

NORMALITÉ DE CERTAINS ANNEAUX DÉTERMINANTIELS QUANTIQUES

by LAURENT RIGAL

(Received 5th January 1998)

Let $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] = \mathcal{O}_q(M(m, n))$ be the quantization of the ring of regular functions on $m \times n$ matrices and $I_q(\mathbf{X})$ be the ideal generated by the 2×2 quantum minors of the matrix $\mathbf{X} = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ of generators of $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. The residue class ring $R_q(\mathbf{X}) = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]/I_q(\mathbf{X})$ (a quantum analogue of determinantal rings) is shown to be an integral domain and a maximal order in its division ring of fractions. For the proof we use a general lemma concerning maximal orders that we first establish. This lemma actually applies widely to prime factors of quantum algebras. We also prove that, if the parameter is not a root of unity, all the prime factors of the uniparameter quantum space are maximal orders in their division ring of fractions.

1991 *Mathematics subject classification*: 16D30, 17B37, 16H05.

Introduction

Ce travail s'attache à l'étude de certaines algèbres quantiques du point de vue de la normalité et en particulier à celle d'analogues quantiques d'anneaux déterminantiels.

Dans la première section, nous établissons un lemme général concernant la propriété d'ordre maximal (lemme 1.1). Ce lemme est une version non commutative d'un résultat connu en situation commutative (voir [2, lemme 16.24]) sur lequel M. Lazarus a attiré notre attention. Il s'applique très largement aux algèbres quantiques comme nous le verrons dans les sections suivantes. Les résultats sur la notion d'ordre maximal utilisés dans ce travail sont essentiellement dus à M. Chamarie et G. Maury (voir [3], [4] et [8]).

Dans la seconde section, nous considérons la quantification $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] = \mathcal{O}_q(M(m, n))$ de l'anneau des fonctions régulières sur les matrices de format rectangulaire $m \times n$. Nous montrons que, si $I_q(\mathbf{X})$ désigne l'idéal de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ engendré par les mineurs quantiques de format 2×2 , alors l'anneau quotient $R_q(\mathbf{X}) = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]/I_q(\mathbf{X})$ est intègre et un ordre maximal de son corps de fractions.

Ce résultat est donc une quantification de propriétés classiques dans le cas commutatif concernant les anneaux déterminantiels (voir [2]). La preuve développée ci-dessous est une quantification de celle établie dans le cas commutatif par D. W. Sharpe (voir [15]).

Dans un travail récent (voir [7]), K. R. Goodearl et T. H. Lenagan ont démontré que l'idéal de $\mathcal{O}_q(M(m, n))$ engendré par les mineurs quantiques de format $t \times t$ quelconque est complètement premier.

Dans la troisième section, la même approche est appliquée à l'étude de certains facteurs entiers de l'espace quantique uniparamétré E_n^q . On prouve en particulier que si le corps de base est algébriquement clos et le paramètre q non racine de l'unité, alors tous les facteurs premiers de E_n^q sont des ordres maximaux de leur corps de fractions.

Notations. Dans tout ce travail, \mathbb{K} désigne un corps commutatif et si $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{N}_p = \{1, \dots, p\}$. D'autre part, si R est un anneau et si x est un élément de R tel que $\mathcal{X} = \{x^i, i \in \mathbb{N}\}$ soit un ensemble de dénominateurs à droite de R , on note R_x l'anneau localisé $R\mathcal{X}^{-1}$. De plus, si R est une \mathbb{K} -algèbre et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, pour $(a, b) \in R^2$, on pose $[a, b]_\lambda = ab - \lambda ba$ (et $[a, b] = ab - ba$). Enfin, la notation $I \triangleleft R$ signifie que I est un idéal de R .

1. Un lemme général sur les ordres maximaux

Le but essentiel de cette section est de prouver le lemme 1.1. Pour la cohérence de l'ensemble, nous rappelons certains résultats classiques sur les ordres maximaux en suivant [9].

Pour la définition générale d'ordre maximal, nous renvoyons à [9, chap. I]. Nous nous plaçons dans le cadre où R est un anneau noethérien intègre et notons $Q = \text{Frac}(R)$ son corps de fractions. Il est immédiat qu'alors R est un ordre de Q ([9, I §2]). Dans ces conditions, l'anneau R est un ordre maximal de Q si il vérifie la propriété suivante: si T est un anneau tel que $R \subseteq T \subseteq Q$ et tel qu'il existe a et b dans $R \setminus \{0\}$ tels que $aTb \subseteq R$, alors $T = R$.

Si I est un idéal non nul de R , on pose $\mathcal{O}_l(I) = \{q \in Q \mid qI \subseteq I\}$ et $\mathcal{O}_r(I) = \{q \in Q \mid Iq \subseteq I\}$. D'après [9, I.3.1], R est un ordre maximal de Q si et seulement si pour tout idéal I non nul de R , $\mathcal{O}_l(I) = \mathcal{O}_r(I) = R$. Ce critère est utilisé pour la preuve de 1.1.

Lemme 1.1. *Soit R un anneau noethérien intègre et $Q = \text{Frac}(R)$. On suppose qu'il existe un élément normal non nul x de R tel que*

- (1) $(x) = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$ où, pour $i \in \mathbb{N}_r$, \mathfrak{p}_i est un idéal complètement premier de R et
- (2) le localisé R_x de R en les puissances de x est un ordre maximal de Q .

Enfin, on note τ l'automorphisme associé à x (par $\forall a \in R, ax = x\tau(a)$). Dans ces conditions, si pour $i \in \mathbb{N}_r, \tau(\mathfrak{p}_i) \subseteq \mathfrak{p}_i$ alors R est un ordre maximal de Q .

Preuve. Il s'agit de montrer que si $(0) \neq I$ est un idéal de R , on a $\mathcal{O}_l(I) = \mathcal{O}_r(I) = R$.

Soit $(0) \neq I$ un idéal de R ; montrons que $\mathcal{O}_l(I) \subseteq R$ (l'inclusion inverse est évidente). On note I_x l'idéal engendré par I dans R_x , de sorte que $I_x = IR_x = R_xI$ (voir [10, 2.1.16 (vi)]). Si $q \in \mathcal{O}_l(I)$, alors $qI_x = qIR_x \subseteq IR_x = I_x$, c'est-à-dire que $q \in \mathcal{O}_l(I_x)$. Puisque R_x est un ordre maximal, il s'ensuit que $q \in R_x$.

Supposons alors $q \in R_x \setminus R$, on a $q = px^{-s}$, où $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \in R \setminus (x)$. D'autre part, $qI \subseteq I$ assure que $\forall t \in \mathbb{N}, q^t I \subseteq I$. Donc, si a est un élément non nul de $I, \forall t \in \mathbb{N}, q^t a \in R$. En particulier, le sous- R -module à gauche $R[q]$ de Q engendré par les puissances de q est inclus dans le sous- R -module à gauche de type fini Ra^{-1} de Q . R étant noethérien, il s'ensuit que $R[q]$ est noethérien et par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une famille $\{a_0, \dots, a_n\}$ d'éléments de R tels que $q^{n+1} = a_n q^n + \dots + a_0$. En posant $\sigma = \tau^s$, on obtient que $(px^{-s})^{n+1} = a_n (px^{-s})^n + \dots + a_0$, puis que $p\sigma(p) \dots \sigma^n(p)x^{-s(n+1)} = a_n p\sigma(p) \dots \sigma^{n-1}(p)x^{-sn} + \dots + a_0$. Il s'ensuit que $p\sigma(p) \dots \sigma^n(p) \in (x)$.

D'autre part, $(x) = \bigcap_{i=1}^r p_i$, les p_i étant des idéaux complètement premiers stables sous l'automorphisme τ associé à x . Il vient que, pour $i \in \mathbb{N}_r, p\sigma(p) \dots \sigma^n(p) \in p_i$. Par suite, tout p_i contient l'image de p par une certaine puissance de τ et donc p lui même. Finalement, $p \in \bigcap_{i=1}^r p_i = (x)$, ce qui est une contradiction. Donc $\mathcal{O}_l(I) \subseteq R$.

On montre de même que $\mathcal{O}_r(I) \subseteq R$. □

Remarque 1.2. Nous remercions Marc Chamarie de nous avoir signalé que le lemme 1.1 reste vrai si R et les p_i sont seulement supposés premiers et que la condition suffisante $\tau(p_i) \subseteq p_i$, pour $i \in \mathbb{N}_r$, est aussi nécessaire (lorsque p_i est premier minimal au dessus de (x)).

Remarque 1.3. Soit R un anneau noethérien intègre, ordre maximal de son corps de fractions.

(i) Si α est un automorphisme de R et δ une α -dérivation de R , alors $R[x; \alpha, \delta]$ est un ordre maximal de son corps de fractions ([9, V.2.5]).

(ii) Si S est un ensemble de dénominateurs à droite et à gauche de R , alors RS^{-1} est un ordre maximal de son corps de fractions ([9, IV.2.1]).

2. L'anneau déterminantiel quantique $R_q(\mathbf{X})$

Cette section s'attache à l'étude de l'anneau déterminantiel quantique $R_q(\mathbf{X})$, quotient de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] = \mathcal{O}_q(M(m, n))$ par l'idéal $I_q(\mathbf{X})$ engendré par les mineurs quantiques 2×2 . Cet anneau est défini dans la première sous-section. Dans la seconde, nous montrons que le quotient du localisé $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{x_{11}}$ par l'idéal engendré par les mineurs quantiques 2×2 est un anneau intègre et un ordre maximal de son corps de fractions. Dans la troisième sous-section, nous montrons que $R_q(\mathbf{X})$ est un anneau intègre et un ordre maximal de son corps de fractions en relevant les propriétés obtenues pour le localisé $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{x_{11}}$.

