Compositio Math. 141 (2005) 1081–1102
doi:10.1112/S0010437X05001454

Cohomologie automorphe et compactifications partielles de certaines variétés de Griffiths–Schmid

Henri Carayol

Abstract

We study some automorphic cohomology classes of degree one on the Griffiths–Schmid varieties attached to some unitary groups in three variables. Using partial compactifications of those varieties, constructed by Kato and Usui, we define for such a cohomology class some analogues of Fourier–Shimura coefficients, which are cohomology classes on certain elliptic curves. We show that a large space of such automorphic classes can be generated by those with rational 'coefficients'. More precisely, we consider those cohomology classes that come from Picard modular forms, via some Penrose-like transform studied in a previous article: we prove that the coefficients of the classes thus obtained can be computed from the coefficients of the Picard form by a similar transform defined at the level of the elliptic curve.

Introduction

Le présent travail prolonge les articles [Car98] et [Car00], dans lesquels on étudiait les groupes de cohomologie de certains faisceaux cohérents sur les variétés de Griffiths–Schmid associées à certaines formes de groupes unitaires en trois variables. Rappelons sommairement la définition des variétés en question : elles sont des quotients de domaines de périodes ('period matrix domains'), attachés à certains groupes réductifs, par des groupes arithmétiques, ou, si l'on préfère, des version adéliques de tels quotients. En tant que telles, elles généralisent la notion de variété de Shimura, bien qu'elles ne soient pas en général, contrairement à ces dernières, des variétés algébriques. Elles avaient été considérées et étudées par Griffiths et Schmid (cf. [GS69]) parce qu'elles paramètrent des structures de Hodge munies de polarisations et de données additionnelles.

Comme dans le cas plus classique des variétés de Shimura, la décomposition des groupes de cohomologie de faisceaux cohérents se décrit en termes de formes automorphes, une différence essentielle avec ce cas habituel consistant en ceci : que le H^0 est souvent nul ou trivial, autrement dit qu'il n'y a pas ou peu de formes automorphes au sens usuel (d'où le fait que ces variétés sont la plupart du temps non-algébriques), mais plutôt des classes de cohomologie automorphe de degré $\geqslant 1$. Les articles [Car98] et [Car00] tirent leur origine de l'observation que ces groupes de cohomologie, dans le cas des variétés de Griffiths–Schmid, peuvent contenir un peu plus de formes automorphes que dans le cas des variétés de Shimura; en particulier, du moins dans le cas de formes de groupes unitaires à trois variables, mais sans doute aussi dans des cas beaucoup plus généraux, on y trouve des classes associées à des formes du type de Maass qui ne peuvent pas intervenir dans le cadre des variétés de Shimura. On aimerait bien sûr beaucoup pouvoir se servir de l'apparition de ces formes dans la cohomologie de ces variétés afin de prouver des propriétés arithmétiques (rationalité, congruences, construction de représentations galoisiennes), mais on se heurte aussitôt dans ce projet à l'obstacle essentiel que constitue leur non-algébricité.

Received 16 February 2004, accepted in final form 23 October 2004, published online 1 September 2005.
2000 Mathematics Subject Classification 11F99, 14K25, 32C35, 32E10, 32M10, 32N99.
Keywords: automorphic form, Picard variety, unitary group, Dolbeault cohomology, theta function.

L'objet du présent article est d'aborder la question suivante : comment peut-on définir ce qu'est une classe de cohomologie rationnelle, en dépit du fait que la variété étudiée n'est pas munie d'une structure arithmétique ? Si l'on pense au cas plus habituel des variétés de Shimura (en oubliant provisoirement qu'elles sont algébriques et définies sur un corps de nombres) et si l'on veut définir élémentairement pour ces dernières ce qu'est la rationalité d'une forme automorphe, on voit que cela peut se faire essentiellement de deux façons : la première consiste à regarder les valeurs prises aux points spéciaux et la seconde à considèrer les coefficients des développements de Fourier aux pointes ou composantes frontières. La première façon peut se généraliser sous la forme suivante aux classes de cohomologie portées par les variétés de Griffiths–Schmid : on intègre ladite classe sur des cycles convenables, ce qui est à la base d'une approche souvent utilisée (cf. par exemple [WW97]) quoique pour d'autres motifs que des questions de rationalité. Quant à la seconde façon de procéder, sa généralisation au cas présent nécessite de disposer d'un analogue des composantes frontières, c'est-à-dire d'une sorte de compactification des variétés de Griffiths–Schmid. Or une telle compactification partielle vient d'être construite par Kato et Usui [KU00]. Le but du présent article est d'explorer ce que l'on peut faire à l'aide de ces compactifications.

