X. Benveniste
Nagoya Math. J.
Vol. 97 (1985), 137-167

SUR LES VARIÉTÉS CANONIQUES DE DIMENSION 3 D'INDICE POSITIF

X. BENVENISTE

Dans tout ce qui suit, les varietés qui interviendront seront définies sur le corps des nombres complexes $\boldsymbol{C}$. L'objet de cet article est de préciser le résultat suivant obtenu dans [B-2] et [K-1]:

THÉORÈME 0. *Soit X une variété projective normale de dimension* 3, *dont les singularités sont canoniques au sens de* [R-1]. *Soient e le p.p.c.m. des indices des points singuliers de X. Soit R un diviseur de Cartier sur X, tel que le bidual de $\omega_X^{\otimes e}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X(R)$. Supposons que R soit numériquement positif et que $R^3 > 0$. Alors il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ le système linéaire $|nR|$ soit sans point base; en particulier l'anneau $\oplus_{n\geqslant 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nR))$ est de type fini sur $\boldsymbol{C}$.*

par le résultat effectif suivant:

THÉORÈME 1. *Avec les hypothèses du théorème* 0, *pour tout entier $n \geqslant 34e + 3$, le système linéaire $|nR|$ est sans point base.*

Si $e = 1$, on peut être plus précis:

THÉORÈME 2. *Avec les hypothèses du théorème* 0, *supposons que $e = 1$. Alors pour tout entier $m \geqslant 34$, le système linéaire $|mR|$ est sans point base et définit un morphisme birationnel sur son image.*

Pour montrer ces deux théorèmes, nous aurons besoin du résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Soit X une variété normale et projective, dont les singularités sont canoniques au sens de* [R-1]. *Soient e le p.p.c.m. des indices des points singuliers de X, R un diviseur de Cartier sur X, tels que le bidual de $\omega_X^{\otimes e}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X(R)$. Soit D un diviseur de Cartier sur X tel que les diviseurs D et $(eD - R)$ soient numériquement positifs et*

Received January 23, 1984.

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

que $(eD - R)^3 > 0$. *Supposons* $|4D| \neq \emptyset$ *et* $|5D| \neq \emptyset$ *et soit* m *un entier* $\geqslant 17$. *Si le système linéaire* $|mD|$ *n'est pas composé d'un pinceau, l'élément général de* $|mD|$ *est réduit, irréductible et n'a que des singularités isolées.*

Nous consacrons le premier chapitre de cet article à la démonstration de la proposition. Ensuite nous intéressons aux surfaces $\boldsymbol{Q}$-Gorenstein de type général. Enfin nous démontrons les théorèmes 1 et 2.

Désignons par k l'un des deux corps $\boldsymbol{Q}$ ou $\boldsymbol{R}$. Pour toute variété V lisse et projective, nous notons $NS_k(V)$ le k-espace vectoriel obtenu à partir de $NS(V)$ par extension des scalaires à k.

Etant donné une variété projective quelconque X, nous notons $\mathrm{Sing}(X)$ le lieu singulier de X.

Pour tout nombre réel x, nous notons $[x]$ et $\{x\}$ respectivement la partie entière de X et le plus petit entier $\geqslant x$.

Qu'il nous soit permis ici de remercier A. Beauville pour ses précieux conseils lors de la rédaction de cet article.

Quelques rappels et notations

Rappelons le théorème suivant dû à Kawamata et Viehweg ([K] et [V]):

THÉORÈME 0–1 (Kawamata, Viehweg). *Soient* V *une variété lisse et projective de dimension* d, $(E_i)_{i\in I}$ *une famille finie de diviseurs lisses à croisements normaux,* $(a_i)_{i\in I}$ *une famille de nombres rationnels de* $[0, 1[$, D *un élément de* $\mathrm{Pic}(V)$, L *un élément de* $NS_{\boldsymbol{Q}}(V)$ *numériquement positif vérifiant* $L^d > 0$, *tels que l'on ait dans* $NS_{\boldsymbol{Q}}(V)$: $D = L + \sum_{i\in I} a_i E_i$. *Alors pour tout* $p \leqslant d-1$, *on a*: $H^p(V, \mathcal{O}_V(-D)) = 0$.

Donnons le résultat de [E] et [S]:

THÉORÈME 0–2 (Elkik, Shepherd-Barron). *Soit* X *une variété normale et projective de dimension* 3, *n'ayant que des singularités canoniques au sens de* [R-1]. *Soient* Y *un modèle lisse de* X, $f\colon Y \to X$ *un morphisme birationnel; alors on a* $R^p f_* \mathcal{O}_Y = 0$ *pour* $p > 0$, *et* $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$.

Rappelons aussi le résultat de Reid [R-2]:

THÉORÈME 0–3 (Reid). *Soit* X *une variété normale et projective de dimension* 3 *n'ayant que des singularités canoniques. Notons* ω_X *le faisceau dualisant de* X. *Alors il existe deux modèles birationnels* Y *et* X', *deux morphismes birationnels* $g\colon X' \to X$ *et* $h\colon Y \to X'$, *une famille finie* $(W_i)_{i\in I}$ *de diviseurs lisses à croisements normaux sur* Y, *une famille* $(\rho_i)_{i\in I}$ *de*

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

nombres entiers >0, *vérifiant les conditions suivantes*:

(i) *Y est lisse et X' n'a que des singularités terminales au sens de* [R-2]. *Notons r le p.p.c.m. des indices des points singuliers de X'.*

(ii) *Notons ω_Y et $\omega_{X'}$ les faisceaux dualisants de Y et X' respectivement, $\omega_X^{[r]}$ et $\omega_{X'}^{[r]}$ les biduaux des faisceaux $\omega_X^{\otimes r}$ et $\omega_{X'}^{\otimes r}$. Alors on a*:

$$\omega_{X'}^{[r]} = g^*(\omega_X^{[r]}), \text{ et } \omega_Y^{\otimes r} = h^*(\omega_{X'}^{[r]})(\sum_{i\in I} \rho_i W_i)\,.$$

(iii) *Pour tout $i\in I$, $h(W_i)$ est un point singulier de X'.*

Le théorème 0 entraîne:

PROPOSITION 0–1. *Soit X une variété de dimension 3 vérifiant les hypothèses du théorème 0. Posons $X_c = \operatorname{Proj}(\oplus_{n\geqslant 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nR)))$. Alors X_c est une variété normale de dimension 3, n'ayant que des singularités canoniques au sens de* [R-1]. *Soit ω_{X_c} son faisceau dualisant; le bidual $\mathscr{L}$ du faisceau $\omega_{X_c}^{\otimes e}$ est inversible et ample. De plus il existe un morphisme birationnel $f\colon X\to X_0$ tel que: $f^*(\mathscr{L}) = \mathcal{O}_X(R)$.*

D'après la proposition 0–1, quitte à considérer X_c au lieu de X, il suffit de démontrer le théorème 1 dans le cas où R est ample. Désormais nous allons considérer une variété normale X de dimension 3, n'ayant que des singularités canoniques. Nous allons noter r le p.p.c.m. des indices des points singuliers de X. Soit ω_X le faisceau dualisant de X. Soit H un diviseur de Cartier ample sur X, tel que le bidual de $\omega_X^{\otimes r}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X(H)$. Soient X' et Y les modèles birationnels de X définis dans le théorème 0–3. Posons, avec les notations du théorème 0–3, $f = g\circ h$.

PROPOSITION 0–2. *On a les assertions suivantes*:

(i) *Pour tout entier $n<0$, et tout $p\in\{0,1,2\}$, on a*:

$$H^p(X, \mathcal{O}_X(nH)) = H^p(Y, \mathcal{O}_Y(nf^*(H))) = 0\,.$$

(ii) *Pour tout entier $n>0$, et tout $p\in\{1,2,3\}$, si $r\geqslant 2$, on a*:

$$H^p(X, \mathcal{O}_X(nH)) = H^p(Y, \mathcal{O}_Y(nf^*(H))) = 0\,.$$

Démonstration. D'après la suite spectrale de Leray, et le théorème 0–2, on a pour $p\geqslant 0$ et tout entier n: $H^p(X, \mathcal{O}_X(nH)) = H^p(Y, \mathcal{O}_Y(nf^*(H)))$.

Si $n<0$, on d'après le théorème 0–1: $H^p(Y, \mathcal{O}_Y(nf^*(H))) = 0$, pour $p<3$. Cela démontre l'assertion (i).

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Supposons $n > 0$ et $r \geqslant 2$. Notons K_Y le diviseur canonique de Y et soient $(W_i)_{i \in I}$ *et* $(\rho_i)_{i \in I}$ les familles définies dans le théorème 0–3. La condition (ii) du théorème 0–3 montre que: $rK_Y \equiv f^*(H) + \sum_{i \in I} \rho_i W_i$. Posons $R \equiv f^*(H)$. Pour chaque $i \in I$, soit a_i le plus petit entier $\geq \rho_i/r$; posons $c_i = a_i - (\rho_i/r)$ et $W = \sum_{i \in I} a_i W_i$. Dans $NS_Q\ (Y)$ on a:

$$nR = K_Y + (n - (1/r))R + \sum_{i \in I} c_i W_i - W\,.$$

Posons $L(n) \equiv nR - K_Y + W$; par définition on a: $nR \equiv K_Y + L(n) - W$. Dans $NS_Q(Y)$, on peut écrire: $L(n) = (n - (1/r))R + \sum_{i \in I} c_i W_i$. Remarquons que pour tout $i \in I$, c_i est un nombre rationnel de $[0, 1[$. Comme $(n - (1/r)) > 0$ le théorème 0–1 montre que:

$$(1) \qquad H^p(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + L(n))) = 0$$

pour $p > 0$. D'après la condition (iii) du théorème 0–3, on a pour tout $i \in I$: $R|_{W_i} \equiv 0$; comme $nR + W \equiv K_Y + L(n)$, on déduit: $\mathcal{O}_W(K_Y + L(n)) = \mathcal{O}_W(W)$. Puisque les parties mobiles de $|nR|$ et $|nrK_Y|$ sont les mêmes, W est contenu dans la partie fixe de $|nR + W|$. On a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(nR) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(K_Y + L(n)) \longrightarrow \mathcal{O}_W(W) \longrightarrow 0\,.$$

D'après (1), pour tout entier $p > 0$, l'homomorphisme:

$$H^{p-1}(W, \mathcal{O}_W(W)) \longrightarrow H^p(Y, \mathcal{O}_Y(nR))$$

est un isomorphisme. D'après le théorème d'annulation de Serre sur les faisceaux amples, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait pour $p > 0$: $H^p(X, \mathcal{O}_X(nH)) = 0$. Par conséquence, on a:

$$H^p(Y, \mathcal{O}_Y(nR)) = H^p(X, \mathcal{O}_X(nH)) = 0$$

pour $p > 0$ et $n \geqslant n_0$. Cela implique: $H^{p-1}(W, \mathcal{O}_W(W)) = 0$, pour $p > 0$, et donc pour tout $n > 0$, on a: $H^p(Y, \mathcal{O}_Y(nR)) = 0$. Cela termine la démonstration de l'assertion (ii).

PROPOSITION 0–3. *Pour tout entier* $n \geqslant 4$, *on a les assertions suivantes*:

(i) *On a*: $h^0(X, \mathcal{O}_X(nH)) \geqslant 7$.