2.1. Définitions et propriétés élémentaires

La définition de $\mathcal{O}_q(M(m, n))$ rappelée ci-dessous est celle qui figure dans [12] (en changeant q en q^{-1}) et [11]; nous renvoyons à ces deux articles pour les résultats mentionnés sans preuve. Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{K}^*$; on note $\mathcal{O}_q(M(m, n))$

l'algèbre engendrée sur \mathbb{K} par mn générateurs notés X_{ij} (ou $X_{i,j}$ si il y a un risque de confusion), $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$, soumis aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} X_{ij}X_{il} &= qX_{il}X_{ij}, && \text{pour } 1 \leq i \leq m, \text{ et } 1 \leq j < l \leq n; \\ X_{ij}X_{kj} &= qX_{kj}X_{ij}, && \text{pour } 1 \leq i < k \leq m, \text{ et } 1 \leq j \leq n; \\ X_{ij}X_{kl} &= X_{kl}X_{ij}, && \text{pour } 1 \leq k < i \leq m, \text{ et } 1 \leq j < l \leq n; \\ X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} &= (q - q^{-1})X_{il}X_{kj}, && \text{pour } 1 \leq i < k \leq m, \text{ et } 1 \leq j < l \leq n. \end{aligned}$$

Lorsque $m = n$, on note $\mathcal{O}_q(M(n))$ au lieu de $\mathcal{O}_q(M(m, n))$.

Il convient de représenter les générateurs de $\mathcal{O}_q(M(m, n))$ sous forme matricielle; posons alors $\mathbf{X} = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Dans ces conditions, l'algèbre $\mathcal{O}_q(M(m, n))$ sera notée $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$.

Il est clair que $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ est graduée par le degré total en les X_{ij} . Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_d$ le sous-espace vectoriel des éléments de degré total d . On a alors $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_d$.

Notations 2.1.1. (1) Lorsque $m = n$, on note $\det_q(\mathbf{X}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{l(\sigma)} X_{\sigma(1),1} \dots X_{\sigma(n),n}$ le déterminant quantique de \mathbf{X} (S_n est le groupe des permutations de \mathbb{N}_n et $l(\sigma)$ la longueur de $\sigma \in S_n$). C'est un élément central de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ (voir [12, (4.6)]).

(2) Si \mathbf{Z} est une sous-matrice carrée de format $r \times r$ de \mathbf{X} , la sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ engendrée par les coefficients de \mathbf{Z} est isomorphe à $\mathcal{O}_q(M(r))$. Le déterminant quantique de \mathbf{Z} est un élément de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. Un tel élément s'appelle un *mineur quantique* $r \times r$ de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$.

Ce travail s'intéresse aux mineurs quantiques 2×2 . On pose:

$$[(i, k); (j, l)]_q = X_{ij}X_{kl} - qX_{il}X_{kj}, \text{ pour } 1 \leq i < k \leq m, \text{ et } 1 \leq j < l \leq n;$$

c'est le mineur quantique associé à la matrice extraite de \mathbf{X} en ne conservant que les lignes i, k et les colonnes j, l . On note alors $\min_q(\mathbf{X})$ l'ensemble des mineurs quantiques 2×2 de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ (si $n = 1$ ou $m = 1$, $\min_q(\mathbf{X}) = \emptyset$). Enfin, $I_q(\mathbf{X})$ désigne l'idéal de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ engendré par $\min_q(\mathbf{X})$ et $R_q(\mathbf{X})$ l'anneau quotient associé:

$$I_q(\mathbf{X}) = (\min_q(\mathbf{X})) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}] \text{ et } R_q(\mathbf{X}) = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]/I_q(\mathbf{X}).$$

Remarque 2.1.2. La structure d'anneau gradué de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ assure que, pour $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$, $X_{ij} \notin I_q(\mathbf{X})$. De plus, l'idéal $(X_{ij}, 1 < i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ est complètement premier, contient $I_q(\mathbf{X})$ et ne contient aucun X_{1j} , pour $1 \leq j \leq n$. Il s'ensuit que $I_q(\mathbf{X})$ ne contient aucun monôme en les X_{1j} , pour $1 \leq j \leq n$.

Remarque 2.1.3. L'algèbre $\mathcal{O}_q(M(2))$ est engendrée par X_{11}, X_{12}, X_{21} et X_{22} . On note δ son déterminant quantique. Compte tenu de la relation $X_{11}X_{22} - X_{22}X_{11} =$

$(q - q^{-1})X_{12}X_{21}$, il vient $\delta = X_{11}X_{22} - qX_{12}X_{21} = X_{22}X_{11} - q^{-1}X_{12}X_{21}$. On a également $X_{11}X_{22} - q^2X_{22}X_{11} = (1 - q^2)\delta$. Cette relation assure que $R_q(\mathbf{X})$ est isomorphe à un quotient d'espace quantique.

$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ comme extension de Ore itérée. Si $m \geq 2$ (resp. $n \geq 2$), on note \mathbf{X}' (resp. \mathbf{X}'') la matrice extraite de \mathbf{X} en supprimant la m -ème ligne (resp. la n -ème colonne): $\mathbf{X}' = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n}$ et $\mathbf{X}'' = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1}$.

La sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ engendrée par les coefficients de \mathbf{X}' (resp. \mathbf{X}'') est isomorphe à $\mathcal{O}_q(M(m-1, n)) = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}']$ (resp. $\mathcal{O}_q(M(m, n-1)) = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'']$); nous identifierons ces algèbres isomorphes. Nous allons décrire $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ comme extension de Ore itérée de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}']$ et comme extension de Ore itérée de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'']$. Pour ce faire, on introduit les tableaux suivants, pour $s \in \mathbb{N}_n$:

$$\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)} = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1s} & \dots & \dots & X_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{m-1,1} & \dots & X_{m-1,s} & \dots & \dots & X_{m-1,n} \\ X_{m1} & \dots & X_{ms} & & & \end{bmatrix}$$

Toutes les notations introduites pour les matrices s'étendent à ces tableaux. En particulier, on note $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]$ l'algèbre engendrée par les coefficients du tableau $\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}$ soumis aux relations définissant $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ et dans lesquelles n'interviennent que les coefficients figurant dans $\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}$. Ainsi, $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ engendrée pas les X_{ij} , pour $(i, j) \in \mathbb{N}_{m-1} \times \mathbb{N}_n$ et les X_{mj} pour $j \in \mathbb{N}_s$. Il est clair alors que pour $i \in \mathbb{N}_n$, il existe un automorphisme σ_{mi} et une dérivation tordue à gauche $(\sigma_{mi}, \delta_{mi})$ tels que, si $s \in \mathbb{N}_{n-1}$:

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(i)}] = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'] [X_{mi}; \sigma_{mi}, \delta_{mi}] \text{ et } \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}] = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}] [X_{m,s+1}; \sigma_{m,s+1}, \delta_{m,s+1}].$$

Enfin, on définit de façon évidente $\min_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$ et $I_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$, $s \in \mathbb{N}_n$. Naturellement, on peut procéder de la même façon à partir de la matrice \mathbf{X}'' . Finalement:

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'] [X_{m1}; \sigma_{m1}, \delta_{m1}] \dots [X_{mn}; \sigma_{mn}, \delta_{mn}], \tag{1}$$

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}''] [X_{1n}; \sigma_{1n}, \delta_{1n}] \dots [X_{mn}; \sigma_{mn}, \delta_{mn}]. \tag{2}$$

On en déduit, par récurrence, que $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ est une extension de Ore itérée de \mathbb{K} ; en particulier c'est une algèbre intègre et noethérienne.

Une localisation de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. On note $S_{11} = \{\lambda X_{11}^i, i \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ la partie multiplicative de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ engendrée par X_{11} et \mathbb{K}^* .

Proposition 2.1.4. *La partie multiplicative S_{11} est un ensemble de dénominateurs à*

droite de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$; on note $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}} = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]\mathcal{S}_{11}^{-1}$, le localisé à droite de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ vis-à-vis de \mathcal{S}_{11} . De plus, si $m \geq 2$, il existe un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}} \rightarrow \mathbb{K}_q[\mathbf{X}']_{X_{11}}[X_{m1}; \sigma_{m1}, \delta_{m1}] \cdots [X_{mn}; \sigma_{mn}, \delta_{mn}]$$

$$X_{ij} \mapsto X_{ij}.$$

Preuve. On fixe n et on procède par récurrence sur m . Le résultat est vrai lorsque $m = 1$ car dans ce cas $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ est un espace quantique uniparamétré dans lequel X_{11} est normal. Supposons le résultat acquis jusqu'à l'ordre $m - 1$; d'après (1) $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ est une extension de Ore itérée de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}']$. Les relations de définition de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ assurent que $\sigma_{m1}(X_{11}) = q^{-1}X_{11}$ et que, pour $2 \leq j \leq n$, $\sigma_{mj}(X_{11}) = X_{11}$. On est donc dans les hypothèses de [6, 1.4] qui permet de conclure. \square

Remarque 2.1.5. Comme en 2.1.4, on montre que si $s \in \mathbb{N}_n$, alors \mathcal{S}_{11} est un ensemble de dénominateurs à droite de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]$. On pose $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}} = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]\mathcal{S}_{11}^{-1}$; alors, il existe un isomorphisme $\psi : \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}} \rightarrow \mathbb{K}_q[\mathbf{X}']_{X_{11}}[X_{m1}; \sigma_{m1}, \delta_{m1}] \cdots [X_{ms}; \sigma_{ms}, \delta_{ms}]$ tel que $\psi(X_{ij}) = X_{ij}$. Dans la suite, on identifiera les anneaux concernés.

Deux isomorphismes des anneaux de matrices quantiques. Les isomorphismes introduits à présent seront utiles dans la suite. Nous ne donnons pas la preuve des deux propositions suivantes car elle est immédiate (lorsque $m = n$, voir [12, 3.7]).

Le premier est un isomorphisme de transposition entre $\mathcal{O}_q(M(m, n))$ et $\mathcal{O}_q(M(n, m))$. On conserve les notations précédentes et on pose $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ (matrice des générateurs de $\mathcal{O}_q(M(n, m))$), de sorte que $\mathbb{K}_q[\tilde{\mathbf{X}}] = \mathcal{O}_q(M(n, m))$.

