  sur le point  $I$ . Cette restriction  $\sigma_{z,l}$  peut se relever localement en une forme différentielle absolue sur la fibre  $\pi^{-1}(z, l)$ , bien définie modulo un multiple de  $\omega_I$ , et par conséquent le cup-produit avec  $\omega_I$ :  $\alpha(z)^{-a} \sigma(l \wedge \alpha, l) \wedge \omega_I$  est bien défini; c'est une 2-forme relativement à  $\pi$  sur  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ , qui est relativement fermée et qui est exacte si  $\sigma$  l'est. Nous avons ainsi défini une application de  $H^1(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$  vers  $H^2(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{-a-2, a+b+1})$ , que nous noterons  $\mathcal{Q}$  ou  $\mathcal{R}$  suivant que le faisceau  $\mathcal{F}_{a,b}$  correspond à un point du secteur latéral gauche ou inférieur droit du diagramme correspondant (cf. figure ci-dessous).

D'une manière tout à fait semblable, on définit deux transformations de  $H^1(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a,b})$  vers  $H^2(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a+b+1, -b-2})$ , notées  $\mathcal{Q}'$  ou  $\mathcal{R}'$  – suivant que l'on part du secteur latéral gauche ou supérieur droit – et qui généralisent  $\mathcal{P}'$ :

$$\sigma' \rightarrow l(\zeta)^{-b} \sigma'(z, z \wedge \zeta) \wedge \omega_J .$$

**(8.2)** Il est possible aussi de définir de façon analogue des transformations de la cohomologie de  $\Gamma \setminus \Omega$  vers celles de  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$  et de  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$ . Pour cela, on commence par effectuer des constructions semblables à celles de (2.2): sur la fibre au dessus de  $(I, l)$  de la projection  $\pi_{\mathbf{X}}$ , on peut définir une coordonnée du point  $z \in l$ :

$$x(z) = \frac{\det_l(z, z_0)}{\det_l(z, I) \det_l(z_0, I)},$$

laquelle dépend du choix d'une origine  $z_0 \neq I$ . Sa différentielle relative, que nous noterons  $\omega_{\mathbf{X},z}$  est donc bien définie et c'est un élément de  $\Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi_{\mathbf{X}}}^1(\mathcal{F}_{-2,1}))$ .

De même, notons  $\pi_Y$  la projection de  $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ , sur  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  qui envoie  $(z, l; \xi, \alpha)$  sur  $(z, J)$ , avec  $J = [z, \xi]$ ; sur la fibre au dessus de  $(z, J)$  on peut définir localement une coordonnée  $y(l)$  par:

$$y(l) = \frac{\det_z(l, l_0)}{\det_z(l, J)\det_z(l_0, J)}$$

nous noterons  $\omega_{Y,l} \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi_Y}^1(\mathcal{F}_{1,-2}))$  la différentielle relative de  $y(l)$ .

Partons d'une forme relativement fermée  $\phi \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega_{\pi}^1(\mathcal{F}_{a,b}))$ ; on peut la restreindre, de façon analogue à ce que nous avons fait ci-dessus, à la fibre au-dessus de  $(I, l)$  de la projection  $\pi_X$  et obtenir ainsi sur cette fibre une forme différentielle relative à la projection sur la droite  $l$  qui envoie  $(z, \xi)$  sur  $z$ ; on constate comme ci-dessus que la forme différentielle relative à  $\pi_X$ :

$$\psi(I, l; \xi, J) = J(I)^{-a} \phi(l \wedge J, l) \wedge \omega_{X,z}$$

(où  $\mathbf{U}$  est vu comme l'ensemble des quadruples  $(I, l; \xi, J)$  vérifiant les propriétés évidentes) est bien définie, et relativement fermée [resp. exacte] si  $\phi$  l'est; on obtient ainsi une application de  $H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,b})$  vers  $H^2(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{-a-2, a+b+1})$ , que nous noterons  $\mathcal{Q}^*$  ou  $\mathcal{R}^*$  suivant que le faisceau  $\mathcal{F}_{a,b}$  correspond à un point du secteur latéral droit ou supérieur gauche du diagramme correspondant.