(ii) *Le systéme linéaire* $|nH|$ *n'est pas composé d'un pinceau.*

Démonstration. Soit n un entier > 0. Reprenons les notations du théorème 0–3. Posons $R \equiv f^*(H)$. D'après la proposition 0–2, si $r \geqslant 2$, on a:

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(nH)) = \chi(Y, \mathcal{O}_Y(nR))\,.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Si $r = 1$, on a $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(H)$. Pour $n \geqslant 2$, d'après la dualité de Serre, et l'assertion (i) de la proposition 0–2, on a:

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(nH)) = \chi(Y, \mathcal{O}_Y(nR)) .$$

Posons $Q(n) = \chi(Y, \mathcal{O}_Y(nR))$. Appliquons le théorème de Riemann-Roch:

$$Q(n) = n^3(R^3/6) - n^2((K_Y \cdot R^2)/4) + n(R \cdot (K_Y^2 + c_2(Y))/12) + \chi(\mathcal{O}_Y) .$$

D'après l'assertion (ii) du théorème 0–3, on a:

$$rK_Y \equiv R + \sum_{i \in I} \rho_i W_i .$$

D'après l'assertion (iii) du même théorème, on a: $R|_{W_i} \equiv 0$, pour $i \in I$. Cela implique: $K_Y \cdot R^2 = R^3/r$, et $K_Y^2 \cdot R = R^3/r^2$. On déduit pour $n > 0$ et $r \geqslant 2$ ou bien $n \geqslant 2$ et $r > 0$:

$$(1) \qquad Q(n) = n(2nr - 1)(nr - 1)(H^3/12r^2) + n(c_2(Y) \cdot R/12) + \chi(\mathcal{O}_Y)$$

D'après l'assertion (i) de la proposition 0–2, on a:

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + R)) = \chi(\mathcal{O}_Y(K_Y + R)) .$$

Posons $a = h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + R))$; en appliquant le théorème Riemann-Roch et les remarques précédentes, on obtient:

$$(2) \qquad a = (2r + 1)(r + 1)(H^3/12r^2) + (c_2(Y) \cdot R/12) - \chi(\mathcal{O}_Y) .$$

Distinguons maintenant deux cas:

1^er^ *cas*: supposons $r \geqslant 2$.
Comme a est entier, r^2 divise H^3. Puisque $Q(1) \geqslant 0$, on déduit:

$$(3) \qquad \chi(\mathcal{O}_Y) \geqslant -(c_2(Y) \cdot R/12) - (2r - 1)(r - 1)(H^3/12r^2) .$$

On a aussi: $Q(1) + a \geqslant 0$, ce qui donne:

$$(4) \qquad (c_2(Y) \cdot R/12) \geqslant -(2r^2 + 1)(H^3/12r^2) .$$

En reportant la formule (3) dans la formule (1), on obtient pour $n \geqslant 2$:

$$Q(n) \geqslant (n(2r^2(n^2 - 1) - 3nr) + (2r^2 + 1) - (2r - 1)(r - 1)) \cdot (H^3/12r^2)$$

ce qui implique:

$$(5) \qquad Q(n) \geqslant n(n - 1)(2r(n + 1) - 3)((H^3/12r) .$$

On déduit pour $n \geqslant 4$: $Q(n) \geqslant 3 \cdot 4 \cdot (10r - 3)(H^3/12r)$. Mais r^2 divise H^3, par suite: $(H^3/12r) \geqslant r/12$, ce qui implique: $Q(n) \geqslant (10r - 3)r \geqslant 7$. Montrons l'assertion (ii).

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Soit n un entier > 0. Supposons le système linéaire $|nH|$ composé d'un pinceau. D'après le théorème de Bertini, il existe un diviseur irréductible F_n et un diviseur Z_n, un entier $f(n) > 0$, tels que:

$$nH \sim f(n)F_n + Z_n \,, \tag{6}$$

$$F_n \cdot H^2 \geqslant 1 \,. \tag{7}$$

Multiplions (6) par H^2 et utilisons la formule (7); on obtient:

$$f(n) \leqslant nH^3 \,. \tag{8}$$

D'après (6), on a: $Q(n) \leqslant f(n) + 1$. En utilisant (8), on obtient:

$$Q(n) \leqslant nH^3 + 1 \,. \tag{9}$$

En appliquant la formule (5), on déduit:

$$n(2r(n^2 - 1) - 3(n - 1) - 12r)(H^3/12r) \leqslant 1 \,. \tag{10}$$

Mais pour $n \geqslant 4$, on a: $n(2rn^2 - 3n - 14r + 3) \geqslant 4(18r - 9)$. Comme on a: $H^3/12r \geqslant r/12$, cela implique:

$$n(2rn^2 - 3n - 14r + 3)(H^3/12r) \geqslant (18r - 9)/3 \geqslant 3 \,.$$

On obtient une contradiction avec (10). Cela achéve la démonstration du cas $r \geqslant 2$.

$2^{ème}$ *cas*: supposons $r = 1$.

Par le théorème 0–2, on a pour $p > 0$: $R^p f_* \mathcal{O}_Y = 0$ et $f_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y$. La suite spectrale de Leray donne: $\chi(\mathcal{O}_Y) = \chi(\mathcal{O}_X)$. Par dualité de Serre sur X, on a: $\chi(\mathcal{O}_X) = -\chi(\mathcal{O}_X(H))$. A nouveau, la suite spectrale de Leray donne: $\chi(\mathcal{O}_Y(f^*(H))) = \chi(\mathcal{O}_X(H))$. Par suite on a: $\chi(\mathcal{O}_Y(f^*(H)) = -\chi(\mathcal{O}_Y)$. Posons comme précédemment $R = f^*(H)$. Appliquons le théorème de Riemann-Roch on obtient:

$$-\chi(\mathcal{O}_Y) = (R^3/6) - (K_Y \cdot R^2/4) + (R \cdot (K_Y^2 + c_2(Y))/12) + \chi(\mathcal{O}_Y) \,.$$

En utilisant la condition (iii) du théorème 0–3, on voit que:

$$K_Y \cdot R^2 = R^3 \qquad \text{et } K_Y^2 \cdot R = R^3 \,.$$

On déduit:

$$2\chi(\mathcal{O}_Y) = -(c_2(Y) \cdot R/12) \,. \tag{11}$$

(Remarque: on aurait pu écrire aussi: $\chi(\mathcal{O}_Y(K_Y)) = -\chi(\mathcal{O}_Y)$. On aurait obtenu: $2\chi(\mathcal{O}_Y) = -(c_2(Y) \cdot K_Y/12)$, ce qui montre que: $c_2(Y) \cdot \sum_{i \in I} \rho_i W_i = 0$)

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

La formule (2) donne: $a = h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + R)) = (H^3/2) + (c_2(Y)\cdot R/12) - \chi(\mathcal{O}_Y)$. En utilisant (10), on obtient:

(12) $$a = (H^3/2) - 3\chi(\mathcal{O}_Y)\ .$$

Par suite 2 divise H^3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a d'après les formules (1) et (11):

(13) $$Q(n) = n(2n-1)(n-1)(H^3/12) - (2n-1)\chi(\mathcal{O}_Y)\ .$$

Distinguons deux cas:

1) Supposons $H^3 = 2$; alors $\chi(\mathcal{O}_Y) \leqslant 0$ par la formule (12). La formule (13) montre que pour $n \geqslant 3$, on a:

(14) $$Q(n) \geqslant n(2n-1)(n-1)/6\ .$$

d'où on déduit pour $n \geqslant 4$: $Q(n) \geqslant (4\cdot 7\cdot 3)/6 \geqslant 14$.

2) Supposons $H^3 \geqslant 4$. Alors la formule (11) montre que pour $n \geqslant 3$ on a:

(15) $$Q(n) \geqslant ((2n-1)/6)((n(n-1)/2) - 1)H^3\ .$$

Pour $n \geq 4$, on déduit: $Q(n) \geqslant (7/6)\cdot 5\cdot 4 = (35/3) \geqslant 7$.

Montrons l'assertion (ii). Supposons que $|nH|$ soit composé d'un pinceau. Alors on a la formule (9). Distinguons deux cas:

1) Supposons $H^3 = 2$. Alors $\chi(\mathcal{O}_Y) \leqslant 0$ et on a d'après la formule (14):

$$(n/3)((2n-1)(n-1) - 1) \leqslant 1\ .$$

Mais pour $n \geqslant 4$, on a: $(n/3)((2n-1)(n-1)-1) \geqslant (4/3)\ (7\cdot 3 - 1) \geqslant 24$, ce qui contredit la formule précédente.

2) Supposons $H^3 \geqslant 4$. Alors d'après la formule (15) on obtient:

$$((2n-1)(n-1)(n/12) - ((2n-1)/6) - n)H^3 \leqslant 1\ .$$

Mais on a: $(2n-1)(n-1)(n/12) - ((2n-1)/6) - n = (n(2n^2 - 3n - 15) + 2)/12$. On déduit pour $n \geqslant 4$: $((2n-1)(n-1)(n/12) - (2n-1)/6) - n)H^3 \geqslant 4\cdot(11/6) \geqslant 7$. Cela donne une contradiction avec l'inégalité précédente, et termine la démonstration de la proposition.

Remarque 0–1. Soient S une surface lisse et projective, A et B deux diviseurs numériquement positifs. Alors on a: $(A + B)^2 \geqslant A^2$.

Nous renvoyons le lecteur au lemme 3–2 de [B-3] pour la démonstration de ce résultat.

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 0–4. *Soient S une surface lisse et projective de type général, R un diviseur numériquement positif vérifiant $R^2 > 0$. Notons K le diviseur canonique de S. Alors on a: $|K + R| \neq \emptyset$.*

Démonstration. D'après la classification des surfaces, on a $\chi(\mathcal{O}_S) > 0$. De plus le théorème 0–1 implique: $H^p(S, \mathcal{O}_S(-R)) = 0$ pour $p \leqslant 1$. Par le théorème de Riemann-Roch, on a: $h^0(S, \mathcal{O}_S(K + S)) = \chi(\mathcal{O}_S) + (1/2)((K+R)\cdot R)$. Puisque S est de type général, on a: $K\cdot R \geqslant 0$ et donc: $h^0(S, \mathcal{O}_S(K + R)) > 0$. Cela termine la démonstration de la proposition.

D'après les résultats de [Ha] sur les éclatements on a:

Remarque 0–2. Soient X et Y deux variétés lisses, $f\colon Y \to X$ un morphisme birationnel composé d'une suite finie d'éclatements de centres lisses, $(E_i)_{i\in I}$ la famille des diviseurs exceptionnels de f, et L un diviseur ample sur X. Alors il existe un entier $a > 0$, et une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'entiers > 0 tels que le diviseur $f^*(L) - \sum_{i\in I} a_i E_i$ soit ample sur Y.

D'après les résultats de [B-1] on a:

PROPOSITION 0–5. *Soit Y une variété lisse et projective de dimension* 3. *Supposons que soient donnés:*

a) *un diviseur P numériquement positif sur Y vérifiant $P^3 > 0$,*
b) *une famille $(E_i)_{i\in I}$ de diviseurs lisses à croisements normaux,*
c) *un élément $o \in I$, une famille $(m_i)_{i\neq 0}$ d'entiers positifs, une famille $(c_i)_{i\in I}$ de nombres rationnels de* $[0, 1[$,
d) *un $\mathbf{Q}$-diviseur ample L dans $NS_{\mathbf{Q}}(Y)$, et un élément G de* $\mathrm{Pic}(Y)$, *tels que dans $NS_{\mathbf{Q}}(Y)$ on ait: $G = L + \sum_{i\neq 0} c_i E_i$,*
e) *un entier $m > 0$ tel que si $D \equiv mP + \sum_{i\neq 0} m_i E_i$, on ait:*

$$D \equiv K_Y + P + G + E_0\,.$$

Alors E_0 n'est pas partie fixe du système linéaire $|D|$.