Proposition 2.1.6. *Il existe un isomorphisme d'algèbres, $\text{Tr} : \mathbb{K}_q[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{K}_q[\tilde{\mathbf{X}}]$, défini par $\text{Tr}(X_{ij}) = \tilde{X}_{ji}$. De plus, Tr induit une bijection de $\min_q(\mathbf{X})$ sur $\min_q(\tilde{\mathbf{X}})$ et $\text{Tr}(I_q(\mathbf{X})) = I_q(\tilde{\mathbf{X}})$.*

Le second est un isomorphisme de « symétrie » entre $\mathcal{O}_q(M(m, n))$ et $\mathcal{O}_{q^{-1}}(M(m, n))$. On note Y_{ij} les générateurs canoniques de $\mathcal{O}_{q^{-1}}(M(m, n))$ et $\mathbf{Y} = (Y_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Ainsi, $\mathbb{K}_{q^{-1}}[\mathbf{Y}] = \mathcal{O}_{q^{-1}}(M(m, n))$.

Proposition 2.1.7. *Il existe un isomorphisme d'algèbres, $\mathbf{S} : \mathbb{K}_q[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{K}_{q^{-1}}[\mathbf{Y}]$, défini par $\mathbf{S}(X_{ij}) = Y_{m+1-i, n+1-j}$. De plus, \mathbf{S} induit une bijection de $\min_q(\mathbf{X})$ sur $\min_{q^{-1}}(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{S}(I_q(\mathbf{X})) = I_{q^{-1}}(\mathbf{Y})$.*

Relations entre générateurs et mineurs quantiques 2×2 dans $\mathcal{O}_q(M(3))$. Nous procédons, à présent, à une étude détaillée de $\mathcal{O}_q(M(3))$; elle est justifiée par la remarque suivante.

Remarque 2.1.8. Considérons un mineur quantique $2 \times 2 [(i, k); (j, l)]_q$ et un générateur X_{st} de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. Ces deux éléments sont contenus dans la sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$

engendrée par les coefficients de la matrices extraite de X en ne conservant que les lignes i, k, s et les colonnes j, l, t . Cette sous-algèbre est isomorphe à $\mathcal{O}_q(M(2))$, $\mathcal{O}_q(M(2, 3))$, $\mathcal{O}_q(M(3, 2))$ ou $\mathcal{O}_q(M(3))$. Ainsi, des relations entre générateurs et mineurs quantiques 2×2 de $\mathcal{O}_q(M(3))$ on peut déduire les relations entre générateurs et mineurs quantiques 2×2 de $\mathbb{K}_q[X]$.

Nous notons Δ le déterminant quantique de $\mathcal{O}_q(M(3))$. Par ailleurs, comme dans [12], si $(k, l) \in \mathbb{N}_3^2$, on note $A(kl)$ le déterminant quantique de la matrice extraite de $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ en supprimant la ligne k et la colonne l . Enfin, on pose $C_{kl} = (-q)^{l-k} A(kl)$; c'est le cofacteur de X_{kl} . On considère alors la transposée $(C_{ji})_{1 \leq i, j \leq 3}$ de la matrice des cofacteurs. En notant Id_3 la matrice identité de format 3×3 , on a (voir [12, 4.6] et [11, (1.17)]):

$$(C_{ji})_{1 \leq i, j \leq 3} (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = \Delta \cdot Id_3 = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} (C_{ji})_{1 \leq i, j \leq 3}. \tag{3}$$

Enfin, les relations de commutation suivantes se déduisent de [12, (4.4.4), (4.5.1), (4.6.1) et (5.1.2)].

- $A(31)$ est normal dans $\mathcal{O}_q(M(3))$.
 $A(31)$ commute avec $X_{12}, X_{13}, X_{22}, X_{23}$ et X_{31} ,
 $[A(31), X_{11}]_q^{-1} = [A(31), X_{21}]_q^{-1} = [A(31), X_{32}]_q = [A(31), X_{33}]_q = 0.$ (4)

- $A(32)$ est normal modulo $(A(31))$ dans $\mathcal{O}_q(M(3))$.
 $A(32)$ commute avec $X_{11}, X_{13}, X_{21}, X_{23}$,
 $[A(32), X_{31}]_q = [A(32), X_{33}]_q = 0, [A(32), X_{32}] = (q - q^{-1})X_{31}A(31),$
 $[A(32), X_{12}]_q^{-1} = (1 - q^{-2})X_{11}A(31), [A(32), X_{22}]_q^{-1} = (1 - q^{-2})X_{21}A(31).$ (5)

- $A(33)$ est normal modulo $(A(31), A(32))$ dans $\mathcal{O}_q(M(3))$.
 $A(33)$ commute avec $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$,
 $[A(33), X_{13}]_q = [A(33), X_{23}]_q = [A(33), X_{31}]_q = [A(33), X_{32}]_q = 0,$
 $[A(33), X_{33}] = (q - q^{-1})(-q^{-1}X_{31}A(31) + X_{32}A(32)).$ (6)

- $A(23)$ est normal modulo $(A(31), A(32), A(33))$ dans $\mathcal{O}_q(M(3))$.
 $A(23)$ commute avec $X_{11}, X_{12}, X_{31}, X_{32}$,
 $[A(23), X_{13}]_q = [A(23), X_{33}]_q = 0,$
 $[A(23), X_{21}]_q = (1 - q^2)X_{31}A(33), [A(23), X_{22}]_q = (1 - q^2)X_{32}A(33),$
 $[A(23), X_{23}]_q^2 = (q - q^{-1})(X_{31}A(31) - qX_{32}A(32)).$ (7)

- $A(22)$ est normal modulo $(A(31), A(32), A(33), A(23))$ dans $\mathcal{O}_q(M(3))$.
 $A(22)$ commute avec $X_{11}, X_{31}, X_{13}, X_{33}$,
 $[A(22), X_{12}]_q = (1 - q^2)X_{13}A(23), [A(22), X_{21}]_q = (1 - q^2)X_{31}A(32),$
 $[A(22), X_{32}]_q = (1 - q^2)X_{33}A(23), [A(22), X_{23}]_q = (1 - q^2)X_{33}A(32),$
 $[A(22), X_{22}]_q^2 = (1 - q^2)(X_{33}A(33) + X_{31}A(31) + qX_{23}A(23)).$ (8)

Pour établir la dernière identité de (7), on utilise $[A(23), X_{23}]_q^2 = [A(23), X_{23}] + (1 - q^2)X_{23}A(23)$ et on applique successivement (5.1.2) et (4.4.4) de [12]. La dernière identité de (8) s'obtient à partir de $[A(22), X_{22}]_q^2 = q^2[A(22), X_{22}] + (1 - q^2)A(22)X_{22}$ en

appliquant là encore (5.1.2) puis (4.4.4) de [12] ainsi que l'expression de $[A(32), X_{32}]$ mentionnée dans (5).

2.2. Sur l'idéal des mineurs quantiques 2×2 de $\mathbb{K}_q[X]_{X_{11}}$

L'objet de cette sous-section est l'étude de l'idéal $\tilde{I}_q(\mathbf{X})$ de $\mathbb{K}_q[X]_{X_{11}}$ défini en 2.2.1. Nous montrons que $\mathbb{K}_q[X]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X})$ est intègre et un ordre maximal de son corps de fractions. On reprend les notations et conventions introduites en 2.1.4 et 2.1.5. Rappelons que l'anneau intègre $\mathbb{K}_q[X]$ s'injecte canoniquement dans son localisé $\mathbb{K}_q[X]_{X_{11}}$.

Définition 2.2.1. On note $\tilde{I}_q(\mathbf{X})$ l'idéal de $\mathbb{K}_q[X]_{X_{11}}$ engendré par les mineurs quantiques 2×2 : $\tilde{I}_q(\mathbf{X}) = (\min_q(\mathbf{X})) = \{[(i, k); (j, l)]_q, 1 \leq i < k \leq m, 1 \leq j < l \leq n\}$.

Remarque 2.2.2. (1) D'après [10, 2.1.16 (vi)], $\tilde{I}_q(\mathbf{X}) = I_q(\mathbf{X})\mathbb{K}_q[X]_{X_{11}}$. De plus, $\tilde{I}_q(\mathbf{X})$ est un idéal propre. En effet, supposons qu'il existe $j \in \mathbb{N}_n$ tel que $X_{1j} \in \tilde{I}_q(\mathbf{X})$. Alors, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $X_{1j}X_{11}^s \in I_q(\mathbf{X})$, ce qui contredit 2.1.2. En utilisant l'isomorphisme Tr (prolongé aux localisés en X_{11}), il vient donc que pour $j \in \mathbb{N}_n$, $X_{1j} \notin \tilde{I}_q(\mathbf{X})$ et pour $i \in \mathbb{N}_m$, $X_{i1} \notin \tilde{I}_q(\mathbf{X})$.

(2) Ce qui précède s'étend aux anneaux $\mathbb{K}_q[X'_{(1,\dots,s)}]_{X_{11}}$, $s \in \mathbb{N}_n$ (voir §2.1). On note $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1,\dots,s)})$ l'idéal de $\mathbb{K}_q[X'_{(1,\dots,s)}]_{X_{11}}$ engendré par les mineurs quantiques 2×2 de $\mathbf{X}'_{(1,\dots,s)}$. Comme précédemment, $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1,\dots,s)}) = I_q(\mathbf{X}'_{(1,\dots,s)})\mathbb{K}_q[X'_{(1,\dots,s)}]_{X_{11}}$. De plus, $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1,\dots,s)})$ est un idéal propre car si il contenait X_{11} , $\tilde{I}_q(\mathbf{X})$ contiendrait aussi X_{11} ce qui est faux d'après le (1).

Nous commençons par donner une famille de générateurs restreinte de $\tilde{I}_q(\mathbf{X})$.

Proposition 2.2.3. $\tilde{I}_q(\mathbf{X})$ est engendré par $\min_q(\mathbf{X}')$ et les $[(1, m); (1, l)]_q, 2 \leq l \leq n$.

Preuve. Posons $\tilde{I}_q^{\#}(\mathbf{X}) = (\min_q(\mathbf{X}'), [(1, m); (1, l)]_q, 2 \leq l \leq n) \triangleleft \mathbb{K}_q[X]_{X_{11}}$. L'inclusion $\tilde{I}_q^{\#}(\mathbf{X}) \subseteq \tilde{I}_q(\mathbf{X})$ est triviale. Pour l'inclusion inverse, il s'agit de montrer que tous les mineurs de la forme $[(i, m); (j, l)]_q, (i, j) \neq (1, 1)$, sont dans $\tilde{I}_q^{\#}(\mathbf{X})$. Soit $[(i, m); (j, l)]_q$ un tel mineur.