La même formule a un sens lorsque l'on part d'une 2-forme différentielle relative  $\phi$ , et définit, lorsque le faisceau  $\mathcal{F}_{a,b}$  correspond à un point du secteur supérieur droit du diagramme relatif à  $\Omega$ , une transformation

$$\mathcal{P}^* : H^2(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,b}) \rightarrow H^3(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{-a-2, a+b+1}) .$$

On procède de même pour définir des transformations de la cohomologie de  $\Gamma \setminus \Omega$  vers celle de  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  et on obtient ainsi trois transformations: deux, notées  $\mathcal{Q}'^*$  et  $\mathcal{R}'^*$  (suivant que le faisceau correspond à un point du secteur latéral droit ou inférieur gauche du diagramme relatif à  $\mathbf{Y}$ ) de  $H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,b})$  vers  $H^2(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a+b+1, -b-2})$ , et une, notée  $\mathcal{P}'^*$ , de  $H^2(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,b})$  vers  $H^3(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a+b+1, -b-2})$ . Ces transformations proviennent toutes trois de l'application qui à une 1- ou 2-forme  $\phi$  relative à  $\pi$  associe la 2- ou 3-forme  $\psi$  relative à  $\pi_Y$  définie par la formule:

$$\psi(z, J; I, \alpha) = J(I)^{-b} \phi(z, z \wedge I) \wedge \omega_{Y,l}$$

(où  $\mathbf{U}$  est maintenant vu comme l'ensemble des quadruples  $(z, J; I, \alpha)$ ).

**(8.3)** Chacune des transformations  $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{P}'^*, \mathcal{Q}'^*, \mathcal{R}'^*$  coïncide à un signe près – dont je laisse la détermination au lecteur – avec l'adjointe relativement à la dualité de Serre de la transformation correspondante  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{P}', \mathcal{Q}', \mathcal{R}'$ . Cela dépend du choix sur chacun des espaces considérés d'un isomorphisme  $\mathcal{F}_{-2,-2} \simeq \bigwedge^3 \Omega^1$ , choix que nous supposons compatibles entre eux, en ce sens qu'ils proviennent tous trois d'un tel isomorphisme sur la variété de drapeaux  $\mathbf{D}$ .

Prouvons cela par exemple dans le cas du couple  $(\mathcal{P}, \mathcal{P}^*)$ . Donnons nous donc deux entiers convenables  $a$  et  $b$ , et  $f \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$ ; soit d'autre part