Nous nous plaçons ici dans le cas particulier d'un groupe unitaire en trois variables ; c'est le même cadre que celui où nous nous étions placés dans les deux articles [Car98] et [Car00], à ceci près que nous prenions alors pour simplifier une forme anisotrope du groupe, ce que nous ne faisons plus maintenant car bien sûr nous voulons travailler sur une variété non-compacte. Notre variété complexe est de dimension 3, et nous décrivons dans ce cas la 'compactification' (en fait très partielle) que nous donne la construction de Kato et Usui : elle revient à ajouter comme composantes frontières des courbes elliptiques à multiplication complexe. D'autre part nous appliquons une construction analogue à celle de [Car00] qui donne, à partir de formes de Picard classiques, les classes de cohomologie (de degré 1) qui leur correspondent sur notre variété. Nous regardons ensuite la restriction au voisinage d'une composante frontière de cette classe et expliquons enfin comment écrire une sorte de développement de Fourier et comment exprimer les coefficients de ce développement, qui sont des éléments du H^1 des courbes elliptiques frontières, en terme du développement de Fourier–Shimura (cf. [Shi77, Shi78]) de la forme de Picard de départ. On peut donc lire sur ce développement les propriétés de rationalité de nos classes.

Il serait extrêmement intéressant de pouvoir faire de même pour des classes de cohomologie de degré 2 : en effet, de même que dans [Car98], on devrait obtenir par cup-produit de formes de type holomorphe et anti-holomorphe toutes les formes du type de Maass. Si l'on pouvait définir des sortes de coefficients de Fourier pour de telles classes, on en déduirait des renseignements tout-à-fait nouveaux sur leurs propriétés arithmétiques. Il s'agit toutefois d'un problème nettement plus difficile que pour le H^1. On verra en effet dans le cours de cet article à quoi ressemble un voisinage de la courbe elliptique frontière : un tel voisinage n'est pas localement de Stein ; le H^2 d'un tel voisinage de notre courbe elliptique fait intervenir, outre la géométrie de cette courbe, les groupes de 1-cohomologie des voisinages des points de la frontière. Il s'agit donc d'un objet de nature nettement moins algébrique que le H^1.

Le plan de l'article est le suivant : au paragraphe 1, nous définissons les variétés qui nous intéressent, et nous expliquons comment adapter les constructions de [Car00] afin de pouvoir associer aux formes modulaires de Picard des classes de cohomologie automorphe. Dans le second paragraphe nous explicitons, dans le cas particulier considéré ici, la construction de Kato et Usui, qui donne naissance à une compactification partielle de notre variété de Griffiths–Schmid. Le troisième paragraphe est consacré à la définition des développements de Fourier–Jacobi tant dans le cas des formes modulaires de Picard que dans celui des classes de cohomologie automorphe sur les variétés ici considérées : le premier cas est bien classique, et on obtient des éléments du H^0 de courbes elliptiques CM, autrement dit des fonctions thêta. Dans le second cas nous obtenons comme 'coefficients' des classes dans le H^1 des mêmes courbes, où plutôt de leurs complexes conjuguées.

Au quatrième paragraphe nous définissons une transformation cohomologique qui associe aux sections de faisceaux sur d'une courbe elliptique des classes de 1-cohomologie sur la courbe conjuguée et nous établissons des propriétés de rationalité pour cette transformation. Finalement, nous vérifions au paragraphe 5 que la transformation cohomologique du § 1 est donnée au niveau de chaque coefficient par celle du § 4, ce qui prouve finalement les propriétés de rationalité attendues.

1. Formes automorphes et cohomologie automorphe

Soit $F \subset \mathbb{C}$ un corps quadratique imaginaire, muni d'un plongement complexe. On note $G = SU(2,1)$ le groupe spécial unitaire (quasi-déployé) associé à la forme hermitienne H sur F^3 donnée par $H(x,y,t) = -x\bar{t} + y\bar{y} - \bar{x}t$, où $x \to \bar{x}$ désigne la conjugaison complexe sur F. Le groupe $G(\mathbb{R})$ opère naturellement sur le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec deux orbites ouvertes qui sont respectivement la 'boule unité' ouverte Δ, constituée des points p associés aux vecteurs v qui vérifient $H(v) < 0$, et le complémentaire de la boule fermée Δ^c. On a repris ici des notations de [Car00] sauf en ce qui concerne la forme hermitienne qui était diagonale dans (*loc. cit.*) et qu'il est plus pratique de considérer maintenant comme nous le faisons ici, dans le but d'étudier les phénomènes qui se passent au voisinage des pointes. Une autre différence essentielle avec [Car00] est que nous avions considéré alors une forme anisotrope de $SU(2,1)$.