1-er cas: $i = 1$ et $j \neq 1$. D'après (3), dans la sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[X]$ engendrée par les X_{rs} où $r = 1, m$ et $s = 1, j, l$ (qui est isomorphe à $\mathcal{O}_q(M(2, 3))$), on a $q^{-2}X_{11}[(1, m); (j, l)]_q - q^{-1}X_{1j}[(1, m); (1, l)]_q + X_{11}[(1, m); (1, j)]_q = 0$, d'où $[(1, m); (j, l)]_q \in \tilde{I}_q^{\#}(\mathbf{X})$.

2-ème cas: $i \neq 1$ et $j = 1$. D'après (3), dans la sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[X]$ engendrée par les X_{rs} où $r = 1, i, m$ et $s = 1, l$ (qui est isomorphe à $\mathcal{O}_q(M(3, 2))$), on a la relation $q^2[(i, m); (1, l)]_q X_{11} - q[(1, m); (1, l)]_q X_{i1} + [(1, i); (1, l)]_q X_{m1} = 0$. Donc $[(i, m); (1, l)]_q \in \tilde{I}_q^{\#}(\mathbf{X})$.

3-ème cas: $i \neq 1$ et $j \neq 1$. Soit \mathbf{Z} la sous-matrice de \mathbf{X} obtenue en ne conservant que les lignes $1, i, m$ et les colonnes $1, j, l$ et notons $[(1, i, m); (1, j, l)]_q$ le déterminant quantique de \mathbf{Z} . La sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[X]$ engendrée par les coefficients de \mathbf{Z} étant isomorphe à $\mathcal{O}_q(M(3))$, d'après (3):

$$\begin{aligned} [(1, i, m); (1, j, l)]_q &= [(i, m); (j, l)]_q X_{11} - q^{-1}[(1, m); (j, l)]_q X_{i1} + q^{-2}[(1, i); (j, l)]_q X_{m1} \\ &= q^{-2}X_{m1}[(1, i); (j, l)]_q - q^{-1}X_{mj}[(1, i); (1, l)]_q + X_{mi}[(1, i); (1, j)]_q. \end{aligned}$$

D'après le premier cas, $[(1, m); (j, l)]_q \in \tilde{I}_q^{\sharp}(\mathbf{X})$. Il s'ensuit $[(i, m); (j, l)]_q \in \tilde{I}_q^{\sharp}(\mathbf{X})$. □

Remarque 2.2.4. (1) La preuve de la proposition 2.2.3 montre en fait que, pour $2 \leq s \leq n : \tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}) = (\min_q(\mathbf{X}'), [(1, m); (1, 2)]_q, \dots, [(1, m); (1, s)]_q)$.

(2) En itérant 2.2.3, on montre que $\tilde{I}_q(\mathbf{X}) = ((1, k); (1, l)]_q, 2 \leq k \leq m, 2 \leq l \leq n)$.

Proposition 2.2.5. Dans les notations précédentes et pour $1 \leq s \leq n - 1$:

(1) $\tilde{I}_q(\mathbf{X}') \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{X_{11}}]$ est $(\sigma_{m_1}, \delta_{m_1})$ -stable, $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}$ est $(\sigma_{m, s+1}, \delta_{m, s+1})$ -stable;

(2) dans $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$, $[(1, m); (1, s + 1)]_q$ est normal modulo l'idéal $(\min_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}))$.

Preuve. La preuve repose sur le procédé décrit en 2.1.8 et les relations (4) à (8).

Soient $1 \leq s \leq n - 1$ et $M = [(i, k); (j, l)]_q \in \min_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$. Les relations (4) à (7) prouvent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $X_{m, s+1}M - \lambda M X_{m, s+1} \in \tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}$. Ceci montre que l'idéal $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$ de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}$ est $(\sigma_{m, s+1}, \delta_{m, s+1})$ -stable. Les mêmes relations montrent que l'idéal $\tilde{I}_q(\mathbf{X}') \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{X_{11}}]$ est $(\sigma_{m_1}, \delta_{m_1})$ -stable. On a donc prouvé le (1).

Soient à présent $1 \leq s \leq n - 1$, $M' = [(1, m); (1, s + 1)]_q$ et X_{ij} un générateur canonique de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$. Nous allons montrer que M' et X_{ij} commutent à un scalaire près modulo $(\min_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}))$ dans $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$, prouvant ainsi (2).

Si $j > s + 1$ et $1 < i < m$, d'après les relations entre A(23) et X_{23} , $M'X_{ij} - q^2X_{ij}M' \in (\min_q(\mathbf{X}')) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$.

Si $1 < j < s + 1$ et $1 < i < m$, d'après les relations entre A(22) et X_{22} , $M'X_{ij} - q^2X_{ij}M' \in (\min_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$.

Si $i = 1$ (resp. $i = m$) et $1 < j < s + 1$, d'après les relations entre A(22) et X_{12} (resp. X_{32}), $M'X_{ij} - qX_{ij}M' \in ((1, m); (1, 2)]_q, \dots, [(1, m); (1, s)]_q \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$.

Si $j = 1$ (resp. $j = s + 1$) et $1 < i < m$, d'après les relations entre A(22) et X_{21} (resp. X_{23}), $M'X_{ij} - qX_{ij}M' \in (\min_q(\mathbf{X}')) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$.

Si $i = 1$ et $j > s + 1$, d'après les relations entre A(23) et X_{13} , $M'X_{ij} - qX_{ij}M' = 0$.

Si $(i, j) = (1, 1), (1, s + 1), (m, 1)$ ou $(m, s + 1)$, alors $M'X_{ij} - X_{ij}M' = 0$.

Ceci achève la preuve. □

Le lemme suivant est utile à la preuve de 2.2.7. Il est connu, nous n'en donnons pas la preuve.

Lemme 2.2.6. Soient A un anneau, σ un endomorphisme injectif de A et (σ, δ) une dérivation tordue à gauche de A . On pose $B = A[X; \sigma, \delta]$.

(1) Si I est un idéal (σ, δ) -stable de A , alors IB est un idéal bilatère de B et, si $(\bar{\sigma}, \bar{\delta})$ désigne la dérivation tordue induite par (σ, δ) sur A/I , l'application $\phi : B/IB \rightarrow (A/I)[X, \bar{\sigma}, \bar{\delta}]$ définie par $\phi((\sum_{i=0}^d a_i X^i) + IB) = \sum_{i=0}^d (a_i + I)X^i$ est un isomorphisme d'anneaux.

(2) Si a est une unité de A et si $b \in A$ est tel que $aX + b$ soit normal dans B , alors le morphisme canonique $A \hookrightarrow B \rightarrow B/(aX + b)$ est un isomorphisme.

Théorème 2.2.7. *L'algèbre $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X})$ est intègre et un ordre maximal de son corps de fractions.*

Preuve. Dans cette preuve, nous utiliserons 2.2.6 sans le mentionner explicitement. Nous notons $\tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)})$ l'idéal de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$ défini, pour $1 \leq s \leq n - 1$, par :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}) &= (\min_q(\mathbf{X}'), [(1, m); (1, l)]_q, 2 \leq l \leq s) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}, \text{ si } s \neq 1, \\ \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1,2)}) &= (\min_q(\mathbf{X}')) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1,2)}]_{X_{11}}. \end{aligned}$$

D'après 2.2.5, $\tilde{I}_q(\mathbf{X}')$ est $(\sigma_{m_1}, \delta_{m_1})$ -stable. Ainsi, $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1)}) = \tilde{I}_q(\mathbf{X}')\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1)}]_{X_{11}}$, et (avec des notations évidentes) il existe un isomorphisme

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1)}) \xrightarrow{\phi_1} (\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'))[X_{m_1}; \bar{\sigma}_{m_1}, \bar{\delta}_{m_1}]$$

tel que $\phi_1(X_{ij} + \tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1)})) = X_{ij} + \tilde{I}_q(\mathbf{X}')$ pour $i < m$ et $\phi_1(X_{m_1} + \tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1)})) = X_{m_1}$.

D'après 2.2.5, si $s \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$ est un idéal $(\sigma_{m, s+1}, \delta_{m, s+1})$ -stable de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}$. Par suite, d'après 2.2.4, $\tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}) = \tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$. De plus, 2.2.5 assure alors que $[(1, m); (1, s + 1)]_q$ est normal modulo $\tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)})$ dans $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$. Donc, d'après 2.2.4, $\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}) = \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}) + [(1, m); (1, s + 1)]_q \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}$. D'autre part, il existe un isomorphisme

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}/\tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}) \xrightarrow{\phi_{s+1}} \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})[X_{m, s+1}; \bar{\sigma}_{m, s+1}, \bar{\delta}_{m, s+1}]$$

tel que $\phi_{s+1}(X_{ij} + \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)})) = X_{ij} + \tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$ pour $i < m$ ou $j < s + 1$ et $\phi_{s+1}(X_{m, s+1} + \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)})) = X_{m, s+1}$.