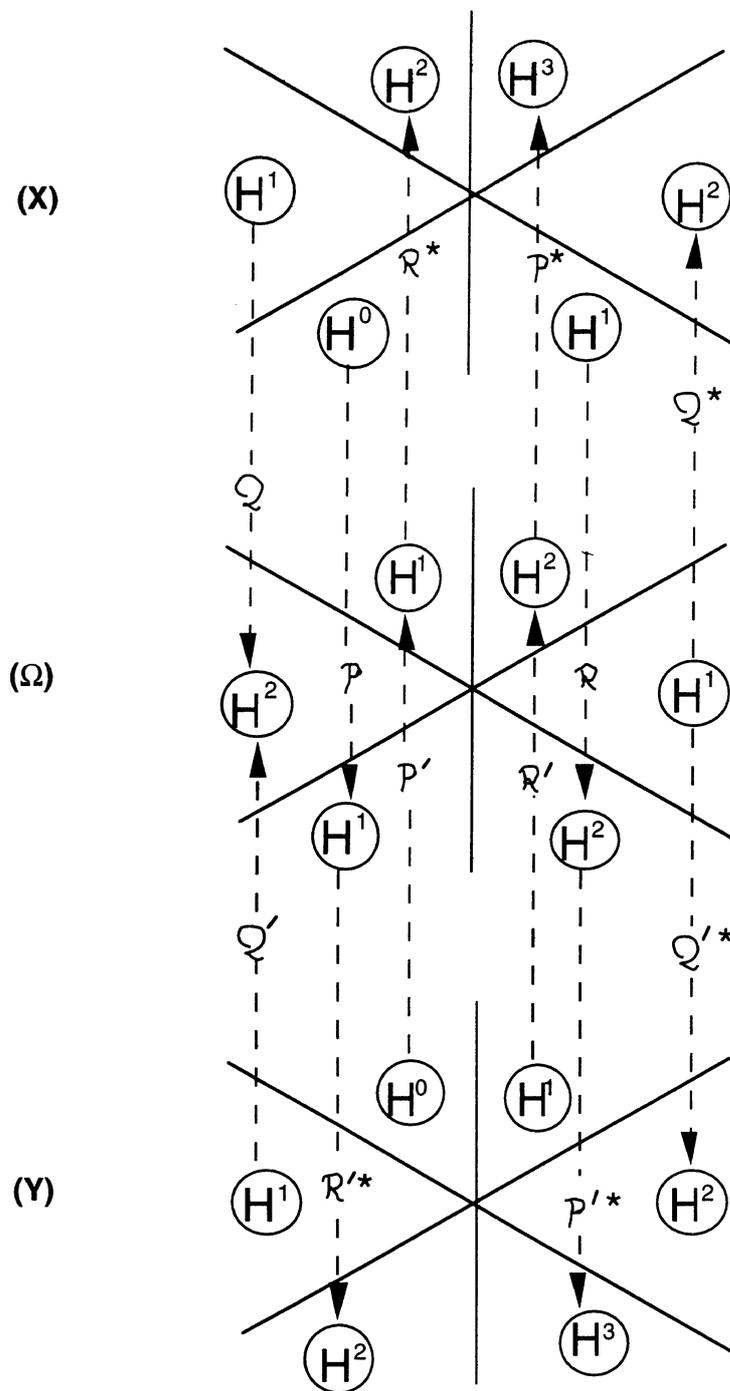


Figure 4.

$\phi \in H^2(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,-a-b-3})$ , représentée par une 2-forme relative à  $\pi$  que nous notons également  $\phi$ . Alors  $\mathcal{P}(f) \in H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{-a-2,a+b+1})$  est représentée par la 1-forme relative (à  $\pi$ ):

$$\eta = f(l \wedge \alpha, l)\alpha(z)^{-a}\omega_I,$$

tandis que  $\mathcal{P}^*(\phi) \in H^3(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{-a-2,-b-2})$  est représentée par la 3-forme relative (à  $\pi_{\mathbf{X}}$ ):

$$\psi(I, l; \zeta, J) = J(I)^{-a}\phi(l \wedge J, l) \wedge \omega_{\mathbf{X},z}.$$

La 3-forme  $f.\psi$  définit un élément de  $H^3(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{-2,-2})$ , tandis qu'à  $\eta \wedge \phi$  est associée une classe dans  $H^3(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{-2,-2})$ . A chacun de ces éléments correspond un scalaire qu'on obtient en transformant ces classes en classes de Dolbeault puis en intégrant. Il s'agit de montrer que les deux scalaires ainsi obtenus coïncident au signe près.

Nous avons déjà expliqué en (6.1) comment transformer une classe de Gindikin sur  $\Gamma \setminus \Omega$  en classe de Dolbeault. D'autre part, la donnée d'un isomorphisme  $\mathcal{F}_{-2,-2} \simeq \wedge^3 \Omega^1$  revient à la donnée d'une section  $\delta \in \wedge^3 \Omega^1 \otimes \mathcal{F}_{2,2}$ . Partant de  $\eta \wedge \phi$ , il s'agit donc de prendre son pull-back par la section  $s$  puis d'intégrer sur  $\Gamma \setminus \Omega$  la forme de type (3, 3):  $s^*(\eta \wedge \phi) \wedge \delta$ .