Nous renvoyons à la proposition 2–1 de [B-1] pour la démonstration de ce résultat.

Rappelons maintenant les notations suivantes dues à Fujita [F]: Etant donnés une variété lisse et projective V et un diviseur effectif D sur V, on note $B(D)$ le lieu fixe du système linéaire $|D|$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

La démonstration de la proposition 1

1) *Une première proposition technique*

Désormais X désigne une variété de dimension 3 normale et projective dont les singularités sont canoniques au sens de [R-1]. Soient e le p.p.c.m. des indices des points singuliers de X, H et D deux diviseurs de Cartier, tels que:

— le bidual de $\omega_X^{\otimes e}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X(H)$,
— les diviseurs $(eD - H)$ et D sont numériquement positifs, et on a $(eD - H)^3 > 0$.

Nous allons faire les hypothèses suivantes (nous verrons au paragraphe 3 que l'on peut toujours les réaliser):

Soient Y un modèle birationnel lisse de X, $f\colon Y \to X$ un morphisme birationnel, $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de diviseurs lisses à croisements normaux, $(\rho_i)_{i\in I}$ une famille de nombres rationnels positifs, $R = f^*(H)$ et $P = f^*(D)$, et m un entier $\geqslant 3$, vérifiant les conditions suivantes:

H$_1$) Il existe une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'entiers positifs non tous nuls et un diviseur M tels que: $mP \equiv M + \sum_{i\in I} u_i E_i$, M est la partie mobile de $|mP|$, $\sum_{i\in I} u_i E_i$ sa partie fixe; de plus le système linéaire $|M|$ n'a pas de point base.

H$_2$) Soit K_Y le diviseur canonique de Y. On a dans $NS_Q(Y)$:

$$K_Y = (R/e) + \sum_{i\in I} \rho_i E_i$$

Soit $i \in I$ tel que $\rho_i > 0$, alors on a: $\dim(f(E_i)) \leqslant 1$.

H$_3$) Il existe une famille $(t_i)_{i\in I}$ de nombres rationnels de $]0, 1[$, et un élément $\tau \in\,]0, 1[\, \cap \boldsymbol{Q}$, tels que pour toute famille $(\tau_i)_{i\in I}$ de nombres rationnels de $[0, \tau]$, le $\boldsymbol{Q}$-diviseur $(P - (R/e)) - \sum_{i\in I} (t_i + \tau_i)E_i$ est ample.

PROPOSITION 1–1. *Sous les hypothèses H_1, H_2 et H_3, on a pour tout $i \in I$:*

$$u_i/(\rho_i + 1) \leqslant 1 + (2/(m-2)) \,.$$

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $\alpha \in I$ tel que: $u_\alpha/(\rho_\alpha + 1) > 1 + (2/(m-2))$. Nous allons montrer en plusieurs pas qu'il existe:

— un élément $o \in I$,
— une famille $(m_i)_{i\neq 0}$ d'entiers positifs,
— une famille de nombres rationnels $(c_i)_{i\neq 0}$ de nombres rationnels de $[0, 1[$,
— un $\boldsymbol{Q}$-diviseur ample L,

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

tels que si $A \equiv mP + \sum_{i\neq 0} m_i E_i$ les conditions a), $\cdots$, e) de la proposition 0–5 soient satisfaites. De plus E_0 est partie fixe du système linéaire $|A|$. Cela entraînera une contradiction avec la proposition 0–5.

1^{er} *pas.* quelques calculs arithmétiques:

Soit r un nombre rationnel > 0. Posons:

$$a(r) = \max_{i\in I} (u_i + r(t_i + \tau))/(\rho_i + 1) .$$

Soit $E(r)$ l'ensemble formé des $i \in I$ tels que:

$$a(r) = (u_i + r(t_i + \tau))/(\rho_i + 1) .$$

En faisant tendre r vers 0, on voit qu'il existe un nombre rationnel $r > 0$ tel que les conditions suivantes soient réalisées:

(i) pour tout $i \in E(r)$, on a $u_i \neq 0$,

(ii) $a(r) > u_\alpha/(\rho_\alpha + 1)$,

(iii) $r/a(r) < 1$.

Soit $o \in E(r)$; posons $s_0 = t_0 + \tau$ et $s_i = t_i$ pour $i \in I - \{o\}$. Il est clair que si l'on définit pour tout $i \in I$, m_i par:

$$m_i = -[((u_i + rs_i)/a(r)) - \rho_i] ,$$

on a $m_0 = -1$ et pour tout $i \in I - \{o\}$: $0 \leqslant m_i \leqslant \{\rho_i\}$. De plus posons pour tout $i \in I - \{o\}$, $c_i = m_i + ((u_i + rs_i)/a(r)) - \rho_i$. On a: $c_i \in [0, 1[$.

$2^{ème}$ *pas.* le diviseur $A \equiv mP + \sum_{i\neq 0} m_i E_i$ vérifie les hypothèses de la proposition 0–5.

Montrons premièrement que A vérifie l'hypothèse e). Ecrivons dans $NS_Q(Y)$:

$$\begin{aligned} A - K_Y - E_0 = {} & (m - (m/a(r)) - 2)P + (P - (R/e)) - (r/a(r)) \sum_{i\in I} s_i E_i \\ & + (M/a(r)) + P + \sum_{i\neq 0} (m_i + ((u_i + rs_i)/a(r)) - \rho_i) E_i . \end{aligned}$$

Posons dans $NS_Q(Y)$:

$$L = (m - (m/a(r)) - 2)P + (P - (R/e)) - (r/a(r)) \sum_{i\in I} s_i E_i ,$$

L est un $\boldsymbol{Q}$-diviseur ample. En effet par construction on a:

$$m - (m/a(r)) - 2 \geqslant m - (m(\rho_\alpha + 1)/u_\alpha) - 2 > 0 ,$$

et par le choix de r (condition (iii) du 1^{er} pas) on a: $r/a(r) < 1$. Par l'hypothèse H_3, le $\boldsymbol{Q}$-diviseur $(P - (R/e)) - \sum_{i\in I} s_i E_i$ est ample et l'on peut écrire:

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

$$L = (m - (m/a(r)) - 2)P + (1 - (r/a(r)))(P - R/e))$$
$$+(r/a(r))((P - (R/e)) - \sum_{i \in I} s_i E_i) .$$

Cela montre que L est un $\boldsymbol{Q}$-diviseur ample. Posons maintenant:

$$G \equiv A - K_Y - P - E_0 .$$

On a par définition dans $NS_{\boldsymbol{Q}}(Y)$: $G = L + \sum_{i \neq 0} c_i E_i$. De plus on a:

$$A \equiv K_Y + G + P + E_0 .$$

Cela montre que l'hypothèse *e*) de la proposition 0–5 est vérifiée. Le lecteur vérifiera sans peine que les conditions restantes sont remplies. Le $2^{\text{ème}}$ pas est donc démontré.

$3^{ème}$ *pas.* E_0 est contenu dans la partie fixe du système linéaire $|A|$.

Montrons que les parties mobiles de $|mP|$ et de $|A|$ sont les mêmes. D'après l'hypothèse H_2, on a pour tout $i \in I$ tel que $\rho_i > 0$: $\dim(f(E_i)) \leqslant 1$. Par construction, on a pour tout $i \in I - \{o\}$: $0 \leqslant m_i \leqslant \{\rho_i\}$. Par suite, si $\rho_i = 0$, on a $m_i = 0$. De plus, puisque $f_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$, on a les isomorphismes suivants: $H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) \cong H^0(Y, \mathcal{O}_Y(A))$, et $H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) \cong H^0(Y, \mathcal{O}_Y(mP))$. Cela démontre le résultat annoncé.

Par le choix de r (condition (i) du 1^{er} pas) on a $u_0 \neq 0$. Cela démontre le $3^{\text{ème}}$ pas.

D'après les considérations du début, on a donc démontré la proposition.

2) *Une deuxième proposition technique.*

Dans la section précédente, nous avons considéré la variété Y au dessus de X vérifiant les conditions H_1, H_2 et H_3. Nous allons supposer l'entier $m \geqslant 12$ et dès à présent considérer la situation obtenue en remplaçant la condition H_1 par H_1':

H_1') Il existe une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'entiers positifs non tous nuls, pour chaque $n \in \{4, 5\}$ une famille $(b_i(n))_{i \in I}$ d'entiers positifs et un diviseur $M(n)$ tels que:

(i) $mP \equiv M + \sum_{i \in I} u_i E_i$, M est la partie mobile de $|mP|$, $\sum_{i \in I} u_i E_i$ sa partie fixe. De plus $|M|$ est sans point base.

(ii) $nP \equiv M(n) + \sum_{i \in I} b_i(n) E_i$, $M(n)$ est la partie mobile de $|nP|$, $\sum_{i \in I} b_i(n) E_i$ sa partie fixe. De plus $|M(n)|$ est sans point base.

LEMME 1–1. *Soit* $\alpha \in I$ *tel que* $u_\alpha/(\rho_\alpha + 1) \geqslant 1$; *si* $\rho_\alpha \in \{0, 1\}$, *il existe* $n \in \{4, 5\}$ *tel que* $b_\alpha(n) \geqslant 1$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Puisque $m \geqslant 12$, il existe deux entiers positifs p et q tels que: $m = 4p + 5q$. Puisque les multiplicités des composantes fixes des multiples d'un même diviseur sont sous-additives: $u_\alpha \leqslant pb_\alpha(4) + qb_\alpha(5)$. Mais on a: $u_\alpha \geqslant (\rho_\alpha + 1) \geqslant 1$; on déduit qu'il existe $n \in \{4, 5\}$ tel que $b_\alpha(n) \geqslant 1$.

Nous allons raffiner la proposition 1–1:

PROPOSITION 1–2. *Sous les hypothèses H'_1, H_2, et H_3 pour tout $m \geqslant 17$ et tout $i \in I$ tel que $\rho_i \in \{0, 1\}$, on a: $u_i/(\rho_i + 1) < 1$.*

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $\rho_\alpha \in \{0, 1\}$ et: $u_\alpha/(\rho_\alpha + 1) \geqslant 1$. Remarquons que si $u_\alpha/(\rho_\alpha + 1) > 1$, on a en fait: $u_\alpha/(\rho_\alpha + 1) \geqslant 1 + (1/2)$. Puisque $m \geqslant 17$, on a aussi: $1 + (2/(\mathrm{m} - 2)) \leqslant 1 + (2/15) < 1 + (1/2)$. Cela contredirait la proposition 1–1. On peut donc supposer: $u_\alpha/(\rho_\alpha + 1) = 1$. Nous allons procéder en plusieurs pas:

1er *pas*: Il existe un entier $n \in \{4, 5\}$ et un nombre rationnel $t > 0$ vérifiant les conditions suivantes: Posons $b(t) = \max\{(u_i + tb_i(n))/(\rho_i + 1), i \in I\}$, et notons $F(t)$ l'ensemble formé des $i \in I$ tels que:

$$b(t) = (u_i + tb_i(n))/(\rho_i + 1)\,.$$

Alors on a:

(i) $m - ((m + tn)/b(t)) - 2 > 0$,

(ii) $u_i \neq 0$ pour tout $i \in F(t)$.