Comme $[(1, m); (1, s + 1)]_q = X_{11}X_{m, s+1} - qX_{m_1}X_{1, s+1}$ est normal modulo $\tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)})$, $\phi_{s+1}(X_{11} + \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}))X_{m, s+1} - q\phi_{s+1}(X_{m_1} + \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}))\phi_{s+1}(X_{1, s+1} + \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}))$ est normal dans $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})[X_{m, s+1}; \bar{\sigma}_{m, s+1}, \bar{\delta}_{m, s+1}]$. Comme enfin $\phi_{s+1}(X_{11} + \tilde{J}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)})) = X_{11} + \tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$ est une unité de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)})$, on a donc :

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s+1)}) \cong \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, s)}).$$

Les isomorphismes établis ci-dessus conduisent alors à

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1, \dots, n)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1, \dots, n)}) \cong \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'_{(1)}) \cong (\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{(1)}]_{X_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X}'))[X_{m_1}; \bar{\sigma}_{m_1}, \bar{\delta}_{m_1}].$$

On peut maintenant montrer le résultat annoncé. On fixe un entier non nul n et on procède par récurrence sur m . L'assertion est vraie lorsque $m = 1$ puisque l'idéal de $\mathcal{O}_q(M(1, n))_{X_{11}}$ engendré par les mineurs quantiques 2×2 est réduit à (0) . Supposons le résultat acquis jusqu'à l'ordre $m - 1$. D'après ce qui précède, on a

$$\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}/\bar{I}_q(\mathbf{X}) = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{\{1, \dots, n\}}]_{X_{11}}/\bar{I}_q(\mathbf{X}'_{\{1, \dots, n\}}) \cong (\mathbb{K}_q[\mathbf{X}']_{X_{11}}/\bar{I}_q(\mathbf{X}'))[X_{m1}; \bar{\sigma}_{m1}, \bar{\delta}_{m1}].$$

L'hypothèse de récurrence assure que $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}']_{X_{11}}/\bar{I}_q(\mathbf{X}')$ est un anneau intègre, ordre maximal de son corps de fractions. Comme $\bar{\sigma}_{m1}$ est un automorphisme, $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}/\bar{I}_q(\mathbf{X})$ est intègre et, d'après 1.3, c'est un ordre maximal de son corps de fractions. Ceci achève la preuve. □

Remarque 2.2.8. A l'aide d'une récurrence, on déduit de la preuve de 2.2.7 que $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}/\bar{I}_q(\mathbf{X})$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}$ engendrée par $X_{ii}^{\pm 1}$, les X_{ij} et les X_{ji} , pour $2 \leq i \leq m$ et $2 \leq j \leq n$. Ainsi, $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}/\bar{I}_q(\mathbf{X})$ est isomorphe à un localisé d'espace quantique.

2.3. Intégrité et normalité de $R_q(\mathbf{X})$

Dans le premier paragraphe de cette sous-section, on montre que l'anneau $R_q(\mathbf{X})$ (défini en 2.1.1) est intègre (Théo. 2.3.8). C'est trivial lorsque \mathbf{X} est une matrice à une ligne et une colonne. La démonstration de l'intégrité de $R_q(\mathbf{X})$ procède par récurrence sur la somme du nombre de lignes et du nombre de colonnes de \mathbf{X} . Avec les notations précédemment introduites, il suffit donc de montrer que si l'on fait l'hypothèse (H) suivante:

Hypothèse: *Les anneaux $R_q(\mathbf{X}')$ et $R_q(\mathbf{X}'')$ sont intègres,* (H)

alors $R_q(\mathbf{X})$ est un anneau intègre.

Dans le second paragraphe, on montre que $R_q(\mathbf{X})$ est un ordre maximal de son corps de fractions (Théo. 2.3.11).

Intégrité de $R_q(\mathbf{X})$. Dans ce paragraphe, on suppose l'hypothèse (H) satisfaite. On reprend les notations de 2.1 et on considère les idéaux suivants de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$:

$$L_q(\mathbf{X}) = (\min_q(\mathbf{X}'), X_{m1}, X_{m2}, \dots, X_{mn}) \text{ et } C_q(\mathbf{X}) = (\min_q(\mathbf{X}''), X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{mn}).$$

Proposition 2.3.1. *On a:*

- (1) $L_q(\mathbf{X}) = I_q(\mathbf{X}')\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] + \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]X_{m1} + \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]X_{m2} + \dots + \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]X_{mn},$
- (2) $C_q(\mathbf{X}) = I_q(\mathbf{X}'')\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] + \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]X_{1n} + \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]X_{2n} + \dots + \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]X_{mn}.$

Preuve. En procédant comme en 2.2.5, on montre aisément que $I_q(\mathbf{X}')$ est $(\sigma_{m1}, \delta_{m1})$ -stable et que pour $1 \leq s \leq n - 1$, l'idéal $(\min_q(\mathbf{X}')) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'_{\{1, \dots, s\}}]$ est stable sous

$(\sigma_{m,s+1}, \delta_{m,s+1})$. Il s'ensuit que $(\min_q(X')) = I_q(X')\mathbb{K}_q[X] \triangleleft \mathbb{K}_q[X]$. D'autre part, il est clair par définition de $\mathbb{K}_q[X]$ que la suite $\{X_{m1}, X_{m2}, \dots, X_{mn}\}$ est une suite normalisante de $\mathbb{K}_q[X]$. Le point (1) s'ensuit immédiatement. A l'aide de l'isomorphisme Tr de transposition, on en déduit (2). □

Proposition 2.3.2. *Les idéaux $L_q(X)$ et $C_q(X)$ de $\mathbb{K}_q[X]$ sont complètement premiers.*

Preuve. Il est clair que $\mathbb{K}_q[X]/L_q(X) \cong \mathbb{K}_q[X']/I_q(X')$ et $\mathbb{K}_q[X]/C_q(X) \cong \mathbb{K}_q[X'']/I_q(X'')$. L'hypothèse (H) assure donc que $L_q(X)$ et $C_q(X)$ sont complètement premiers. □

Lemme 2.3.3. *Soit $G \in C_q(X)$; alors, il existe $H \in I_q(X'') \triangleleft \mathbb{K}_q[X'']$, $H_1, \dots, H_{m-1} \in \mathbb{K}_q[X]$ et $H_m \in \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{K}_q[X'']X_{mn}^i$ tels que $G = H + H_1X_{1n} + H_2X_{2n} + \dots + H_mX_{mn}$.*

Preuve. D'après 2.3.1, $C_q(X) = I_q(X'')\mathbb{K}_q[X] + \mathbb{K}_q[X]X_{1n} + \dots + \mathbb{K}_q[X]X_{mn}$. D'autre part, il est clair d'après (2) que $I_q(X'')\mathbb{K}_q[X] \subseteq I_q(X'') + \mathbb{K}_q[X]X_{1n} + \dots + \mathbb{K}_q[X]X_{mn}$. Par suite, on a $C_q(X) = I_q(X'') + \mathbb{K}_q[X]X_{1n} + \dots + \mathbb{K}_q[X]X_{mn}$.

Ainsi, si $G \in C_q(X)$, $G = H + H_1X_{1n} + \dots + H_mX_{mn}$, où $H \in I_q(X'')$ et $H_i \in \mathbb{K}_q[X]$, $1 \leq i \leq m$. Compte tenu de (2) et du fait que, pour $1 \leq i \leq m$, les X_{in} commutent deux-à-deux à un scalaire près, on peut supposer que $H_m \in \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{K}_q[X'']X_{mn}^i$, ce qui achève la preuve. □

Nous montrons, à présent, que l'idéal $(\min_q(X), X_{mn})$ de $\mathbb{K}_q[X]$ est semi-premier (Théo. 2.3.5).

Lemme 2.3.4. *Les idéaux premiers minimaux au-dessus de $(\min_q(X), X_{mn})$ sont les idéaux complètement premiers $L_q(X)$ et $C_q(X)$.*

Preuve. Il est clair que $(\min_q(X), X_{mn}) \subseteq L_q(X) \cap C_q(X)$. Soit P un idéal premier minimal au dessus de $(\min_q(X), X_{mn})$. Si $i \in \mathbb{N}_{m-1}$ et $j \in \mathbb{N}_{n-1}$, comme X_{mn} et le mineur quantique $[(i, m); (j, n)]_q = X_{ij}X_{mn} - qX_{mj}X_{in}$ sont dans P , on a $X_{mj}X_{in} \in P$.

1-er cas: $X_{1n} \notin P$. Alors, pour $j \in \mathbb{N}_{n-1}$, $X_{mj}X_{1n} \in P$ et comme X_{1n} est un élément normal de $\mathbb{K}_q[X]$, on a $X_{mj} \in P$. Ainsi, P contient $L_q(X)$. D'après 2.3.2, la minimalité de P conduit à $P = L_q(X)$.

2-ème cas: $X_{1n} \in P$. Nous allons montrer qu'alors $X_{in} \in P$ pour $i \in \mathbb{N}_{m-1}$. Remarquons d'abord que l'isomorphisme $\mathbb{K}_q[X]/L_q(X) \cong \mathbb{K}_q[X']/I_q(X')$ joint à 2.1.2 assure que $X_{1n} \notin L_q(X)$. A présent, supposons que $X_{2n} \notin P$. Alors, comme X_{2n} est normal modulo X_{1n} , les relations $X_{mj}X_{2n} \in P$, $j \in \mathbb{N}_{n-1}$, conduisent à $X_{mj} \in P$, pour $j \in \mathbb{N}_{n-1}$. Mais alors $L_q(X) \subseteq P$ et, par minimalité de P , $L_q(X) = P$. Ceci conduit à $X_{1n} \in L_q(X)$ qui est une contradiction. Ainsi, $X_{2n} \in P$. Comme $\{X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{m-1,n}\}$ est une suite normalisante, on peut itérer ce procédé et conclure que $X_{2n}, \dots, X_{m-1,n} \in P$. Finalement $X_{1n}, \dots, X_{mn} \in P$ et donc $C_q(X) \subseteq P$. Puisque P est minimal, d'après 2.3.2, il vient $C_q(X) = P$. Ceci achève la preuve. □

Théorème 2.3.5. *Dans $\mathbb{K}_q[X]$, on a $(\min_q(X), X_{mn}) = L_q(X) \cap C_q(X)$.*

Preuve. Compte tenu de 2.3.4, il reste à montrer que $(\min_q(\mathbf{X}), X_{mn}) \supseteq L_q(\mathbf{X}) \cap C_q(\mathbf{X})$. Soit F dans $L_q(\mathbf{X}) \cap C_q(\mathbf{X})$; d'après 2.3.1, $F = F' + F''$, où $F' \in I_q(\mathbf{X}')\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] \subseteq (\min_q(\mathbf{X}), X_{mn})$ et $F'' = \sum_{j=1}^n F_j X_{mj}$, avec $F_j \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. Il suffit de montrer que $F'' \in (\min_q(\mathbf{X}), X_{mn})$. De plus, (2) assure que, pour $j \in \mathbb{N}_n$, $F_j = G_j + \sum_{i=1}^m G_{ij} X_{in}$, où $G_j \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'']$ et $G_{ij} \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. Donc, $F'' = G + G'$, où $G = \sum_{j=1}^n G_j X_{mj}$ et $G' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m G_{ij} X_{in} X_{mj}$. Il vient,

$$\begin{aligned} G' &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m G_{ij} X_{in} X_{mj} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} G_{ij} X_{in} X_{mj} + \sum_{i=1}^{m-1} G_{in} X_{in} X_{mn} + \sum_{j=1}^{n-1} G_{mj} X_{mn} X_{mj} + G_{mn} X_{mn} X_{mn} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} G_{ij} q^{-1}(X_{ij} X_{mn} - [(i, m); (j, n)]_q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} G_{in} X_{in} X_{mn} + \sum_{j=1}^{n-1} G_{mj} X_{mn} X_{mj} + G_{mn} X_{mn} X_{mn}. \end{aligned}$$