On procède de façon similaire pour exprimer la dualité de Serre sur  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ : ici une section de la projection  $\pi_{\mathbf{X}}$  est donnée par l'application  $s_{\mathbf{X}}$  qui à un couple  $(I, l)$  associe le quadruple  $(I, l; \zeta, J)$ , avec  $(\zeta, J) = (I^\perp, I^\perp)$  le drapeau orthogonal.

D'autre part on a une bijection  $\iota$  entre  $\Gamma \setminus \Omega$  et  $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ : au couple  $(z, l)$  on associe  $(I, l)$  avec  $I = l \wedge z^\perp$ . Notre assertion sera prouvée si l'on montre que  $\iota$  fait se correspondre (au signe près) les formes  $s^*(\eta \wedge \phi) \wedge \delta$  et  $s_{\mathbf{X}}^*(f.\psi) \wedge \delta$ . C'est clair en ce qui concerne les morceaux:

$$s^*(f(l \wedge \alpha, l)\alpha(z)^{-a} \wedge \phi) \text{ et } s_{\mathbf{X}}^*(f.J(I)^{-a}\phi(l \wedge J, l)) ,$$

puisque si l'on adopte les normalisations de (6.6) pour le drapeau orthogonal  $(\zeta, \alpha)$  à  $(z, l)$ , puis pour  $I$  et  $J$ , on a:  $J(I) = -1$ ,  $\alpha(z) = 1$ ,  $l \wedge \alpha = I$  et  $l \wedge J = z$ . Il nous faut voir maintenant que  $s^*(\omega_I) \wedge \delta$  et  $s_{\mathbf{X}}^*(\omega_{\mathbf{X},z}) \wedge \delta$  se correspondent de même.

Or nous avons une bijection, déjà utilisée en (6.2) entre  $G/T$  et  $\Omega$ ; également une entre  $G/T$  et  $\mathbf{X}$ , implicitement considérée en (1.1), telle que la classe de l'élément

neutre corresponde au drapeau  $I_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $l_0 = (0 \ 1 \ 0)$ . Notre bijection  $\iota$  n'est rien

d'autre que le quotient de ces deux bijections. D'autre part, nous avons calculé en (6.4) le pull-back sur  $G/T$  de la partie anti-holomorphe de  $s^*(\omega_I)$  et montré que c'était égal à  $-\bar{\eta}_1$ . Enfin, pour une normalisation convenable, le pull-back de  $\delta$  est la 3-forme invariante produit extérieur des trois 1-formes invariantes associées aux trois éléments  $A'^*, B'^*, C'^*$ , où  $A', B', C'$  désignent les matrices conjuguées de  $A, B, C$  et  $(A^*, B^*, C^*, A'^*, B'^*, C'^*)$  la base duale de la base  $(A, B, C, A', B', C')$

de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ . On voit donc qu'au signe près le pull-back sur  $G/T$  de la 4-forme invariante  $s^*(\omega_I) \wedge \delta$  est donné par:  $B^* \wedge A'^* \wedge B'^* \wedge C'^*$ .

De façon analogue, pour la bijection entre  $G/T$  et  $\mathbf{X}$ , l'espace tangent holomorphe en la classe de l'élément neutre est engendré par  $B^*, A'^*$  et  $C'^*$  et le pull-back de  $\delta$  correspond au signe près au produit extérieur de ces trois éléments. D'autre part, un calcul identique à celui que nous avons effectué en (6.5), et que nous laissons au lecteur, nous donne le pull-back de la partie anti-holomorphe de  $s_{\mathbf{X}}^*(\omega_{\mathbf{X},z})$ , et on trouve que c'est la 1-forme anti-holomorphe associée à  $-B'^*$ . Notre 4-forme  $s_{\mathbf{X}}^*(\omega_{\mathbf{X},z}) \wedge \delta$  correspond donc à un signe près au produit extérieur  $B'^* \wedge B^* \wedge A'^* \wedge C'^*$ . La coïncidence avec le résultat précédent prouve notre assertion. □