Remarquons que pour avoir la condition (i), il suffit de trouver t et n tels que: $m - ((m + tn)(\rho_\alpha + 1)/(u_\alpha + tb_\alpha(n))) - 2 > 0$, ce qui équivaut à: $m + tn < (m - 2)(1 + tb_\alpha(n))/(\rho_\alpha + 1)$, ou encore:

$$\text{(A)} \qquad t(((m - 2)b_\alpha(n)/(\rho_\alpha + 1)) - n) > 2\,.$$

La condition (ii) est impliquée par la condition: pour tout $i \in I$, on a $tb_i(n)/(\rho_i + 1) < (u_\alpha + tb_\alpha(n))/(\rho_\alpha + 1) \leqslant b(t)$. Mais d'après la proposition 1–1, on a pour tout $i \in I$: $b_i(n)/(\rho_i + 1) \leqslant 1 + (2/(n - 2))$. La condition (ii) sera réalisée dès que: $t(1 + (2/(n - 2))) < 1 + (tb_\alpha(n)/(\rho_\alpha + 1))$, c'est à dire:

$$\text{(B)} \qquad t(1 - (b_\alpha(n)/(\rho_\alpha + 1)) + (2/(n - 2)) < 1\,.$$

Posons $c_\alpha(n) = b_\alpha(n)/(\rho_\alpha + 1)$; les conditions (A) et (B) sont compatibles si la condition suivante est réalisée:

$$\text{(C)} \qquad 1 + (n/2) + (2/(n - 2)) < mc_\alpha(n)/2 \quad \text{et} \quad (m - 2)c_\alpha(n) - n > 0\,.$$

La condition (C) ne dépend plus de t. Nous allons montrer que celle-ci

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

est satisfaite pour un $n \in \{4, 5\}$ dès que $m \geqslant 17$.

Choisissons à l'aide du lemme 1–1 un entier $n \in \{4, 5\}$ tel que $b_\alpha(n) \geqslant 1$. On peut donc supposer $c_\alpha(n) \geqslant 1/2$; remarquons que:

$$((m-2)/2) - n \geqslant (15/2) - 5 = 5/2 > 0 \,,$$
$$1 + (n/2) + (2/(n-2)) \leqslant 4 + (1/6) \,,$$
$$c_\alpha(n)m/2 \geqslant m/4 \geqslant 4 + (1/4) \,.$$

Cela démontre le résultat.

$2^{\text{ème}}$ *pas.* quelques calculs arithmétiques.

Soient t un nombre rationnel > 0 et $n \in \{4, 5\}$ tels que les conditions (i) et (ii) du 1^{er} pas soient réalisées. Posons avec les notations du 1^{er} pas:

$$c = m - ((m + tn)/b(t)) - 2 \,.$$

D'après le 1^{er} pas on a: $c > 0$. Posons pour chaque $i \in I$: $d_i = u_i + tb_i(n)$. Pour tout nombre rationnel $r > 0$ soit:

$$a(r) = \max\{(d_i + r(t_i + \tau))/(\rho_i + 1),\ i \in I\} \,.$$

Notons comme précédemment $E(r)$ l'ensemble formé des $i \in I$ tels que:

$$a(r) = (d_i + r(t_i + \tau))/(\rho_i + 1) \,.$$

En faisant tendre r vers 0, il est clair qu'il existe un nombre rationnel $r > 0$ tel que les conditions suivantes soient remplies:

(i) $m - ((m + tn))/a(r)) - 2 > c$,

(ii) $E(r) \subset F(t)$,

(iii) $r/a(r) < 1$.

D'après l'assertion (ii) du 1^{er} pas, la condition $E(r) \subset F(t)$ entraîne que pour tout $i \in E(r)$, on a $u_i \neq 0$. Soit $o \in E(r)$; posons $s_0 = t_0 + \tau$ *et* pour tout $i \in I - \{o\}$: $s_i = t_i$. On définit une famille $(m_i)_{i \neq 0}$ d'entiers positifs en posant pour chaque $i \neq o$:

$$m_i = -\,[((d_i + rs_i)/a(r)) - \rho_i] \,.$$

On a: $0 \leqslant m_i \leqslant \{\rho_i\}$; de plus: $((d_0 + rs_0)/a(r)) - \rho_0 = 1$.

$3^{\text{ème}}$ *pas.* Le diviseur $A \equiv mP + \sum_{i \neq 0} m_i E_i$ vérifie les conditions a), $\cdots$, e) de la proposition 0–5.

Avec les notations des pas antérieurs, écrivons dans $NS_Q(Y)$:

$$\begin{aligned} A - K_Y - E_0 = {} & (m - ((m + tn)/a(r)) - 2)P + (P - (R/e)) - (r(a/r)) \sum_{i \in I} s_i E_i \\ & + P + ((M + tM(n))/a(r)) + \sum_{i \neq 0} (((d_i + rs_i)/a(r)) + m_i - \rho_i)E_i \,. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Pour tout $i \in I - \{o\}$, posons: $c_i = ((d_i + rs_i)/a(r)) + m_i - \rho_i$. Alors d'après la définition des m_i, c_i est un nombre rationnel de $[0, 1[$ pour $i \neq o$. D'après les conditions (i) et (iii) du $2^{\text{ème}}$ pas relatives au choix de r, on a: $m - ((m + tn)/a(r)) - 2 > 0$. Si l'on pose dans $NS_{\boldsymbol{Q}}(Y)$:

$$L = (m - ((m + tn)/a(r)) - 2)P + (P - (R/e)) - (r/a(r)) \sum_{i \in I} s_i E_i \ ,$$

on a:

$$L = (m - ((m + tn)/a(r)) - 2)P + (1 - (r/a(r))(P - (R/e)) \\ + (r/a(r))(P - (R/e) - \sum_{i \in I} s_i E_i) \ .$$

D'après l'hypothèse H_3, il est facile de voir que L est un $\boldsymbol{Q}$-diviseur ample. Posons maintenant: $G \equiv A - K_Y - E_0 - P$. On a dans $NS_{\boldsymbol{Q}}(Y)$: $G = L + \sum_{i \neq 0} c_i E_i$. Par définition on a: $A \equiv K_Y + E_0 + P + G$. Le lecteur vérifiera sans peine que les conditions a), $\cdots$, e) de la proposition 0–5 sont satisfaites. Cela termine la démonstration du $3^{\text{ème}}$ pas.

$4^{ème}$ *pas.* E_0 est contenu dans la partie fixe du système linéaire $|A|$.

Remarquons que par le choix de r effectué au $2^{\text{ème}}$ pas (condition (ii)), on a $u_0 \neq 0$. Pour avoir le résultat, il suffit de reprendre la démonstration du $3^{\text{ème}}$ pas de la proposition 1–1; nous y renvoyons donc le lecteur.

Le fait que E_0 soit composante fixe du système linéaire $|A|$ contredit la proposition 0–5, et démontre la proposition 1–2.

3) *Quelques constructions préparatoires*

Soient X, H et D vérifiant les hypothèses de la proposition 1.

PROPOSITION 1–3. *Soit m un entier $\geqslant 12$. Il existe un modèle birationnel lisse Y de X, un morphisme f: $Y \to X$ tels que*:

(i) *les hypothèses H_1', H_2 et H_3 du deuxième paragraphe de ce chapitre soient satisfaites.*

(ii) *Pour toute composante irréductible C de dimension 1 de $B(mD)$, avec les notations du $2^{\text{ème}}$ paragraphe de ce chapitre, il existe $i \in I$ vérifiant*:

a) $f(E_i) = C$,

b) *on a* $\rho_i = 0$ *si* $C \subset \operatorname{sing}(X)$,

c) *on a* $\rho_i = 1$ *si* $C \not\subset \operatorname{Sing}(X)$.

Démonstration. Montrons l'assertion (i). En fait, nous allons seulement démontrer que les hypothèses H_1, H_2 et H_3 du 1^{er} paragraphe de ce chapitre peuvent être satisfaites, en laissant au lecteur le soin d'adapter la démonstration pour avoir H_1'. Soient $m \geqslant 12$, N la partie mobile de

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

$|mD|$, $(W_i)_{i\in J_1}$ la famille finie des composantes irréductibles de dimension 2 de la partie fixe de $|mD|$, $(a_i)_{i\in J_1}$ une famille d'entiers positifs, tels que:

$$mD \equiv N + \sum_{i\in J_1} a_i W_i \;.$$

Soient L un diviseur ample, $(W_i)_{i\in J_2}$ une famille finie de diviseurs irréductibles, $(h_i)_{i\in J_2}$ une famille d'entiers positifs, et m_0 un entier >0 tels que: $m_0(eD - H) \equiv L + \sum_{i\in J_2} h_i W_i$.

D'après le théorème 0–3, soient Z et X' deux modèles birationnels de X, $s\colon X' \to X$ et $t\colon Z \to X'$ deux morphismes birationnels, $(V_j)_{j\in J}$ une famille finie de diviseurs lisses à croisements normaux sur Z, $(p_j)_{j\in J}$ une famille d'entiers positifs, tels que:

1) Z est lisse et X' n'a que des singularités terminales au sens de [R-2].

2) Notons ω_Z et $\omega_{X'}$ les faisceaux dualisants de Y et X' respectivement. Alors on a: $\omega_{X'}^{[e]} = s^*(\omega_X^{[e]})$ *et* $\omega_Z^{\otimes e} = t^*(\omega_{X'}^{[e]})(\sum_{j\in J} p_j V_j)$.

3) Pour tout $j \in J$, $t(V_j)$ est un point singulier de X'.

Soient n un entier >0 et $i\colon X \to \boldsymbol{P}^n$ le plongement de X dans $\boldsymbol{P}^n$ défini par un multiple convenable de L. D'après Hironaka ([Hi]), il existe un modèle birationnel lisse $\hat{\boldsymbol{P}}^n$ de $\boldsymbol{P}^n$, un morphisme birationnel $\Phi\colon \hat{\boldsymbol{P}}^n \to \boldsymbol{P}^n$ composé d'une suite finie d'éclatements de centres lisses de dimension $\leqslant 2$, vérifiant les conditions suivantes: Le transformé strict X_0 de X par Φ est lisse. Notons $f_0 = \Phi|_{X_0}$. Soient $(E_i^0)_{i\in I_0}$ la famille des diviseurs obtenue en prenant les composantes irréductibles des traces sur X_0 des diviseurs exceptionnels de Φ. Alors pour tout $i \in I_0$, on a: $f_0(E_i^0) \subset \operatorname{Sing}(X)$.

Puisque X_0 est lisse, il existe un modèle birationnel lisse X_1 de X_0, un morphisme birationnel $f_1\colon X_1 \to X_0$ composé d'une suite finie d'éclatements de centres lisses de dimension $\leqslant 1$, tels que la partie mobile de $|(f_0 \circ f_1)^*(mD)|$ soit sans point base. Posons $g = s \circ t$.

Soient Y un modèle birationnel lisse de X_1, $f_2\colon Y \to X_1$ et $h\colon Y \to Z$ deux morphismes birationnels vérifiant les conditions suivantes:

— f_2 est composé d'une suite finie d'éclatements de centres lisses de dimension $\leqslant 1$.

— Posons $f = f_0 \circ f_1 \circ f_2$; soient $(E_i)_{i\in I}$ la famille formée des diviseurs exceptionnels de f et des transformés stricts des W_j pour $j \in J_1 \cup J_2$ et des E_i^0 pour $i \in I_0$. Alors $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de diviseurs lisses à croisements normaux.