Ainsi, $G' \in (\min_q(\mathbf{X}), X_{mn}) \subseteq L_q(\mathbf{X}) \cap C_q(\mathbf{X})$ et par suite $G = F'' - G' = F - F' - G' \in L_q(\mathbf{X}) \cap C_q(\mathbf{X})$. En particulier $G \in C_q(\mathbf{X})$ et d'après 2.3.3, il existe $H \in I_q(\mathbf{X}'') \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}'']$, $H_m \in \oplus_{i=0}^\infty \mathbb{K}_q[\mathbf{X}''] X_{mn}^i$ et $H_i \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$, pour $i \in \mathbb{N}_{m-1}$, tels que $G = H + \sum_{i=1}^m H_i X_{in}$. D'autre part, $G = \sum_{j=1}^n G_j X_{mj} \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}''] \oplus \mathbb{K}_q[\mathbf{X}''] X_{mn}$, donc

$$G - H - H_m X_{mn} = \sum_{i=1}^{m-1} H_i X_{in} \in \oplus_{i=0}^\infty \mathbb{K}_q[\mathbf{X}''] X_{mn}^i.$$

Enfin, $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ est un $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'']$ -module libre à gauche de base $\{X_{1n}^{i_1} \dots X_{mn}^{i_m}, (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m\}$ (voir (2)). Compte tenu des relations de commutation à un scalaire non nul près entre les X_{in} , il est clair que $\sum_{i=1}^{m-1} H_i X_{in}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}'']$ d'éléments $X_{1n}^{i_1} \dots X_{mn}^{i_m}$ où $i_1 + \dots + i_m \neq 0$. Puisque $G - H - H_m X_{mn} \in \oplus_{i=0}^\infty \mathbb{K}_q[\mathbf{X}''] X_{mn}^i$, il vient $G - H - H_m X_{mn} = 0$ et donc $G \in (\min_q(\mathbf{X}), X_{mn})$. Ainsi, $F'' \in (\min_q(\mathbf{X}), X_{mn})$. \square

On peut, à présent, montrer que $R_q(\mathbf{X})$ est intègre.

Lemme 2.3.6. *Soit $F \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. Si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $X_{mn}^p F \in I_q(\mathbf{X})$, alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $FX_{11}^r \in I_q(\mathbf{X})$.*

Preuve. On a une injection canonique $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] \hookrightarrow \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}$ et $I_q(\mathbf{X})\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}} = \tilde{I}_q(\mathbf{X})$ (voir 2.2.2). Notons que $X_{mn} \notin \tilde{I}_q(\mathbf{X})$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $X_{m1} X_{1n} \in \tilde{I}_q(\mathbf{X})$ et donc $X_{m1} \in \tilde{I}_q(\mathbf{X})$ ou $X_{1n} \in \tilde{I}_q(\mathbf{X})$ (cf. 2.2.7), contredisant 2.2.2.

Soit alors $F \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$; si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $X_{mn}^p F \in I_q(\mathbf{X})$, on a $X_{mn}^p F \in \tilde{I}_q(\mathbf{X})$. Comme $X_{mn} \notin \tilde{I}_q(\mathbf{X})$, 2.2.7 assure que $F \in \tilde{I}_q(\mathbf{X}) = I_q(\mathbf{X})\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{X_{11}}$. Par suite, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $FX_{11}^r \in I_q(\mathbf{X})$. \square

Proposition 2.3.7. *Soit $F \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$; si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $FX_{11}^p \in I_q(\mathbf{X})$, alors $F \in I_q(\mathbf{X})$. En d'autres termes, X_{11} est régulier à gauche modulo $I_q(\mathbf{X})$.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur le degré total de F (noté $\text{deg } F$). Soient

$F \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $FX_{11}^p \in I_q(\mathbf{X})$. Si $\deg F = 0$, $F \in \mathbb{K}$. Si $F \neq 0$, il s'ensuit que $X_{11}^p \in I_q(\mathbf{X})$, ce qui est faux d'après 2.1.2. Ainsi, l'assertion est vraie pour $\deg F = 0$.

Soit $d \in \mathbb{N}$, on suppose le résultat acquis pour tout élément de degré au plus d et on considère un élément $F \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$, de degré $d + 1$ et tel que $FX_{11}^p \in I_q(\mathbf{X})$ pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$. Alors, $FX_{11}^p \in L_q(\mathbf{X}) \cap C_q(\mathbf{X})$ (cf. 2.3.4). Comme $L_q(\mathbf{X})$ et $C_q(\mathbf{X})$ sont complètement premiers (cf. 2.3.2), et ne contiennent pas X_{11} , on a $F \in (I_q(\mathbf{X}), X_{mn})$ d'après 2.3.5. D'après 2.1.3, X_{mn} est normal modulo $I_q(\mathbf{X})$, F peut donc s'écrire sous la forme $F = G + X_{mn}f$, où $G \in I_q(\mathbf{X})$ et $f \in \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. De plus, comme $I_q(\mathbf{X})$ est engendré par des éléments homogènes de l'anneau $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$ (gradué par le degré total), c'est un idéal gradué qui contient donc les composantes homogènes de ses éléments. Il s'ensuit que l'on peut supposer que $\deg f \leq d$.

Comme $FX_{11}^p \in I_q(\mathbf{X})$, il vient $X_{mn}fX_{11}^p \in I_q(\mathbf{X})$. Le lemme 2.3.6 assure alors qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $fX_{11}^r \in I_q(\mathbf{X})$. Mais, par hypothèse de récurrence, ceci conduit à $f \in I_q(\mathbf{X})$, et finalement $F \in I_q(\mathbf{X})$. □

Théorème 2.3.8. *L'anneau $R_q(\mathbf{X})$ est intègre.*

Preuve. Soient m et n deux entiers non nuls ($m, n \geq 2$) et $\mathbf{X} = (X_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Si l'on suppose $R_q(\mathbf{X}')$ et $R_q(\mathbf{X}'')$ intègres, 2.2.7 et 2.3.7 assurent que $R_q(\mathbf{X})$ est intègre. On peut alors conclure par récurrence comme indiqué dans l'introduction de cette sous-section. □

Normalité de $R_q(\mathbf{X})$. On montre à présent que l'anneau intègre $R_q(\mathbf{X}) = \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]/I_q(\mathbf{X})$ est un ordre maximal de son corps de fractions. On notera x_{ij} la classe de X_{ij} modulo $I_q(\mathbf{X})$. D'après 2.1.3, les $x_{ij} \in R_q(\mathbf{X})$ commutent deux-à-deux à un scalaire non nul près. Ils sont donc normaux.

Lemme 2.3.9. *La partie multiplicative $\{x_{11}^i, i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de dénominateurs de $R_q(\mathbf{X})$. De plus $R_q(\mathbf{X})_{x_{11}} \cong \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{x_{11}}/\tilde{I}_q(\mathbf{X})$.*

Preuve. Comme x_{11} est normal dans $R_q(\mathbf{X})$, $\{x_{11}^i, i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de dénominateurs de $R_q(\mathbf{X})$. De plus, le morphisme canonique $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}] \rightarrow R_q(\mathbf{X}) \hookrightarrow R_q(\mathbf{X})_{x_{11}}$ induit un morphisme $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]_{x_{11}} \rightarrow R_q(\mathbf{X})_{x_{11}}$, clairement surjectif et donc le noyau est $\tilde{I}_q(\mathbf{X})$. □

Proposition 2.3.10. *L'ensemble $\{x_{mn}^i, i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de dénominateurs de $R_q(\mathbf{X})$ et l'algèbre intègre $R_q(\mathbf{X})_{x_{mn}}$ est un ordre maximal de son corps de fractions.*

Preuve. On reprend les notations de 2.1.7. D'après 2.3.9, $\{y_{11}^i, i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de dénominateurs de $R_{q^{-1}}(\mathbf{Y})$ et $R_{q^{-1}}(\mathbf{Y})_{y_{11}} \cong \mathbb{K}_{q^{-1}}[\mathbf{Y}]_{y_{11}}/\tilde{I}_{q^{-1}}(\mathbf{Y})$. D'après 2.2.7, $R_{q^{-1}}(\mathbf{Y})_{y_{11}}$ est donc un ordre maximal de son corps de fractions. De plus, il est clair d'après 2.1.7 que l'isomorphisme $S : \mathbb{K}_q[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{K}_{q^{-1}}[\mathbf{Y}]$ induit un isomorphisme $\tilde{S} : R_q(\mathbf{X})_{x_{mn}} \rightarrow R_{q^{-1}}(\mathbf{Y})_{y_{11}}$. Ceci achève la preuve. □

Théorème 2.3.11. *L'anneau intègre $R_q(\mathbf{X})$ est un ordre maximal de son corps de fractions.*

Preuve. D'après 2.3.5, $(\min_q(\mathbf{X}), X_{mn}) = L_q(\mathbf{X}) \cap C_q(\mathbf{X}) \triangleleft \mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$. Il s'ensuit que les idéaux $l_q(\mathbf{X}) = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$ et $c_q(\mathbf{X}) = (x_{1n}, \dots, x_{mn})$ de $R_q(\mathbf{X})$, qui sont complètement premiers d'après 2.3.2, satisfont à $(x_{mn}) = l_q(\mathbf{X}) \cap c_q(\mathbf{X})$. De plus, on a déjà vu que x_{mn} est un élément normal de $R_q(\mathbf{X})$. Enfin, les relations de commutation entre x_{mn} et les générateurs de $l_q(\mathbf{X})$ et $c_q(\mathbf{X})$ (qui se déduisent de la définition de $\mathbb{K}_q[\mathbf{X}]$) montrent que ces deux idéaux sont stables sous l'automorphisme associé à l'élément normal régulier x_{mn} de $R_q(\mathbf{X})$. Comme d'après 2.3.10 $R_q(\mathbf{X})_{x_{mn}}$ est un ordre maximal de son corps de fractions, on est dans les hypothèses du lemme 1.1 qui permet de conclure que $R_q(\mathbf{X})$ est un ordre maximal de son corps de fractions. □

3. Espaces quantiques uniparamétrés

Dans cette section, nous étudions le cas de l'espace quantique uniparamétré E_n^q . Rappelons que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{K}^*$, $E_n^q = \mathbb{K}_q[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ est l'algèbre engendrée sur \mathbb{K} par n générateurs Y_1, \dots, Y_n soumis aux relations $Y_i Y_j = q Y_j Y_i$, pour $1 \leq i < j \leq n$. Il est clair que E_n^q est une extension de Ore itérée du corps \mathbb{K} , intègre et noethérienne.