**(8.4)** Le composé de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}'^*$  est l'application de  $H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$  vers  $H^2(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{b,-a-b-3})$  qui à  $f$  associe la classe de la 2-forme (relativement à  $\pi_{\mathbf{Y}}$ ):

$$\psi(z, J; I, \alpha) = J(I)^{-a-b-1} f(I, z \wedge I) \cdot \omega_I \wedge \omega_{\mathbf{Y},I}$$

(en effet si tout est normalisé comme en (6.6), on a :  $l = z \wedge I, l \wedge \alpha = I, \alpha(z) = 1$  et le cas général s'en déduit par homogénéité).

Transformons  $\psi$  en classe de Dolbeault, de façon similaire à ce que nous avons déjà fait précédemment. Ici une section  $s_{\mathbf{Y}}$  de la projection de  $\mathbf{U}$  sur  $\mathbf{Y}$  est donnée par:  $(z, J) \rightarrow (z, J; I(z, J), \alpha(z, J))$ , avec  $I(z, J) = J^\perp$  et  $\alpha(z, J) = z^\perp$ . D'autre part, pour la bijection équivariante entre  $G/T$  et  $\mathbf{Y}$ , telle que la classe de l'élément neutre corresponde au drapeau

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_0 = (0 \ 0 \ 1),$$

l'espace tangent anti-holomorphe [resp. holomorphe] est engendré par les trois matrices  $A, B$  et  $C'$  [resp.  $A', B'$  et  $C$ ]. Enfin, on remarque que la 2-forme différentielle  $J(I)^{-1} \omega_I \wedge \omega_{\mathbf{Y},I}$  est une forme différentielle relative à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{F}_{0,-3}$  (c'est en fait l'image de  $\omega_I$  par l'application  $\mathcal{R}'^*$ ); un calcul analogue à ce que nous avons fait plus haut montre que la partie de type  $(0, 2)$  du pull-back par  $s_{\mathbf{Y}}$  de cette forme est la 2-forme invariante (plus précisément, une section de  $\Omega^{0,2}(\mathcal{F}_{0,-3})$ ), notée  $v$ , associée à  $-B'^* \wedge C'^*$ . C'est une 2-forme qui provient de la variété conjuguée  $\Delta^*$  de  $\Delta$  (constituée des droites extérieures à  $\bar{\Delta}$ ), via la projection (de fibres des droites projectives)  $q$  de  $\mathbf{Y}$  sur  $\Delta^*$  qui à  $(z, J)$  associe  $J$

Notons par ailleurs  $h^*$  la forme hermitienne sur  $V^*$  qu'on déduit par dualité de  $h$ ; on a alors:  $h^*(J) = J(I)$ , et l'on voit que  $\mathcal{R}'^* \circ \mathcal{P}(f)$  est représentée par la 2-classe de Dolbeault:

$$\psi_{\mathcal{D}}(z, J) = h^*(J)^{-a-b} f(I(z, J), z \wedge I(z, J)) \cdot v = h^*(J)^{-a-b} \tilde{f}(z, J) \cdot v,$$

où l'on a noté  $\tilde{f}$  la fonction sur  $\mathbf{Y}$  définie par:  $\tilde{f}(z, J) = f(J^\perp, z \wedge J^\perp)$ ; c'est une

fonction holomorphe en la première variable et anti-holomorphe en la seconde, bi-homogène de degré  $(b, \overline{a+b})$ , cette dernière notation signifiant que

$$\tilde{f}(\lambda z, \mu J) = \lambda^b (\bar{\mu})^{a+b} \tilde{f}(z, J).$$

Considérons par ailleurs la 1-forme anti-holomorphe invariante associée à  $A^*$  et notons-la  $\rho$ . Elle définit une section sur  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  du faisceau  $\Omega^{0,1}(\mathcal{F}_{-2,1})$ . La forme  $h(z)^{-b} \tilde{f}(z, J) \rho$  est alors une section de  $\Omega^{0,1}(\mathcal{F}_{-b-2,a+b+1})$ , qui définit sur chaque fibre de  $q$  une classe de 1-cohomologie. Or on a un isomorphisme, provenant de la suite spectrale de Leray:

$$H^1(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{-2-b,a+b+1}) = H^0(\Gamma \setminus \Delta^*, R_{q^*}^1(\mathcal{O}_q(-2-b)) \otimes \mathcal{O}(a+b+1)).$$