— On a: $f = g \circ h$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Puisque la partie mobile de $|(f_0 \circ f_1)^*(mD)|$ est sans point base, il en est de même de celle de $|f^*(mD)|$. Soient M la partie mobile de $|f^*(mD)|$, $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers non tous nuls, tels que:

$$f^*(mD) \equiv M + \sum_{i\in I} u_i E_i \ .$$

L'hypothèse H_1 est donc réalisée.

Soit K_Y le diviseur canonique de Y. Posons $R = f^*(H)$ et $P = f^*(D)$. D'après [R-1], puisque $f\colon Y \to X$ est une désingularisation de X, il existe une famille $(\rho_i)_{i\in I}$ de nombres rationnels positifs telle que dans $NS_{\boldsymbol{Q}}(Y)$, on ait:

$$K_Y = (R/e) + \sum_{i\in I} \rho_i E_i \ ,$$

et pour tout $i \in I$ tel que $\rho_i > 0$, on a: $\dim(f(E_i)) \leqslant 1$. Cela démontre H_2.

Soit $(d_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers positifs telle que:

$$m_0(eD - H) \equiv f^*(L) + \sum_{i\in I} d_i E_i \ .$$

Soit I' l'ensemble formé des $i \in I$, tels que E_i soit le transformé strict d'un diviseur E_j^0 pour $j \in I_0$ ou bien d'un diviseur exceptionnel de $f_1 \circ f_2$. Alors d'après la remarque 0–2 (le plongement de X dans $\boldsymbol{P}^n$ est défini à partir d'un multiple convenable de L), il existe un entier $b' > 0$ et une famille $(b_i)_{i\in I'}$ d'entiers > 0, tels que le diviseur $b'f^*(L) - \sum_{i\in I'} b_i E_i$ soit ample. D'après les résultats de Serre sur les faisceaux amples (cf. par exemple [Ha]), il existe un entier $b > 0$, et une famille $(t_i')_{i\in I}$ d'entiers > 0, tels que pour toute famille $(e_i)_{i\in I} \in \{0, 1\}^I$, le diviseur $bf^*(L) - \sum_{i\in I} (t_i' + e_i)E_i$ soit ample. Soient q un entier > 0, et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers de $\{0, 1\}$; on peut écrire:

$$\begin{aligned}(q + m_0 b)(eP - R) \equiv q(eP - R) &+ (bf^*(L) - \sum_{i\in I} (t_i' + e_i)E_i) \\ &+ \sum_{i\in I} (bd_i + t_i' + e_i)E_i \ .\end{aligned}$$

Dans $NS_{\boldsymbol{Q}}(Y)$, on a:

$$\begin{aligned}&(P - (R/e)) - \sum_{i\in I} ((bd_i + t_i' + e_i)/e(q + bm_0))E_i \\ &\quad = (q(eP - R) + (bf^*(L) - \sum_{i\in I} (t_i' + e_i)E_i))/e(q + bm_0) \ .\end{aligned}$$

Par suite si q est assez grand, et si l'on pose pour tout $i \in I$:

$$t_i = (bd_i + t_i')/e(q + bm_0) \quad \text{et} \quad \tau = (1/e(q + bm_0))$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

on obtient:

— pour tout $i \in I$, on a: $t_i \in [0, 1[$.
— pour toute famille $(\tau_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels de $[0, \tau]$ le $\boldsymbol{Q}$-diviseur $(P - (R/e)) - \sum_{i \in I} (t_i + \tau_i)E_i$ est ample.

L'hypothèse H_3 est donc réalisée.

Montrons l'assertion (ii). Soit C une composante irréductible de dimension 1 de $B(mb)$. Distinguons deux cas:

Supposons $C \subset \mathrm{Sing}\,(X)$. Alors d'après [R-2], il existe un diviseur irréductible sur X' tel que $s(W) = C$. Puisque $C \subset B(mD)$, W est contenu dans $B(s^*(mD))$. Soit W' le transformé strict de W par t. Alors W' est contenu dans $B(g^*(mD))$, et W' est distinct de tous les V_j pour $j \in J$. Comme $C \subset B(mD)$, il existe $i \in I$ tel que le transformé strict de W' par h soit E_i. Puisque h: $Y \to Z$ est un isomorphisme en codimension 1, on a $\rho_i = 0$ d'après ce que l'on vient de voir.

Supposons $C \not\subset \mathrm{Sing}\,(X)$. Puisque f_0: $X_0 \to X$ est une désingularisation de X telle que pour tout $i \in I_0$, on ait: $f_0(E_i^0) \subset \mathrm{Sing}\,(X)$, C possède un transformé strict C' par f_0. La courbe C' est aussi une composante irréductible de dimension 1 de $B(f_0^*(mD))$. Puisque la partie mobile de $|(f_0 \circ f_1)^*(mD)|$ est sans point base, il existe un diviseur exceptionnel W de f_1 correspondant à l'éclatement de la courbe C'. Il existe donc $i \in I$, tel que E_i soit le transformé strict de W par f_2, et on a $\rho_i = 1$.

Cela termine la démonstration de la proposition.

4) *La démonstration de la proposition* 1

Soit m un entier $\geqslant 17$ tel que $|mD|$ ne soit pas composé d'un pinceau. D'après le théorème de Bertini, on peut supposer $B(mD) \neq \emptyset$, car sinon il n'y a rien à démontrer.

D'après la proposition 1–3, il existe un modèle birationnel lisse Y de X, un morphisme birationnel f: $Y \to X$ vérifiant les conditions H_1', H_2, et H_3 du 2ème paragraphe de ce chapitre. En reprenant les notations de ce paragraphe distinguons plusieurs cas:

1er *cas.* Supposons que $B(mD)$ ait une composante irréductible de dimension 2. Soit E_i le transformé strict de celle-ci par f. Alors on a $\rho_i = 0$ *et* $u_i \geqslant 1$. Par suite $u_i/(\rho_i + 1) \geqslant 1$, ce qui contredit la proposition 1–2.

2ème *cas.* D'après le premier cas, on peut supposer que $\dim\,(B(mD))$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

$\leqslant 1$. Soit C une composante irréductible de dimension 1 de $B(mD)$. Distinguons les deux possibilités suivantes:

a) Supposons C contenue dans Sing (X). D'après la proposition 1–3, il existe $i \in I$ tel que $f(E_i) = C$ et $\rho_i = 0$. Par hypothèse, on a: $u_i \geqslant 1$, et donc: $u_i/(\rho_i + 1) \geqslant 1$. Cela contredit la proposition 1–2.

b) Supposons C non contenue dans Sing (X). Supposons que l'élément général de $|mD|$ passe par C avec multiplicité $\geqslant 2$. D'après la proposition 1–3, il existe $i \in I$ tel que $f(E_i) = C$ et $\rho_i = 1$. Comme on a: $u_i \geqslant 2$, on déduit: $u_i/(\rho_i + 1) \geqslant 1$, ce qui contredit la proposition 1–2.

Pour avoir la proposition 1, il suffit maintenant d'utiliser le théorème de Bertini.

Un résultat sur les surfaces $\boldsymbol{Q}$-Gorenstein

Definition 2–1. Soit S une surface normale et projective. Nous dirons que S est $\boldsymbol{Q}$-Gorenstein, si elle vérifie les conditions suivantes: S est de Cohen-Macaulay; notons ω_S son faisceau dualisant. Alors il existe un entier $r > 0$, tel que le bidual du faisceau $\omega_S^{\otimes r}$ soit inversible.

Definition 2–2. Soit S une surface normale projective $\boldsymbol{Q}$-Gorenstein. Nous dirons que S est de type général si un modèle lisse de S est une surface de type général.

Proposition 2–0. *Soient S une surface normale $\boldsymbol{Q}$-Gorenstein de type général, ω_S son faisceau dualisant, n un entier $\geqslant 2$, a et r deux entiers > 0, D et U deux diviseurs de Cartier sur S, vérifiant les conditions suivantes*:

a) *Le bidual de $\omega_S^{\otimes r}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_S(U)$.*

b) *Pour toute courbe C sur S, on a $\deg_C(\mathcal{O}_S(D)) \geqslant 0$ et $\deg_C(\mathcal{O}_S(aD - U)) \geqslant 0$.*

c) *$D^2 > 0$ et on a $h^0(S, \mathcal{O}_S(nD)) \geqslant 4$.*

Alors le faisceau $\mathcal{O}_S(mD)$ est engendré par ses sections globales dans les deux cas suivants:

(i) $r \geqslant 2$ *et* $m \geqslant n + a + r - 1$,

(ii) $r = 1$ *et* $m \geqslant n + r + a$.

Le but de ce chapitre est de démontrer cette proposition en trois étapes.

1) *Un résultat élémentaire sur les surfaces de type général*

Soient S une surface lisse de type général, S_0 son modèle minimal et

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

$f\colon S \to S_0$ le morphisme birationnel correspondant. Notons K le diviseur canonique de S, K_0 l'image inverse de celui de S_0 par f. Par définition, il existe une famille finie de diviseurs effectifs $(L_i)_{i \in I}$, une famille $(C_p)_{p \in I}$ de courbes rationnelles lisses, une famille de sous-ensembles $(I_p)_{p \in I}$, un ordre partiel sur I, tels que les conditions suivantes soient réalisées:

a) pour tout $i \in I$, on a: $L_i^2 = -1$, $K_0 \cdot L_i = 0$,

b) pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$, on a $L_i \cdot L_j = 0$,

c) pour tout $p \in I$, et tout $i \in I_p$, on a $p < i$, et $L_p = C_p + \sum_{i \in I_p} L_i$,

d) on a: $K \equiv K_0 + \sum_{i \in I} L_i$.

Proposition 2–1. *Soit R un diviseur numériquement positif non nul sur S, soit J l'ensemble formé des $i \in I$ tels que $R \cdot L_i \geqslant 1$. Le diviseur $R + \sum_{i \in J} L_i$ est numériquement positif.*

Démonstration. Pour tout $i \notin J$, on a $R \cdot L_i = 0$. Remarquons que si p et q sont dans I, on a $L_p \cdot C_q \geqslant -1$, et on a égalité si et seulement si $p = q$. En effet par la condition c), on a:

$$C_q = L_q - \sum_{i \in I_q} L_i .$$

Si $p \neq q$, on obtient: $L_p \cdot (L_q - \sum_{i \in I_q} L_i) = -(\sum_{i \in I_q} L_i) \cdot L_p \geqslant 0$.
Si $p = q$, on obtient: $L_p \cdot (L_p - \sum_{i \in I_p} L_i) = -1$, ce qui montre le résultat.
Soit $p \in I$ tel que: $(\sum_{j \in J} L_j) \cdot C_p < 0$. Alors $p \in J$, et on a:

$(\sum_{j \in J} L_j) \cdot C_p = L_p \cdot C_p + (\sum_{j \neq p} L_j) \cdot C_p$.

D'après ce qui précéde, $L_p \cdot C_p = -1$ et $L_j \cdot C_p \geqslant 0$ pour $j \neq p$, par suite pour tout $j \in J - \{p\}$, on a $L_j \cdot C_p = 0$ et $(\sum_{j \in J} L_j) \cdot C_p = -1$. La relation c) montre que $I_p \cap J = \emptyset$. On déduit pour tout $i \in I_p$: $R \cdot L_i = 0$. Pour tout $p \in J$, on a $R \cdot L_p \geqslant 1$, et puisque $C_p = L_p - \sum_{i \in I_p} L_i$, on obtient: $R \cdot C_p \geqslant 1$. Montrons que pour tout $p \in I$, on a: $(R + \sum_{j \in J} L_j) \cdot C_p \geqslant 0$. Distinguons deux cas:

1) supposons $p \in J$:

D'après ce qui précéde, on a: $(\sum_{j \in J} L_j) \cdot C_p \geqslant -1$. Comme $R \cdot C_p \geqslant 1$, on a: $(R + \sum_{j \in J} L_j) \cdot C_p \geqslant 0$.