Le domaine de périodes Ω est le sous-espace ouvert de l'ensemble des drapeaux (p, L) constitué de ceux tels que p n'appartienne pas à la boule fermée Δ^c et que L rencontre Δ. Si on note $\check{\Omega}$ l'ensemble de tous les drapeaux de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on voit qu'il y a 3 orbites ouvertes pour l'action de $G(\mathbb{R})$ sur $\check{\Omega}$: d'une part Ω, d'autre part deux orbites notées $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, en dualité par rapport à la forme H : on a désigné par $\mathbf{X}$ (respectivement $\mathbf{Y}$) le sous espace de l'espace des drapeaux $\check{\Omega}$ constitué des (p, L) tels que $p \in \Delta$ (respectivement tels que $L \cap \Delta^c = \emptyset$).

Les *variétés de Griffiths–Schmid* (connexes) associées à cette situation sont les quotients $\Gamma\backslash\Omega$ pour Γ un sous-groupe de congruence assez petit de G. Ce sont des variétés analytiques complexes non algébriques. Contrairement à la situation étudiée dans [Car00], elles ne sont plus maintenant compactes.

Plus classiquement, on considère les *surfaces de Picard* $\Gamma\backslash\Delta$. L'espace $\mathbf{X}$ est fibré en droites projectives au dessus de Δ, et il en est donc de même pour les quotients $\Gamma \setminus \mathbf{X}$, au-dessus des surfaces $\Gamma \setminus \Delta$. Quand à $\mathbf{Y}$ et ses quotients, ils s'identifient naturellement, sous la dualité donnée par la forme hermitienne H, aux conjugués complexes de $\mathbf{X}$ et de ses quotients. Ils sont fibrés en droites projectives sur la surface de Picard $\Gamma\backslash\overline{\Delta}$, où $\overline{\Delta}$ désigne l'ensemble, dual de Δ, constitué des droites L extérieures à Δ^c.

Désignons d'autre part par $\mathcal{F}_{a,b}$ la restriction du faisceau $\mathcal{O}(a)\otimes\mathcal{O}(b)$ à $\check{\Omega} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^{2\vee}(\mathbb{C})$, ainsi qu'aux différents espaces Ω, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$; puisqu'il s'agit de faisceaux équivariants, cela définit également des faisceaux, notés de façon identique, sur les quotients $\Gamma\backslash\Omega$, $\Gamma\backslash\mathbf{X}$, $\Gamma\backslash\mathbf{Y}$. Nous appellerons *formes modulaires de Picard* les sections, quand elles existent, des faisceaux $\mathcal{F}_{a,b}$ sur les variétés $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ (respectivement $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$), munies de condditions de croissance convenable aux pointes. Pour le faisceau $\mathcal{F}_{-k,0}$ sur $\Gamma\backslash\mathbf{X}$ (respectivement $\mathcal{F}_{0,-k}$ sur $\Gamma\backslash\mathbf{Y}$), qui provient de $\Gamma\backslash\Delta$ (respectivement $\Gamma\backslash\overline{\Delta}$), on obtient ainsi la notion la plus usuelle de 'forme de Picard de poids k' ; pour les autres on retrouve la définition plus habituelle en considérant le fibré vectoriel sur $\Gamma\backslash\Delta$ (respectivement $\Gamma\backslash\overline{\Delta}$) défini comme l'image directe du faisceau constant par la fibration en $\mathbb{P}^1$ dont il a été question ci-dessus.