Il en résulte l'existence d'une classe  $\zeta \in H^1(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{-2-b,a+b+1})$  dont la restriction à chaque fibre de  $q$  est donnée par la 1-forme ci-dessus.

Regardons finalement le cup-produit de  $\psi$  et  $\zeta$ : c'est un élément de  $H^3(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{-2,-2}) \simeq \mathbf{C}$  (l'isomorphisme dépendant, comme en (8.3), du choix d'un isomorphisme  $\mathcal{F}_{-2,-2} \simeq \wedge^3 \Omega_{\mathbf{Y}}^1$ , c'est-à-dire de la donnée d'une section  $\delta_{\mathbf{Y}} \in \wedge^3 \Omega_{\mathbf{Y}}^1 \otimes \mathcal{F}_{2,2}$ ). On obtient ce scalaire en intégrant sur  $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$  la forme de type (3, 3):

$$h^*(J)^{-a-b} h(z)^{-b} \tilde{f}(z, J) \overline{\tilde{f}(z, J)} \rho \wedge \nu \wedge \delta.$$

On voit qu'on intègre, par rapport à une mesure invariante, une fonction de signe constant. Par suite ce cup-produit est non nul dès que  $f \neq 0$ .

On en déduit que le composé  $\mathcal{R}'^* \circ \mathcal{P}$  est injectif. Il en résulte, si l'on exclut les espaces de cohomologie où apparaît la représentation triviale, que  $\mathcal{R}'^*$  et  $\mathcal{P}$  sont bijectives (on retrouve ainsi le théorème (5.5)): en effet tous les espaces considérés ont alors la même dimension (cf. (5.7)). De la même façon, on voit que  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{R}^*$  sont bijectives, puis l'adjonction donne la bijectivité de  $\mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{P}'^*$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  (toujours à un grain de sel près là où figure la représentation triviale). J'ignore ce qu'il en est de  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q}^*$ ,  $\mathcal{Q}'$ ,  $\mathcal{Q}'^*$ .

### 9. Appendice

**(9.1)** Le théorème suivant est l'analogue de la proposition (5.2) dans le cas d'un espace hermitien symétrique quelconque  $\Delta$ . En utilisant la théorie de Gindikin, il peut permettre d'exprimer la cohomologie cohérente des quotients de  $\Delta$  par un sous-groupe de congruence co-compact  $\Gamma$ .

**(9.2) THÉORÈME:** *Soit  $\Delta$  un domaine hermitien symétrique associé à un groupe réductif  $G$ , et  $\Gamma \subset G$  un sous-groupe de congruence (relativement au choix d'une  $\mathbf{Q}$ -structure sur  $G$ ) tel que le quotient  $\Gamma \setminus G$  soit compact. Notons  $\Delta^-$  l'espace complexe conjugué de  $\Delta$  (autrement dit, les fonctions holomorphes sur  $\Delta^-$  sont les*

fonctions anti-holomorphes sur  $\Delta$ ). Alors l'espace quotient  $\Gamma \backslash (\Delta \times \Delta^-)$  est une variété de Stein.

**(9.3) Remarque:** On comparera ce résultat avec le théorème 4 de [Ea-Gi-Wo 2] qui affirme l'existence d'un voisinage de Stein convenable de la diagonale dans  $(\Gamma \backslash \Delta) \times (\Gamma \backslash \Delta^-)$ . On peut considérer que l'espace ici étudié  $\Gamma \backslash (\Delta \times \Delta^-)$  constitue un tel voisinage – mais au sens étale.