2) supposons $p \notin J$:

Alors on a: $(\sum_{j \in J} L_j) \cdot C_p \geqslant 0$, et donc puisque R est numériquement positif, on a le résultat. Cela achéve de montrer la proposition.

2) *Une proposition technique sur les surfaces.*

Lemme 2–1. *Soient S une surface lisse et projective, R un diviseur numériquement positif verifiant $R^2 > 0$. Alors:*

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

(i) *Le nombre de courbes irréductibles deux à deux distinctes C telles que $R\cdot C = 0$ est fini.*

(ii) *Le nombre de diviseurs effectifs E distincts deux à deux tels que $R\cdot E = 0$ et $E^2 = -1$, est fini.*

Nous renvoyons au lemme 1–2 de [B–1] pour la démonstration de ce résultat.

PROPOSITION 2–2. *Soient S une surface lisse et projective, R et P deux diviseurs numériquement positifs, K le diviseur canonique de S, n un entier $\geqslant 2$, tels que l'on ait:*

a) $P^2 > 0$ *et* $R^2 > 0$,

b) $h^0(S, \mathcal{O}_S(nR)) \geqslant 4$.

Supposons $|K + P + nR| \neq \emptyset$. On a les assertions suivantes:

(i) *Soit $x \in B(K + P + nR)$. Alors il existe un diviseur effectif E passant par $\{x\}$ vérifiant $P\cdot E = R\cdot E = 0$ et $E^2 = -1$.*

(ii) *Soit C une courbe irréductible contenue dans $B(K + P + nR)$. Alors C est une courbe rationnelle lisse vérifiant $R\cdot C = P\cdot C = 0$.*

Démonstration. Soit x un point fermé de S. Soient S' un modèle birationnel de S, f: $S' \to S$ l'éclatement du point x, et L le diviseur exceptionnel correspondant. Notons K' le diviseur canonique de S'. Supposons que $x \in B(K + P + nR)$. D'après l'hypothèse b), il existe une famille $(C_i)_{i\in I}$ de courbes irréductibles, et une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'entiers positifs, tels que l'on ait:

$$\sum_{i\in I} a_i C_i \in |f^*(nR) - 2L| .$$

1^{er} *pas.* la 0-connexité de $nf^*(R) - 2L$.

Soit $D \in |f^*(nR) - 2L|$. Alors montrons que D est 0-connexe au sens de [Ra]. Soient D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs non nuls sur S', G_1 et G_2 deux diviseurs effectifs sur S, n_i des entiers pour $i \in \{1, 2\}$, tels que l'on ait:

— $D_i = f^*(G_i) - n_i L$ pour $i \in \{1, 2\}$,

— $G_1 + G_2 \sim nR$, et $n_1 + n_2 = 2$.

Ecrivons dans $NS_Q(S)$, pour $i \in \{1, 2\}$: $G_i = (R\cdot G_i/R^2)R + (-1)^i\xi$ avec $R\cdot\xi = 0$. On a:

$$R\cdot G_1 + G\cdot R_2 = nR^2 . \tag{1}$$

De plus on a:

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

(2) $$D_1 \cdot D_2 = G_1 \cdot G_2 - n_1 n_2 = ((R \cdot G_1)(R \cdot G_2)/R^2) - \xi^2 - n_1 n_2 .$$

D'après le théorème de l'indice sur S, on obtient $\xi^2 \leqslant 0$. Distinguons deux cas:

1^{er} *cas.* supposons $R \cdot G_1 > 0$ et $R \cdot G_2 > 0$.

On a d'après la formule (1): $(R \cdot G_1)(R \cdot G_2)/R^2 \geqslant (nR^2 - 1)/R^2 \geqslant n - (1/R^2) \geqslant 2 - 1 = 1$. D'après la formule (2), on déduit: $D_1 \cdot D_2 \geqslant 0$.

$2^{ème}$ *cas.* supposons $R \cdot G_1 = 0$.

Alors on a: $(G_1 + G_2) \cdot G_1 = G_1 \cdot G_2 + G_1^2 = 0$. Puisque $R^2 > 0$, le théorème de l'indice sur S implique: $G_1^2 \leqslant -1$, ce qui montre que: $G_1 \cdot G_2 \geqslant 1$. En utilisant la formule (2), on obtient: $D_1 \cdot D_2 \geqslant 1 - 1 = 0$.

$2^{ème}$ *pas.* On a l'une des assertions suivantes:

(i) Il existe un entier $m > 0$, une famille $(D_p)_{0 \leqslant p \leqslant m}$ de diviseurs, une famille $(j_p)_{0 \leqslant p \leqslant m}$ d'éléments de I, vérifiant les conditions suivantes:

a) pour tout $p \in \{0, \cdots, m-1\}$, on a $D_{p+1} \equiv D_p + C_{i_p}$ et

$$H^0(C_{j_p}, \mathcal{O}_{C_{j_p}}(-D_p)) = 0 ,$$

b) on a: $D_0 \equiv f^*(P)$, et $D_m \equiv f^*(P + nR) - 2L$.

(ii) Il existe un diviseur effectif E sur S passant avec multiplicité 1 par le point x vérifiant: $P \cdot E = R \cdot E = 0$ et $E^2 = -1$. Soit C_x la composante irréductible de E passant par x. On a: $\mathcal{O}_{C_x}(nR - E) = \mathcal{O}_{C_x}(\{x\})$.

Il est clair que l'on a l'assertion (i) sauf s'il existe une famille $(b_i)_{i \in I}$ d'entiers $\geqslant 0$ vérifiant:

1) pour tout $i \in I$, on a $b_i \leqslant a_i$,

2) l'ensemble formé des $i \in I$ tels que $b_i < a_i$ est non vide. De plus si $i \in I$ vérifie $b_i < a_i$, on a:

$$h^0(C_i, \mathcal{O}_{C_i}(-f^*(P) - \sum_{i \in I} b_i C_i)) \geqslant 1 .$$

Soit I' l'ensemble formé des $i \in I$ tels que $b_i < a_i$. La condition 2) entraîne que pour tout $i \in I'$, on a:

(1) $$C_i \cdot (f^*(P) + \sum_{i \in I} b_i C_i) \leqslant 0 .$$

Posons $D = \sum_{i \in I} b_i C_i$. Puisque $f^*(P)$ est numeriquement positif, d'après (1), pour tout $i \in I'$ on a:

(2) $$D \cdot C_i \leqslant 0 .$$

Posons pour chaque $i \in I'$, $e_i = a_i - b_i$; on a: $D + \sum_{i \in I'} e_i C_i = f^*(nR) -$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

$2L$. D'après la formule (2) on a: $D\cdot(\sum_{i\in I'} e_iC_i) \leqslant 0$. D'après le 1er pas, on déduit:

$$D\cdot(\sum_{i\in I'} e_iC_i) = 0\,. \tag{3}$$

La formule (2) entraîne que pour tout $i \in I'$, on a $D\cdot C_i = 0$. La formule (1) montre que pour tout $i \in I'$ on a:

$$f^*(P)\cdot C_i = 0\,. \tag{4}$$

La condition 2) entraîne alors que pour tout $i \in I'$, on a:

$$f^*(P)|_{C_i} \equiv D|_{C_i} \equiv 0\,. \tag{5}$$

Posons $D' = \sum_{i\in I'} e_iC_i$. Soient M et M' deux diviseurs effectifs sur S, a et a' deux entiers, tels que l'on ait:

$$D = f^*(M) - aL\,,\quad D\text{'} = f^*(M') - a'L\,,\quad M + M' \equiv nR\,, \quad \text{et}\quad a + a' = 2\,. \tag{6}$$

D'après la formule (4), on a:

$$D'\cdot f^*(P) = M'\cdot P = 0 \tag{7}$$

La formule (3) montre que:

$$D\cdot D' = M\cdot M' - aa' = 0 \tag{8}$$

Puisque $a + a' = 2$, on a:

$$M\cdot M' \leqslant 1\,. \tag{9}$$

Remarquons que M' est non nul, car sinon on aurait $a' < 0$, et la formule (8) serait absurde. La formule (7) et le théorème de l'indice entraînent:

$$M'^2 \leqslant -1\,. \tag{10}$$

La 3ème égalité de (6) montre que:

$$M\cdot M' + M'^2 = nR\cdot M' \geq 0$$

A l'aide des formules (9) et (10), on déduit:

$$M\cdot M' = 1\,,\quad M'^2 = -1\,,\quad R\cdot M' = 0\,.$$

La formule (8) entraîne:

$$a = a' = 1\,. \tag{11}$$

Supposons que M' passe au moins deux fois par $\{x\}$. Alors L serait

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

composante irréductible de D' et d'après la formule (2), on aurait: $D\cdot L=0$, ce qui est absurde d'après (11) et la $1^{\text{ère}}$ égalité de (8).

Soient C_x la composante de M' passant avec multiplicité 1 par $\{x\}$ et C'_x le transformé strict de C_x par f. D'après la formule (5), on a:

$$D|_{C'_x} \equiv 0 ,$$

d'où l'on déduit: $\mathcal{O}_{C'_x}(f^*(nR-M')) \cong \mathcal{O}_{C'_x}(L)$. Cela implique:

$$\mathcal{O}_{C_x}(nR-M') \cong \mathcal{O}_{C_x}(\{x\}) . \tag{12}$$

On a donc démontrer le $2^{\text{ème}}$ pas.

$3^{ème}$ *pas*. L'assertion (i) du $2^{\text{ème}}$ pas est absurde.

Soit $x \in B(K+P+nR)$. Soient m un entier >0, $(D_p)_{0\leqslant p\leqslant m}$ une suite de diviseurs sur S', $(j_p)_{0\leqslant p\leqslant m}$ une suite d'éléments de I vérifiant les conditions de l'assertion (i) du $2^{\text{ème}}$ pas. Soit $p\in\{0,\cdots,m-1\}$; on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(-D_{p+1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(-D_p) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_{j_p}}(-D_p) \longrightarrow 0 . \tag{p}$$

Montrons par récurrence sur p que $H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(-D_p))=0$. D'après le théorème 0–1, on a: $H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(-D_0))=0$. Supposons que $H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(-D_p))=0$. D'après l'assertion (i) a) du $2^{\text{ème}}$ pas, on a: $H^0(C_{j_p}, \mathcal{O}_{C_{j_p}}(-D_p))=0$. La suite exacte (p) montre que: $H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(-D_{p+1}))=0$. Cela montre le résultat.

On a: $H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(-D_m))=0$. De plus la suite:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(f^*(K+P+nR)-L) \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(f^*(K+P+nR)) \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow 0$$

est exacte. Par dualité de Serre, on obtient:

$$H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(f^*(K+P+nR)-2L)) \cong H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(-D_m))=0 .$$

Cela entraîne que l'homomorphisme:

$$H^0(S', \mathcal{O}_{S'}(f^*(K+P+nR))) \longrightarrow H^0(L, \mathcal{O}_L)$$

est surjectif, ce qui est absurde.

$4^{ème}$ *pas*. La démonstration de l'assertion (ii) de la proposition 2–2.