Dans [Car00] nous avions défini des transformations linéaires,

$$\mathcal{P} : H^0(\mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{-a-2,a+b+1}),$$
$$\text{et}\quad \mathcal{P}' : H^0(\mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{a+b+1,-b-2}),$$

la première étant injective pour $b \geqslant 0$ et $a+b \leqslant -2$, et la seconde pour $a \geqslant 0$ et $a+b \leqslant -2$. Nous nous placerons toujours sous ces hypothèses. Nous appliquerons ces transformations aux sections Γ-invariantes qui correspondent à des formes modulaires de Picard. On obtient alors comme image une *classe de cohomologie automorphe*, c'est-à-dire invariante par Γ. Comme dans l'article précité, une telle classe provient d'une (unique) classe de cohomologie sur le quotient $\Gamma \setminus \Omega$: une façon de voir ceci est de considérer la suite exacte des termes de bas degrés associée à la suite spectrale de Cartan–Leray relative au quotient $\Gamma \setminus \Omega$,

$$H^1(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a',b'})) \to H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a',b'}) \to H^1(\Omega, \mathcal{F}_{a',b'})^{\Gamma} \to H^2(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a',b'}))$$

avec a' et b' intervenant dans l'image de la transformation $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{P}'$) ; puis de remarquer que pour ces valeurs de a' et b', l'espace $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a',b'})$ est nul : en effet une telle section doit se prolonger, d'après le lemme (4.2) de [Car00], à l'espace de drapeaux $\check{\Omega}$ tout entier, et le fait que $a+b+1$ $(= a'$ ou $b')$ soit négatif entraîne qu'une telle section ne peut qu'être nulle.

Ce qui précède permet donc de définir des applications linéaires injectives notées encore $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$,

$$\mathcal{P} : H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{-a-2,a+b+1}),$$
$$\mathcal{P}' : H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a+b+1,-b-2}).$$

Rappelons plus en détail comment nous avions dans [Car00] défini les transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ au niveau des espaces $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, Ω : nous avions utilisé la théorie des Eastwood–Gindikin–Wong (cf. [EGW95, EGW96, Gin93]), qui permet d'exprimer la cohomologie à partir d'une fibration à fibres contractiles et dont l'espace total est de Stein. Dans notre cas, un tel espace est l'ensemble $\mathbf{U}$ constitué des couples de drapeaux $(z, l; \xi, \alpha)$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) les points z et ξ sont distincts et la droite J qui les joint ne rencontre pas Δ^c ;
(ii) les droites l et α sont distinctes et leur intersection I appartient à Δ.

L'espace $\mathbf{U}$ est de Stein et la projection sur le premier facteur $\pi : \mathbf{U} \to \Omega$ est à fibres contractiles. Sous ces hypothèses on a alors un isomorphisme entre la cohomologie de Ω à valeurs dans un faisceau $\mathcal{F}$ et la cohomologie du complexe $\Gamma(\mathbf{U}, \Omega^{\bullet}_{\pi}(\mathcal{F}))$ des sections globales sur $\mathbf{U}$ du faisceau des différentielles relatives à valeurs dans $\mathcal{F}$. Nous avions alors défini nos transformations dans ce cadre par des formules

$$\mathcal{P}(f)(z, l; \xi, \alpha) = f(l \wedge \alpha, l)\alpha(z)^{-a}\omega_I,$$
$$\mathcal{P}'(f')(z, l; \xi, \alpha) = f'(z, z \wedge \xi)l(\xi)^{-b}\omega_J$$

avec $\omega_I \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega^1_{\pi}(\mathcal{F}_{-2,1}))$ et $\omega_J \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega^1_{\pi}(\mathcal{F}_{1,-2}))$ des éléments canoniques dont nous rappellerons plus bas (au § 5) la définition exacte.

Ces mêmes formules définissent également les transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ au niveau des espaces quotients, une fois vérifiée la proposition suivante (que nous avions prouvé dans ([Car00, Proposition 5.2]) sous l'hypothèse que Γ était co-compact).

Proposition 1. *L'espace* $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ *est de Stein.*

Preuve. La construction donnée dans [Car00] de fonctions qui séparent les points n'utilisait pas la co-compacité de Γ et reste donc valide ici.

Par contre nous utilisions cette hypothèse pour construire, étant donnée une suite sans valeur d'adhérence $((I_n, l_n), (\xi_n, J_n))$ d'éléments de $\Gamma \setminus \mathbf{U}$, une fonction Φ telle que $\Phi((I_n, l_n), (\xi_n, J_n))$ ne soit pas bornée. Expliquons comment modifier l'argument afin qu'il s'applique au cas présent.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Tout d'abord on vérifie aussitôt que l'argument donné dans (*loc. cit.*) s'applique tel quel si l'image de la suite I_n dans le quotient $\Gamma \backslash \Delta$, de même que celle de la suite J_n dans le quotient $\Gamma \backslash \overline{\Delta}$, sont contenues dans des parties compactes.