**(9.4)** La preuve de ce résultat constitue une généralisation de celle de notre proposition (5.2). Notons  $U$  le produit  $(\Delta \times \Delta^-)$ . Afin de construire suffisamment de fonctions holomorphes sur  $\Gamma \backslash U$ , nous allons utiliser la fonction noyau canonique, c'est-à-dire l'inverse du noyau de Bergman (cf. par exemple [Sa], Chap. II §5 et 6; nous voyons ici  $\Delta$  comme un domaine borné). Rappelons que c'est une fonction holomorphe  $k$  sur le produit  $\Delta \times \Delta^-$  (i.e. holomorphe en la première variable et anti-holomorphe en la seconde) qui vérifie les identités:

- (i)  $k(w, z) = \overline{k(z, w)}$ ;
- (ii) pour  $g \in G$ :  $k(gz, gw) = k(z, w)j(g, z)\overline{j(g, w)}$ , où  $j(g, z)$  désigne le *facteur canonique d'automorphie*, c'est-à-dire le jacobien de  $g$  en  $z$ . D'autre part,  $k$  ne s'annule jamais. Nous utiliserons aussi le fait suivant:
- (iii) Pour  $w \in \Delta$  fixé et  $z$  tendant vers un point  $z_\infty$  de la frontière de  $\Delta$ , alors  $k(z, w)$  converge vers une limite finie non nulle  $k(z_\infty, w)$ , et la fonction ainsi prolongée est continue sur  $\Delta \times \overline{\Delta^-}$ : si l'on veut, cela résulte du fait qu'il existe  $o \in \Delta$  tel que  $k(z, o)$  soit identiquement 1, de l'équation fonctionnelle (ii), et du fait que le facteur d'automorphie  $j(g, z)$  admet une limite finie non nulle lorsque,  $g$  étant fixé,  $z$  tend vers un point frontière.

Partons de formes automorphes de poids  $m \geq 0$ ,  $f$  sur  $\Delta$  [resp.  $h$  sur  $\Delta^-$ ], i.e. d'une fonction holomorphe [resp. anti-holomorphe] qui vérifie l'équation fonctionnelle, pour  $\gamma \in \Gamma$ :

$$f(\gamma.z) = j(\gamma, z)^{-m}f(z) \quad [\text{resp. } h(\gamma.w) = \overline{j(\gamma, w)}^{-m}h(w)].$$

Alors la fonction:

$$\Phi_{f,h}(z, w) = f(z).h(w).k(z, w)^m$$

est holomorphe sur  $U$  et  $\Gamma$ -invariante. Comme ci-dessus, il résulte alors du fait que les formes automorphes séparent les points de  $\Gamma \backslash \Delta$  que l'on a ainsi construit suffisamment de fonctions sur  $\Gamma \backslash U$  pour en séparer les points.

**(9.5)** Il nous reste encore à montrer que  $\Gamma \backslash U$  est holomorphiquement convexe. Pour cela on procède de façon essentiellement semblable à ce que nous avons fait en (5.3): donnons-nous une suite  $s_n$ , sans valeur d'adhérence, d'éléments de  $\Gamma \backslash U$ . Comme  $\Gamma \backslash \Delta^-$  est compact, nous pouvons supposer (quitte à extraire

une sous-suite) qu'on a choisi une suite de représentants  $(z_n, w_n) \in U$  de  $s_n$  de telle sorte que la seconde composante  $w_n$  converge vers un point  $w_\infty$  de  $\Delta^-$ .