Soit C une courbe fixe du système linéaire $|K+P+nR|$. Alors chaque $x\in C$ appartient à $B(K+P+nR)$. D'après ce qui précéde, il existe un diviseur effectif E_x vérifiant $P\cdot E_x = R\cdot E_x = 0$ et $E_x=-1$. De plus ce diviseur passe exactement une fois par x. Soit C_x la composante irréduc-

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

tible de E_x contenant x. D'après le lemme 2–1, il existe un sous-ensemble infini N de C, une courbe irréductible C_0, un diviseur effectif E, tels que pour tout $x \in N$, on ait: $E_x = E$ et $C_x = C_0$. Alors, pour tout $x \in N$, on a $x \in C \cap C_0$. Cela entraîne que $C = C_0$. De plus d'après la formule (12) du $2^{\text{ème}}$ pas, on a:

$$\mathcal{O}_C(\{x\}) = \mathcal{O}_C(nR - E)$$

par suite C est une courbe rationnelle lisse vérifiant: $P \cdot C = R \cdot C = 0$. Cela termine la démonstration de la proposition 2–2.

3) *Sur la résolution minimale de S.*

Soit S une surface normale et projective vérifiant les hypothèses de la proposition 2–0. Soit $(Q_a)_{a \in A}$ la famille finie des points singuliers de S, $f\colon S' \to S$ la résolution minimale de ces points singuliers. Pour chaque $a \in A$, notons $(E_i^a)_{i \in I_a}$ la famille des composantes irréductibles de $f^{-1}(Q_a)$. Notons K le diviseur canonique de S'. Puisque f est la résolution minimale de S, il existe un diviseur effectif $E \in \oplus_{a \in A} \oplus_{i \in I_a} NE_i^a$ tel que: $rK + E \equiv f^*(U)$.

Posons $R \equiv f^*(D)$ et $P \equiv f^*(aD - U)$. Alors P et R sont des diviseurs numériquement positifs, et on a pour tout $a \in A$ et tout $i \in I_a$:

$$\mathcal{O}_{E_i^a}(P) = \mathcal{O}_{E_i^a}(R) = \mathcal{O}_{E_i^a} .$$

Comme S est normale, on a $f_*\mathcal{O}_{S'} = \mathcal{O}_S$ et donc, pour tout entier n, on a l'isomorphisme:

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(nD)) \cong H^0(S', \mathcal{O}_{S'}(nR)) . \tag{1}$$

Soient S_0 le modèle minimal de S' et K_0 l'image inverse du diviseur canonique de S_0 sur S'. Reprenons les notations de la proposition 2–1. Il existe une famille de diviseurs effectifs $(L_i)_{i \in I}$ tels que:

$$K \equiv K_0 + \sum_{i \in I} L_i .$$

Soit J le sous-ensemble formé des $i \in I$ tels que $R \cdot L_i = 0$. Posons $L = \sum_{i \in J} L_i$ et $L' = \sum_{i \notin J} L_i$. D'après la proposition 2–1, le diviseur $K_0 + R + L'$ est numériquement positif. Posons $E_0 = E + (r-1)L$.

LEMME 2–2. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a: $B((n + a + r)R) \cap E_0 = \emptyset$.*

Démonstration. Soit n un entier $\geqslant 0$. On a:

$$(n + a + r)R \equiv K + (r-1)(K + R) + (n+1)R + (aR - rK) .$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Par définition, on a:

$$K \equiv K_0 + L + L'$$
$$aR - rK \equiv f^*(aD - U) + E \equiv P + E\,.$$

En reportant ces égalités dans l'égalité ci-dessus, on obtient:

$$(2)\qquad (n + a + r)R \equiv K + (r - 1)(K_0 + R + L') + (n + 1)R + P + E + (r - 1)L\,.$$

Posons $P_n \equiv (r - 1)(K_0 + R + L') + nR + P$; d'après la proposition 2–1, P_n est un diviseur numériquement positif. Si $n \geqslant 1$, d'après la remarque 0–1 il vérifie: $P_n^2 > 0$. De plus on a:

$$(n + a + r)R \equiv K + P_{n+1} + E_0\,.$$

D'après la définition de E_0, on a: $\mathcal{O}_{E_0}(R) \cong \mathcal{O}_{E_0}$. Cela montre que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(K + P_{n+1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}((n + a + r)R) \longrightarrow \mathcal{O}_{E_0} \longrightarrow 0$$

est exacte. D'après les remarques précédentes sur P_n et le théorème 0–1, l'homomorphisme:

$$H^0(S', \mathcal{O}_{S'}((n + a + r)R)) \longrightarrow H^0(E_0, \mathcal{O}_{E_0})$$

est surjectif. Comme la fonction constante et égale à 1 appartient à $H^0(E_0, \mathcal{O}_{E_0})$, on déduit le résultat annoncé.

PROPOSITION 2–3. *Sous les hypothèses de la proposition* 2–0, *il existe un entier* n_0 *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, *le systéme linéaire* $|nD|$ *est sans point base.*

Démonstration. D'après l'isomorphisme (1) de ce paragraphe, il suffit de voir que pour n assez grand, $|nR|$ n'a pas de composantes fixes de dimension 1. Il découle alors des résultats de Zariski [Z] que pour n assez grand, $|nR|$ est sans point base. Posons $P_0 \equiv (r - 1)(K_0 + R + L') + P$; si $r \geqslant 2$, on a: $P_0^2 > 0$.

Soient n l'entier considéré dans la proposition 2–0, et m un entier $\geqslant n$. Soit C une courbe fixe du système linéaire $|(m + a + r)R|$. D'après le lemme 2–2, C n'est pas contenue dans E_0. Remarquons que puisque S' est de type général, on a d'après la proposition 0–4: $h^0(S', \mathcal{O}_{S'}(K + P_0 + (m + 1)R)) \geqslant 1$. D'après la formule (2) de ce paragraphe, on a:

$$(m + a + r)R \equiv K + P_0 + (m - n + 1)R + nR + E_0\,.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Posons $P_m \equiv P_0 + (m - n + 1)R$. D'après ce que l'on vient de voir, C est une composante fixe du système linéaire $|K + P_m + nR|$. Par l'hypothèse c) de la proposition 2–0, on a: $h^0(S', \mathcal{O}_{S'}(nR)) \geqslant 4$. Comme on a $m \geqslant n$, d'après la remarque 0–1, P_m est un diviseur numériquement positif vérifiant $P_m^2 > 0$. D'après la proposition 2–2, C est une courbe rationnelle lisse telle que: $P_m \cdot C = R \cdot C = 0$.

Soient $(C_i)_{i \in I}$ la famille finie des composantes fixes de $|(m + a + r)R|$, $(a_i)_{i \in I}$ la famille des multiplicités des C_i dans la partie fixe de $|(m + a + r)R|$, et M sa partie mobile. On a: $(m + a + r)R \equiv M + \sum_{i \in I} a_i C_i$. Soit b un entier $\in \{2, 3\}$; on a:

$$b(m + a + r)R \equiv K + P_0 + (m + 1 + (b - 2)(m + a + r))R + M + \sum_{i \in I} a_i C_i + E_0 .$$

Posons $G = E_0 + \sum_{i \in I} a_i C_i$. Alors puisque chaque C_i est rationnelle et lisse, on a: $\mathcal{O}_G(R) \cong \mathcal{O}_G$. Posons $R_m \equiv P_0 + (m + 1 + (b - 2)(m + a + r))R + M$. Etant donné que M est numériquement positif, d'après la remarque 0–1, R_m est numériquement positif et vérifie $R_m^2 > 0$. En utilisant le théorème 0–1, on obtient: $H^1(S', \mathcal{O}_{S'}(K + R_m)) = 0$. On a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(K + R_m) \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(b(m + a + r)R) \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow 0 .$$

L'homomorphisme: $H^0(S', \mathcal{O}_{S'}(b(m + a + r)R)) \to H^0(G, \mathcal{O}_G)$ est surjectif. Comme la fonction constante et égale à 1 appartient à $H^0(G, \mathcal{O}_G)$, on déduit:

$$B(b(m + a + r)R) \cap G = \emptyset .$$

Mais on a: $B(b(m + a + r)R) \subset B((m + a + r)R)$. Cela entraîne:

$$\dim B(b(m + a + r)R) = 0 .$$

Puisque pour tout $s \geqslant 7(n + a + r)$ il existe deux entiers p et $q \geqslant n$ vérifiant $s = 2(p + a + r) + 3(q + a + r)$, on obtient le résultat annoncé.

4) *La démonstration de la proposition* 2–0

Remarque 2–1. Soit C une courbe sur S' telle que $R \cdot C = 0$. Alors on a:

$$\mathcal{O}_C(R) \cong \mathcal{O}_C .$$

En effet, d'après la proposition 2–3, il existe un entier m_0 tel que pour $m \geqslant m_0$, $|mR|$ n'ait pas de point base. Soit m un entier $\geqslant m_0$; on a:

$$\mathcal{O}_C((m + 1)R) \cong \mathcal{O}_C(mR) \cong \mathcal{O}_C ,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

ce qui montre le résultat.

LEMME 2–3. *Soit E un diviseur effectif vérifiant $R \cdot E = 0$ et $E^2 = -1$. Alors E est 1-connexe au sens de* [Ra].

Démonstration. Soient D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs non nuls, tels que: $E = D_1 + D_2$. Puisque R est numériquement positif, on a $R \cdot D_1 = R \cdot D_2 = 0$. Comme $R^2 > 0$, le théorème de l'indice implique: $D_1^2 \leqslant -1$ et $D_2^2 \leqslant -1$. L'égalité: $-1 = E^2 = D_1^2 + 2D_1 \cdot D_2 + D_2^2$ montre que: $D_1 \cdot D_2 \geqslant 1$, ce qui termine la démonstration.

PROPOSITION 2–4. *Sous l'hypothèse de la proposition 2–0, le système linéaire $|(m + a + r)D|$ est sans point base dans les deux cas suivants:*

(i) $r \geqslant 2$ *et* $m \geqslant n - 1$,

(ii) $r = 1$ *et* $m \geqslant n$.

Démonstration. D'après l'isomorphisme (1) du paragraphe 3 de ce chapitre, il suffit de montrer que $|(m + a + r)R|$ n'a pas de point base. Soient m un entier $\geqslant n - 1$ si $r \geqslant 2$ ou $\geqslant n$ si $r = 1$, et x un point fermé de $B((m + a + r)R)$. Par le lemme 2–2, on a $x \notin E_0$. Comme précédemment posons $P_0 \equiv (r - 1)(K_0 + R + L') + P$ et $P_m \equiv P_0 + (m - n + 1)R$. D'après la formule (2) du paragraphe 3 de ce chapitre, on a:

$$\begin{aligned}(m + a + r)R &\equiv K + P_0 + (m - n + 1)R + nR + E_0 \\ &\equiv K + P_m + nR + E_0 \,.\end{aligned}$$

D'après la remarque 0–1 et les conditions (i) ou (ii), P_m est un diviseur numériquement positif vérifiant $P_m^2 > 0$. De plus la proposition 0–4 implique: $|K+P_m + nR| \neq \emptyset$. On en déduit que X est point base du système linéaire $|K + P_m + nR|$. D'après l'hypothèse c) de la proposition 2–0, on a: $h^0(S', \mathcal{O}_{S'}(nR)) \geqslant 4$. La proposition 2–1 implique qu'il existe un diviseur effectif E vérifiant: $R \cdot E = P_m \cdot E = 0$ et $E^2 = -1$. De plus E passe par le point x. La remarque 2–1 montre que:

$$\mathcal{O}_E(R) = \mathcal{O}_E \tag{1}$$

Montrons que $E \cap E_0 = \emptyset$: D'après le lemme 2–3, E est connexe; comme toutes les sections de $H^0(S', \mathcal{O}_{S'}((m + a + r)R))$ s'annulent au point x, d'après la formule (1), ces sections s'annulent aussi le long de E. D'après le lemme 2–2, on a $E \cap E_0 = \emptyset$; on obtient: $(m + a + r)R \cdot E = K \cdot E + P_m \cdot E + nR \cdot E + E_0 \cdot E = K \cdot E = 0$. Cela implique que l'on a: $E^2 \equiv 0 \pmod 2$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Comme $E^2 = -1$, on obtient une contradiction, ce qui démontre la proposition 2–4.