Dans la première sous-section, nous rappelons la classification du spectre de E_n^q pour \mathbb{K} algébriquement clos et q non racine de l'unité. Dans la seconde, nous étudions certains facteurs intègres de E_n^q et montrons en particulier que, si \mathbb{K} est algébriquement clos et q non racine de l'unité, alors tous les quotients premiers de E_n^q sont des ordres maximaux de leur corps de fractions.

3.1. Spectre premier des espaces quantiques uniparamétrés

On reprend les notations de [1]. On note \mathcal{W} l'ensemble des parties de \mathbb{N}_n . Alors, si $\omega \in \mathcal{W}$, on note $\text{spec}_\omega E_n^q$ l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{p} de E_n^q tels que $\mathfrak{p} \cap \{Y_i, i \in \mathbb{N}_n\} = \{Y_i, i \in \omega\}$, de sorte que le spectre de E_n^q , noté $\text{spec } E_n^q$, est réunion disjointe des $\text{spec}_\omega E_n^q$, $\omega \in \mathcal{W}$.

Pour $\omega \in \mathcal{W}$, on note J_ω l'idéal engendré par $\{Y_i, i \in \omega\}$. Il est clair que c'est un idéal complètement premier. D'autre part, si $\omega \in \mathcal{W}$ est tel que $n - \text{card } \omega = m$ soit impair et si $l_1 < \dots < l_m$ est la suite ordonnée des entiers de $\mathbb{N}_n \setminus \omega$, on montre aisément que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $Y_{l_1} Y_{l_3} \dots Y_{l_m} - \lambda Y_{l_2} Y_{l_4} \dots Y_{l_{m-1}}$ est normal modulo J_ω et on pose:

$$\mathfrak{p}_{\omega, \lambda} = J_\omega + (Y_{l_1} Y_{l_3} \dots Y_{l_m} - \lambda Y_{l_2} Y_{l_4} \dots Y_{l_{m-1}}).$$

Il est connu que, pour tout $q \in \mathbb{K}^*$, les idéaux $\mathfrak{p}_{\omega, \lambda}$ sont complètement premiers (voir [14, Chap. 3, prop. 2.1.2]). D'autre part, lorsque \mathbb{K} est algébriquement clos et q non racine de l'unité, la proposition suivante classe le spectre premier de E_n^q (voir [16, §3 p. 144] et [1, 4.9]). On a:

Proposition 3.1.1. *Supposons \mathbb{K} algébriquement clos; si $q \in \mathbb{K}^*$ est non racine de l'unité, alors $\text{spec } E_n^q = \cup_{\omega \in \mathcal{W}} \text{spec}_\omega E_n^q$ et*

si $n - \text{card } \omega$ est pair, alors $\text{spec}_\omega E_n^q = \{J_\omega\}$,

si $n - \text{card } \omega$ est impair, alors $\text{spec}_\omega E_n^q = \{J_\omega\} \cup \{p_{\omega,\lambda}, \lambda \in \mathbb{K}^\}$.*

3.2. Facteurs premiers des espaces quantiques uniparamétrés

Nous prouvons, à présent, que les facteurs premiers de E_n^q par les J_ω et les $p_{\omega,\lambda}$ sont des ordres maximaux de leur corps de fractions. Pour les J_ω c'est immédiat puisque $E_n^q/J_\omega \cong E_m^q$, où $m = n - \text{card } \omega$ (voir 1.3). Nous nous limitons donc aux $p_{\omega,\lambda}$. De plus, il est clair que pour tout idéal $p_{\omega,\lambda}$, il existe un automorphisme de E_n^q qui échange $p_{\omega,1}$ et $p_{\omega,\lambda}$. C'est pourquoi dans la suite nous n'étudierons que $p_{\omega,1}$. Enfin, on peut se ramener au cas où $\omega = \emptyset$ en travaillant modulo J_ω . En effet, dans les notations précédentes:

$$E_n^q/p_{\omega,1} \cong \mathbb{K}_q[Y_1, \dots, Y_m]/(Y_1 Y_3 \dots Y_{l_m} - Y_2 Y_4 \dots Y_{l_{m-1}}).$$

Posant $m = 2p + 1$, il s'agit donc de montrer que le quotient de E_{2p+1}^q par l'idéal complètement premier $(Y_1 Y_3 \dots Y_{2p+1} - Y_2 Y_4 \dots Y_{2p})$ est un ordre maximal de son corps de fractions. Pour toute la fin de cette sous-section, nous posons $Y = Y_1 Y_3 \dots Y_{2p+1} - Y_2 Y_4 \dots Y_{2p}$.

Le cas $p = 0$ est trivial. Le cas $p = 1$ est immédiat puisque, $E_3^q/(Y) \cong \mathbb{K}_q[Y_1, Y_3]$ est une extension de Ore itérée de \mathbb{K} (voir 1.3).

Notons y_i la classe de Y_i modulo (Y) . Il est clair que $y_1 y_3 \dots y_{2p-1}$ est un élément normal régulier de $E_{2p+1}^q/(Y)$ et que $(E_{2p+1}^q/(Y))_{y_1 y_3 \dots y_{2p-1}} \cong (E_{2p+1}^q)_{Y_1 Y_3 \dots Y_{2p-1}}/(Y)$. Enfin, posant $F = \mathbb{K}_q[Y_1, Y_2, \dots, Y_{2p}]_{Y_1 Y_3 \dots Y_{2p-1}}$, on a aisément $F \cong (E_{2p+1}^q)_{Y_1 Y_3 \dots Y_{2p-1}}/(Y)$. Finalement:

$$E_{2p+1}^q/(Y) \hookrightarrow (E_{2p+1}^q/(Y))_{y_1 y_3 \dots y_{2p-1}} \cong F. \tag{9}$$

Nous établissons à présent un lemme sur les espaces quantiques multiparamétrés utile dans la preuve de 3.2.2. Rappelons qu'un anneau est dit réduit lorsqu'il ne contient pas d'éléments nilpotents non nuls; il est connu qu'un tel anneau est semi-premier.

Nous notons $\mathcal{M}'_n(\mathbb{K}^*)$ l'ensemble des matrices $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ à coefficients dans \mathbb{K}^* telles que $\lambda_{ii} = 1$ et $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$, pour $1 \leq i, j \leq n$. A une matrice $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}'_n(\mathbb{K}^*)$ on associe l'espace quantique multiparamétré, noté E_n^Λ . C'est l'algèbre engendrée sur \mathbb{K} par n générateurs Y_1, \dots, Y_n soumis aux relations $Y_i Y_j = \lambda_{ij} Y_j Y_i$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On a alors:

Lemme 3.2.1. *Soient n un entier tel que $n \geq 2$, $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}'_n(\mathbb{K}^*)$ et E_n^Λ l'espace quantique multiparamétré associé. On considère deux entiers r et s tels que $1 \leq r < s \leq n$ et on pose $m = Y_1 \dots Y_r$ et $m' = Y_{r+1} \dots Y_s$. Alors, l'anneau quotient $E_n^\Lambda/(m, m')$ est réduit.*

Preuve. On a $E_n^\Lambda = \mathbb{K}[Y_1][Y_2; \sigma_2] \dots [Y_n; \sigma_n]$, où pour $2 \leq i \leq n$, σ_i est l'automorphisme

de $\mathbb{K}[Y_1][[Y_2; \sigma_2] \dots [Y_{i-1}; \sigma_{i-1}]$ défini, pour $1 \leq j \leq i - 1$, par $\sigma_i(Y_j) = \lambda_{ij} Y_j$. Comme l'idéal $(Y_1 \dots Y_r)$ de $\mathbb{K}[Y_1][[Y_2; \sigma_2] \dots [Y_r; \sigma_r]$ est σ_i -stable pour $r + 1 \leq i \leq n$, il vient:

$$E_n^\wedge / (m, m') \cong (A[Y_{r+1}; \bar{\sigma}_{r+1}] \dots [Y_n; \bar{\sigma}_n]) / (Y_{r+1} \dots Y_n),$$

où $A = \mathbb{K}[Y_1][[Y_2; \sigma_2] \dots [Y_r; \sigma_r]] / (Y_1 \dots Y_r)$ et où, pour $r + 1 \leq i \leq n$, $\bar{\sigma}_i$ est l'automorphisme induit sur A par σ_i .