Comme la suite  $s_n$  ne possède pas de valeur d'adhérence, on peut supposer (extrayant de nouveau une suite) que  $z_n$  converge vers un point  $z_\infty$  de la frontière de  $\Delta$ . Il existe enfin un système de  $\gamma_n \in \Gamma$  tels que  $\gamma_n(z_n)$  appartienne à un domaine fondamental fixé, et donc en extrayant encore une fois une sous-suite on se ramène à supposer que  $\gamma_n(z_n)$  tend vers  $\delta \in \Delta$ . Choisissons maintenant un entier  $m$  assez grand pour qu'il existe des formes automorphes  $f$  et  $h$  comme plus haut, de poids  $m$ , et telles que ni  $f(\delta)$  ni  $h(w_\infty)$  ne s'annulent. On a l'égalité:

$$\Phi_{f,h}(s_n) = f(z_n).h(w_n).k(z_n, w_n)^m = f(\gamma_n(z_n)).h(w_n).k(z_n, w_n)^m j(\gamma_n^{-1}, \gamma_n(z_n))^{-m},$$

et lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $f(\gamma_n(z_n)).h(w_n)$  tend vers  $f(\delta).h(w_\infty) \neq 0$ , tandis que  $k(z_n, w_n)^m$  converge vers  $k(z_\infty, w_\infty)^m \neq 0$ ; finalement,  $|j(\gamma_n^{-1}, \gamma_n(z_n))^{-m}|$  tend vers  $+\infty$ , ainsi qu'il résulte de la convergence de la série  $\sum_{\gamma \in \Gamma} |j(\gamma, z)|^2$  uniformément sur les compacts. Nous avons ainsi démontré que la suite  $\Phi_{f,h}(s_n)$  n'est pas bornée, et donc que  $\Gamma \setminus U$  est holomorphiquement convexe.

## Bibliographie

- [Bo-Wa] Borel, A. et Wallach, N.: *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, Ann. of Math. Stud. 94, Princeton University Press, 1980.
- [Ca] Carayol, H.: Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes, et Variétés de Griffiths–Schmid: le cas du groupe  $U(2, 1)$ , *Compositio Math.* **111**(1) (1998), 51–88.
- [Cl] Clozel, L.: On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties, *Duke Math. J.* **72**(3) (1993), 757–795.
- [De] Deligne, P.: Travaux de Griffiths, *Séminaire Bourbaki 376* (Mai-Juin 1970), Lectures Notes in Math. 180, Springer, New York, 1971, pp. 213–237.
- [Ea-Gi-Wo1] Eastwood, M., Gindikin, S. et Wong, H.: Holomorphic realization of  $\bar{\partial}$ -cohomology and constructions of representations, *J. Geom. Phys.* **17**(3) (1995), 231–244.
- [Ea-Gi-Wo2] Eastwood, M., Gindikin, S. et Wong, H.: A holomorphic realization of analytic cohomology, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322**(6) (1996), 529–534.
- [Gi] Gindikin, S.: Holomorphic language for  $\bar{\partial}$ -cohomology and representations of real semisimple Lie groups, dans: *The Penrose Transform and Analytic Cohomology in Representation Theory* (South Hadley, MA, 1992), Contemp. Math. 154, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 103–115.
- [Gr-Sc] Griffiths, P. A. et Schmid, W.: Locally homogeneous complex manifolds, *Acta Math.* **123** (1969), 253–301.
- [Ro] Rogawski, J. D.: *Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables*, Ann. of Math. Stud. 123, Princeton University Press, 1990.
- [Sa] Satake, I.: *Algebraic Structures on Symmetric Domains*, Publ. Math. Soc. Japan, Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1980.

- [Sc] Schmid, W.: Homogeneous complex manifolds and Representations of semi-simple Lie groups, dans: P. J. Sally and D. A. Vogan (eds), *Representation Theory and Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups*, Math. Surveys Monogr. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1989.
- [We-Wo] Wells, R. O. et Wolf, J. A.: Poincaré series and automorphic cohomology on flag domains, *Ann. of Math.* **105**(3) (1977), 397–448.
- [Wi] Williams, F. L.: The  $n$ -cohomology of limits of discrete series, *J. Funct. Anal.* **80** (1988), 451–461.