Il est clair que la proposition 2–4 entraîne la proposition 2–0 par la formule (1) du début de la troisième section de ce chapitre. Cela termine la démonstration de la proposition 2–0.

La démonstration des théorèmes 1 et 2

1) *La démonstration du théorème* 1:

Reprenons les notations données en (0–1) au chapitre 0.

PROPOSITION 3–1. *Soit m un entier $\geqslant 17$; il existe une surface irréductible, normale, $\boldsymbol{Q}$-Gorenstein de type général au sens des définitions* 2–1 *et* 2–2 *dans le système linéaire $|mH|$ n'ayant que des singularités isolées.*

Démonstration. D'après la proposition 0–3 (i), on a $|4H| \neq \emptyset$ et $|5H| \neq \emptyset$. D'après l'assertion (ii) de la proposition 0–3, le système linéaire $|mH|$ n'est pas composé d'un pinceau, et on a: $rH - H \equiv (r-1)H$. Les hypothèses de la proposition 1 sont donc satisfaites en y faisant $D = H$. Soit $S \in |mH|$ une surface irréductible n'ayant que des singularités isolées. Puisque X est de Cohen-Macaulay, S l'est aussi. Comme S n'a que des singularités isolées S est normale. Soit $f\colon Y \to X$ la résolution des singularités de X vérifiant les hypothèses données en (0–1). Soient Y' un modèle birationnel de Y, $f'\colon Y' \to Y$ un morphisme birationnel composé d'une suite finie d'éclatements de centres lisses, vérifiant les conditions suivantes: Posons $p = f \circ f'$; alors le transformé strict S' de S par p est lisse.

Soit $K_{Y'}$ le diviseur canonique de Y'; par hypothèse, il existe un diviseur effectif E tel que: $rK_{Y'} \equiv p^*(H) + E$. Soit K' le diviseur canonique de S' et notons $G = (rS' + E)|_{S'}$. La formule d'adjonction donne:

$$rK' \equiv G + p^*(H)|_{S'} \;.$$

Comme G est un diviseur effectif, cela implique que S' est de type général. Soit ω_S le faisceau dualisant de S; on a: $\omega_S^{\otimes r} = \omega_X^{\otimes r}(rS) \otimes \mathcal{O}_S$. Soient $\mathscr{L}$ le bidual de $\omega_S^{\otimes r}$ et A la réunion du lieu singulier de S et des points singuliers de X d'indice > 1.

Alors $\dim(A) = 0$ et si l'on pose $\mathscr{U} = X - A$, on a: $\mathcal{O}_{\mathscr{U}}(H) \cong \omega_X^{\otimes r}|_{\mathscr{U}}$. Posons aussi $\mathscr{V} = S \cap \mathscr{U}$; on déduit:

$$\mathscr{L}|_{\mathscr{V}} \cong \omega_S^{\otimes r}|_{\mathscr{V}} \cong \mathcal{O}_{\mathscr{U}}(H + rS)|_{\mathscr{V}} \;.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

Puisque la codimension de $\mathscr{V}$ dans S est $\geqslant 2$, on a: $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_X(H + rS) \otimes \mathcal{O}_S$. Par suite $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_S((1 + rm)H)$ et S est Q-Gorenstein. Cela achève de montrer la proposition 3–1.

LEMME 3–1. *Soient m un entier $\geqslant 17$, S une surface irréductible dans $|mH|$. Alors pour tout entier p vérifiant*: $4 \leqslant p < m$, *on a*: $h^0(S, \mathcal{O}_S(mH)) \geqslant 7$.

Démonstration. Soient S, p et m vérifiant les hypothèses du lemme. On a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X((p - m)H) \longrightarrow \mathcal{O}_X(pH) \longrightarrow \mathcal{O}_S(pH) \longrightarrow 0\,.$$

D'après la proposition 0–2, on a l'isomorphisme:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(pH)) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \mathcal{O}_S(pH))\,.$$

La proposition 0–3 implique: $h^0(S, \mathcal{O}_S(pH)) \geqslant 7$, ce qui démontre le résultat.

PROPOSITION 3–2. *Si $r \geqslant 2$, pour tout entier $m \geqslant 34r + 3$, le système linéaire $|mH|$ est sans point base.*

Démonstration. Soit m un entier $\geqslant 34r + 3$. Il existe un entier $s \geqslant r$ et un entier p vérifiant $17 \leqslant p \leqslant 33$, tels que l'on ait: $m = 17s + p$. Soit Q un point base du système linéaire $|mH|$. Comme on a: $s|17H| + |pH| \subset |mH|$, il existe un entier $b \in \{17, p\}$ tel que Q soit point base de $|bH|$.

D'après la proposition 3–1, il existe une surface S normale Q-Gorenstein de type général dans $|bH|$. Posons $D = H|_S$. D'après la démonstration de la proposition 3–1, le bidual de $\omega_S^{\otimes r}$ est isomorphe à: $\mathcal{O}_S((1 + br)D)$. Posons $a = 1 + br$ et $U = aD$; alors on a: $aD - U \equiv 0$, et $D^2 = bH^3 > 0$. De plus D est numériquement positif; d'après le lemme 3–1, on a pour tout entier n verifiant $4 \leqslant n < b$: $h^0(S, \mathcal{O}_S(nD)) \geqslant 7$. La proposition 2–0 implique que pour tout entier $q \geqslant a + r + 3$, le faisceau $\mathcal{O}_S(qD)$ est engendré par ses sections globales. On a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X((m - b)H) \longrightarrow \mathcal{O}_X(mH) \longrightarrow \mathcal{O}_S(mD) \longrightarrow 0\,.$$

D'après la proposition 0–2, l'homomorphisme: $H^0(X, \mathcal{O}_X(mH)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S(mD))$ est surjectif. Montrons que $m \geqslant a + r + 3$.

1) Supposons que $b = 17$.

Alors $a + r + 3 = 17r + r + 3 = 18r + 3$, et il est clair que: $m \geqslant a + r + 3$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

2) Supposons que $b = p$.

Alors on a: $a + r + 3 = pr + r + 3 = (p + 1)r + 3$. Mais $p + 1 \leqslant 34$, par suite, puisque par hypothèse $m \geqslant 34r + 3$, on a: $m \geqslant a + r + 3$, ce qui démontre le résultat.

Cela donne une contradiction, et démontre la proposition 3–2. Le théorème 1 est donc démontré dans le cas où $r \geqslant 2$. Le théorème 2 couvre le cas $r = 1$.

2) *La démonstration du théorème* 2.

Nous supposerons désormais $r = 1$. Alors ω_X est un faisceau inversible et est isomorphe à $\mathcal{O}_X(H)$. Soit m un entier $\geqslant 17$; d'après la proposition 3–1, il existe une surface S irréductible, normale, de Gorenstein dans le système linéaire $|mH|$. Posons $R = H|_S$, alors si l'on note ω_S le faisceau dualisant de S, on a: $\omega_S = \mathcal{O}_S((m + 1)R)$. Par hypothèse R est ample. De plus le lemme 3–1 montre que pour $4 \leqslant p < m$, on a: $h^0(S, \mathcal{O}_S(pR)) \geqslant 5$. Les hypothèses de la proposition 2–0 sont réalisées pour S. Distinguons les deux cas suivants:

1er *cas*. Supposons que le système linéaire $|2mH|$ ait un point base Q. Alors Q est aussi point base de $|mH|$ et $Q \in S$. On a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(mH) \longrightarrow \mathcal{O}_X(H + S + (m - 1)H) \longrightarrow \omega_S((m - 1)R) \longrightarrow 0 .$$

D'après les considérations du début et le théorème 0–1, on obtient une surjection:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(H + S + (m - 1)H)) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S((m - 1)R) .$$

D'après la proposition 2–0, le faisceau $\omega_S((m - 1)R)$ est engendré par ses sections globales. Mais on a: $H + S + (m - 1)H \equiv 2mH$, ce qui donne une contradiction.

2ème *cas*. Supposons que le système linéaire $|(2m + 1)H|$ ait un point base Q. Comme $|(m + 1)H| + |mH| \subset |(2m + 1)H|$ soit Q est point base de $|mH|$, soit il est point base de $|(m + 1)H|$.

1) Si Q est point base de $|mH|$, $Q \in S$ et on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(H + mH) \longrightarrow \mathcal{O}_X(H + S + mH) \longrightarrow \omega_S(mR) \longrightarrow 0$$

On conclut alors comme précédemment.

2) Si Q est point base de $|(m + 1)H|$, on remplace m par $(m + 1)$ et on peut alors supposer que $Q \in S$. On a la suite exacte:

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(H + (m-2)H) \longrightarrow \mathcal{O}_X(H + S + (m-2)H)$$
$$\longrightarrow \omega_S((m-2)R) \longrightarrow 0 \, .$$

On conclut alors comme pour le cas précédent.

Cela termine la démonstration du théorème 2.

References

[B-1] X. Benveniste, Sur les variétés de dimension 3 de type général dont le diviseur canonique est numériquement positif, Math. Ann., **266** (1984), 479–497.

[B-2] ——, Sur l'anneau canonique de certaines variétés de dimension 3, Invent. Math., **73** (1983), 153–164.

[B-3] ——, Sur la décomposition de Zariski en dimension 3, A paraître.

[E] R. Elkik, Rationnalité des singularités canoniques, Invent. Math., **47** (1978), 139–147.

[F] T. Fujita, Semi-positive line bundles, A paraître.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, G.T.M. 52, Springer Verlag (1977).

[Hi] H. Hironaka, Resolution of an algebraic variety over a field of characteristic zero (I, II), Ann. of Math., **79** no. 1 (1964).

[K] Y. Kawamata, A generalisation of Kodaira Ramanujam's vanishing theorem, Math. Ann., **261** (1983), 43–46.

[K-1] ——, The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math., **119** (1984), 603–633.

[M] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, I.H.E.S. Publ. Math. no. 9 (1971).

[Ra] C. P. Ramanujam, Supplément à l'article "Remarks on Kodaira Vanishing Theorem", J. Indian, Math. Soc., **38** (1974), 121–124.

[R-1] M. Reid, Canonical 3-folds, Proceedings de "Journees de Géometrie Algébrique" Angers 1979, A. Beauville éditeur, 273–310, Sijthoff and Noordhoff 1980.

[R-2] ——, Minimal models of canonical 3-folds, Adv. Stu. in Pure Math., Algebraic Varieties and Analytic Varieties, ed. S. Iitaka, **1** (1983), 131–180.

[S] N. Shepherd-Barron, Canonical 3-fold singularities are Cohen-Macaulay, Warwick, preprint.

[V] E. Viehweg, Vanishing theorem, J. Reine Angew. Math., **335** (1982).

[Z] O. Zariski, The Theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. of Math., **76** (1962), 560–615.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91 128 PALAISEAU
France

https://doi.org/10.1017/S0027763000021280 Published online by Cambridge University Press