Posons $B = A[Y_{r+1}; \bar{\sigma}_{r+1}] \dots [Y_n; \bar{\sigma}_n]$; comme B est un A -module libre à gauche de base $\{Y_{r+1}^{j_{r+1}} \dots Y_n^{j_n}, (j_{r+1}, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^{n-r}\}$, on a $(Y_{r+1}) \cap (Y_{r+2}) \cap \dots \cap (Y_n) = (Y_{r+1} \dots Y_n)$ dans B . Considérons alors l'application $\phi : B \rightarrow B/(Y_{r+1}) \times \dots \times B/(Y_n)$ définie par $\phi(f) = (f + (Y_{r+1}), \dots, f + (Y_n))$. D'après ce qui précède, $\ker \phi = (Y_{r+1} \dots Y_n)$. On dispose donc d'une injection:

$$E_n^\wedge / (m, m') \cong B / (Y_{r+1} \dots Y_n) \hookrightarrow B / (Y_{r+1}) \times \dots \times B / (Y_n).$$

D'autre part, pour $r + 1 \leq i \leq s$, on a $B / (Y_i) \cong E_n^\wedge / (Y_1 \dots Y_r, Y_i) \cong E_i / (Y_1 \dots Y_i)$, où E_i désigne le sous-anneau de E_n^\wedge engendré par le Y_j pour $j \neq i$. Il est clair que E_i est un espace quantique multiparamétré et que, dans E_i , l'idéal $(Y_1 \dots Y_i)$ est intersection d'idéaux complètement premiers: $(Y_1 \dots Y_r) = (Y_1) \cap \dots \cap (Y_r)$. Ainsi, pour $r + 1 \leq i \leq s$, $B / (Y_i)$ est un anneau réduit et par suite $B / (Y_{r+1}) \times \dots \times B / (Y_n)$ est un anneau réduit. Il s'ensuit que $E_n^\wedge / (m, m')$ est réduit. □

Proposition 3.2.2. *Soit \mathcal{I} (resp. \mathcal{J}) l'ensemble des entiers impairs (resp. pairs) de \mathbb{N}_{2p} . Pour $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, on pose $\mathcal{P}_{i,j} = (y_i, y_j) \triangleleft E_{2p+1}^q / (Y)$. Alors:*

- (i) *pour tout $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, $\mathcal{P}_{i,j}$ est complètement premier,*
- (ii) *$\{\mathcal{P}_{i,j}, (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}\}$ est l'ensemble des idéaux premiers minimaux au dessus de $(y_1 y_3 \dots y_{2p-1})$,*
- (iii) *$(y_1 y_3 \dots y_{2p-1}) = \bigcap_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mathcal{P}_{i,j}$.*

Preuve. Pour $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, l'idéal (Y_i, Y_j) de E_{2p+1}^q est complètement premier et contient (Y) . On en déduit (i). D'autre part, soit \mathcal{P} un idéal premier minimal au dessus de $(y_1 y_3 \dots y_{2p-1})$. Alors, $y_1 y_3 \dots y_{2p-1}$ et $y_2 y_4 \dots y_{2p}$ sont dans \mathcal{P} . Puisque, pour $k \in \mathbb{N}_{2p+1}$, les y_k sont normaux, il existe donc $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ tel que $(y_i, y_j) \subseteq \mathcal{P}$. D'après (i) on a alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{i,j}$ d'où (ii). Enfin, remarquons que $(E_{2p+1}^q / (Y)) / (y_1 y_3 \dots y_{2p-1}) \cong E_{2p+1}^q / (Y_1 Y_3 \dots Y_{2p-1}, Y_2 Y_4 \dots Y_{2p})$. Quitte à réindexer les Y_k , le lemme 3.2.1 s'applique à $E_{2p+1}^q / (Y_1 Y_3 \dots Y_{2p-1}, Y_2 Y_4 \dots Y_{2p})$. On en déduit que $(E_{2p+1}^q / (Y)) / (y_1 y_3 \dots y_{2p-1})$ est semi-premier, d'où (iii). □

Corollaire 3.2.3. *L'anneau intègre $E_{2p+1}^q / (Y)$ est un ordre maximal de son corps de fractions.*

Preuve. D'après 3.2.2, l'idéal $(y_1 y_3 \dots y_{2p-1})$ de $E_{2p+1}^q / (Y)$ est intersection des idéaux

complètement premiers $\mathcal{P}_{i,j}$ pour $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$. L'automorphisme associé à l'élément normal régulier $y_1 y_3 \dots y_{2p-1} \in E_{2p+1}^q/(Y)$ agit par multiplication scalaire sur les y_i . Il laisse donc stable les idéaux $\mathcal{P}_{i,j}$, $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$. Enfin, d'après (9), $(E_{2p+1}^q/(Y))_{y_1, y_3, \dots, y_{2p-1}}$ est isomorphe à un localisé d'espace quantique multiparamétré; à ce titre, c'est un ordre maximal de son corps de fractions (voir 1.3). On est donc dans les hypothèses du lemme 1.1 qui permet de conclure. \square

D'après 3.2.3 et 3.1.1, on a finalement:

Théorème 3.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{K}^*$. Dans les notations de 3.1,*

(i) *si $(\omega, \lambda) \in \mathcal{W} \times \mathbb{K}^*$, alors E_n^q/J_ω et $E_n^q/\mathfrak{p}_{\omega,\lambda}$ sont des anneaux intègres et des ordres maximaux de leur corps de fractions;*

(ii) *en particulier, si \mathbb{K} est algébriquement clos et q non racine de l'unité, alors tout facteur (complètement) premier de E_n^q est un ordre maximal de son corps de fractions.*

La remarque suivante énonce sans preuve certains résultats de factorialité concernant E_n^q et ses quotients premiers. Les preuves de ces résultats se trouvent dans [14, Chap. 3 §§1.1 et 2.2].

Remarque 3.2.5. La notion d'anneau noethérien factoriel (non nécessairement commutatif) est introduite dans [5]. Un anneau R est dit noethérien factoriel si il est noethérien premier et si tout idéal premier non nul contient un idéal principal (c'est-à-dire engendré par un élément normal) premier et non nul. D'après [5, 2.4], un anneau noethérien intègre factoriel est un ordre maximal de son corps de fractions. A l'aide de [5, 4.2] on montre que tout espace quantique multiparamétré E_n^Λ est un anneau noethérien factoriel ([14, Chap. 3 cor. 1.2.5]). Cependant, dans les notations précédentes, on peut montrer que pour $p \geq 2$, $E_{2p+1}^q/(Y)$ n'est pas un anneau factoriel ([14, Chap. 3 cor. 2.2.6]). En particulier, il n'est pas isomorphe à un espace quantique multiparamétré. Ainsi, pour $(\omega, \lambda) \in \mathcal{W} \times \mathbb{K}^*$ tel que $n - \text{card } \omega$ soit impair, si $n - \text{card } \omega \neq 1$ ou 3 , $E_n^q/\mathfrak{p}_{\omega,\lambda}$ est un ordre maximal de son corps de fractions sans être un anneau factoriel.

Nous terminons par une remarque concernant certains facteurs complètement premiers de l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{\bar{q}, \Lambda}$.

Remarque 3.2.6. (1) On reprend les définitions et notations de [13]. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; à $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$ et $\Lambda \in \mathcal{M}'_n(\mathbb{K}^*)$, on associe l'algèbre $A_n^{\bar{q}, \Lambda}$ définie au 2.1.1 de [13]. Nous supposons les q_i distincts de 1, disposant ainsi des résultats de [13, §3.1]. Pour la définition d'idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q}, \Lambda}$, nous renvoyons à [13, §3.1]. Rappelons que ces idéaux sont complètement premiers ([13, 3.1.6]). En appliquant les méthodes développées dans le présent travail, on montre que si P est un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q}, \Lambda}$, alors l'anneau intègre $A_n^{\bar{q}, \Lambda}/P$ est un ordre maximal de son corps de fractions ([14, Chap. 3 théo. 3.4]).

(2) De plus, d'après [13, 3.2.3], si \mathbb{K} est algébriquement clos et de caractéristique nulle et si le sous-groupe de \mathbb{K}^* engendré par les coefficients de \bar{q} et Λ est libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$, alors le spectre de $A_n^{\bar{q}, \Lambda}$ est réduit aux idéaux maximaux (dont les anneaux résiduels sont isomorphes à \mathbb{K}) et aux idéaux algorithmiques. En fait, sous ces hypothèses, et en utilisant la famille complète de générateurs d'un idéal algorithmique (définie en [13, 3.1.8]), on montre que tous les facteurs premiers de $A_n^{\bar{q}, \Lambda}$ sont factoriels.

RÉFÉRENCES

1. K. A. BROWN and K. R. GOODEARL, Prime spectra of quantum semisimple groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 2465–2502.
2. W. BRUNS and U. VETTER, *Determinantal rings* (Lecture Notes in Math. **1327**, Springer-Verlag, Berlin, 1988).
3. M. CHAMARIE, Localisations dans les ordres maximaux, *Comm. Algebra* **2** (1974), 279–293.
4. M. CHAMARIE, *Sur les ordres maximaux au sens d'Asano* (Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, Heft 3, 1979).
5. A. W. CHATTERS and D. A. JORDAN, Noncommutative unique factorisation rings, *J. London Math. Soc. (2)* **33** (1986), 22–32.
6. K. R. GOODEARL, Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras, *J. Algebra* **150** (1992), 324–377.
7. K. R. GOODEARL and T. H. LENAGAN, Quantum determinantal ideals, preprint.
8. G. MAURY, Ordres maximaux preque-factoriels, *Comm. Algebra* **8** (1980), 1711–1720.
9. G. MAURY et J. RAYNAUD, *Ordres maximaux au sens de K. Asano* (Lecture Notes in Math. **808**, Springer-Verlag, Berlin, 1980).
10. J. C. MCCONNELL and J. C. ROBSON, *Noncommutative Noetherian Rings* (Wiley, Chichester, 1987).
11. M. NOUMI, H. YAMADA and K. MIMACHI, Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n; C)$ and the zonal spherical functions on $U_q(n-1) \setminus U_q(n)$, *Japan. J. Math.* **19** (1993), 31–80.
12. B. PARSHALL and J. WANG, Quantum Linear Groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **89** (1991), no. 439.
13. L. RIGAL, Spectre de l'algèbre de Weyl quantique, *Beiträge Algebra Geom.* **37** (1996), 119–148.
14. L. RIGAL, *Analogues quantiques de l'Algèbre de Weyl et Ordres Maximaux quantiques* (Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 1996).
15. D. W. SHARPE, On certain polynomial ideals defined by matrices, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **15** (1964), 155–175.

16. S. P. SMITH, Quantum groups: an introduction and survey for ring theorists, in *Noncommutative Rings (Berkeley, CA, 1989)*, (Math. Sci. Res. Inst. Publ. 24, Springer-Verlag, New York, 1992), 131–178.

UNIVERSITÉ DE POITIERS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
40, AVENUE DU RECTEUR PINEAU
86022 POITIERS
FRANCE

Current address:
UNIVERSITÉ DE SAINT-ETIENNE
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES, MATHÉMATIQUES
23, RUE DU DOCTEUR PAUL MICHELON
42023 SAINT-ETIENNE CEDEX
FRANCE

E-mail address: Laurent.Rigal@univ-st-etienne.fr