On peut donc supposer, quitte à permuter éventuellement le rôle de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, que I_n admet une pointe comme valeur d'adhérence. Quitte à remplacer ensuite Γ par un conjugué, à extraire une sous-suite et à choisir des représentants convenables, on se ramène à supposer que I_n est représenté par $\tilde{I}_n = (x_n \quad y_n \quad 1)^\top$, avec y_n et $\Im(x_n)$ bornés tandis que $\Re(x_n)$ tend vers $+\infty$. On peut aussi supposer qu'un représentant $\tilde{J}_n = (u_n, v_n, w_n)$ a été choisi de telle sorte qu'il converge vers $\tilde{J} = (u, v, w)$, dont l'image J peut appartenir à $\overline{\Delta}$ ou à sa frontière suivant que $|v|^2 - 2\Re(u\bar{v})$ est < 0 ou bien nul ; noter que dans le premier cas u est nécéssairement non nul.

Le cas le plus simple est le cas où $J \in \overline{\Delta}$. Dans ce cas $f(\tilde{I}_n)$ converge vers la valeur de notre forme en la pointe considérée, $g(\tilde{J}_n)$ vers $g(\tilde{J})$, et $|\tilde{J}_n(\tilde{I}_n)| = |u_n x_n + v_n y_n + w_n|$ tend vers $+\infty$. On voit alors que pour un choix convenable de f et g, la suite

$$\Phi_{f,g}((I_n, l_n), (\xi_n, J_n)) = f(\tilde{I}_n) g(\tilde{J}_n) \tilde{J}_n(\tilde{I}_n)^{-a}$$

(notations de *loc. cit.* avec $b = 0$, $a \leqslant -2$) n'est pas bornée.

Le second cas est celui où la suite J_n converge vers un point de la frontière, mais où son image dans le quotient $\Gamma \backslash \overline{\Delta}$ reste dans un compact. On peut alors trouver des scalaires κ_n ainsi que des éléments $\gamma_n \in \Gamma$ tels que $\kappa_n \tilde{J}_n \gamma_n^{-1} = \tilde{J}'_n = (u'_n \quad v'_n \quad w'_n)$ converge vers $\tilde{J}' = (u' \quad v' \quad w')$ représentant un élément J' de Δ. Dans ce cas

$$|v'_n|^2 - 2\Re(u'_n \bar{w}'_n) = |\kappa_n|^2 (|v_n|^2 - 2\Re(u_n \bar{w}_n))$$

tend vers un réel < 0 tandis que $|v_n|^2 - 2\Re(u_n \bar{w}_n)$ tend vers 0, de sorte que $|\kappa_n|$ tend vers l'infini.

On a : $g(\tilde{J}'_n) = \kappa_n^a g(\tilde{J}_n)$, de sorte que

$$\Phi_{f,g}((I_n, l_n), (\xi_n, J_n)) = f(\tilde{I}_n) g(\tilde{J}'_n) (\kappa_n \tilde{J}_n(\tilde{I}_n))^{-a} = f(\tilde{I}_n) g(\tilde{J}'_n) (\tilde{J}'_n \gamma_n \tilde{I}_n)^{-a}.$$

Les vecteurs $\tilde{I}'_n = \gamma_n \tilde{I}_n = (x'_n \quad y'_n \quad z'_n)^\top$ représentent des points de la boule unité dont toutes les valeurs d'adhérence sont sur sa frontière (sans quoi leur projection sur le quotient ne tendrait pas vers la frontière). Extrayant encore une sous-suite, on peut supposer que pour certains scalaires λ_n le vecteur $\lambda_n^{-1} \tilde{I}'_n$ converge vers $(x' \quad y' \quad z')^\top$ représentant un point frontière. D'autre part $|y'_n|^2 - 2\Re(x'_n \bar{z}'_n) = |y_n|^2 - 2\Re(x_n)$ tend vers $-\infty$ et donc $|\lambda_n|$ tend vers $+\infty$. Enfin $\lambda_n^{-1} J'_n(I'_n)$ tend vers $u'x' + v'y' + w'z'$ qui est non nul, d'où il découle que la suite $J'_n(I'_n)$ n'est pas bornée. Nous en déduisons comme précédemment que, pour un choix convenable des fonctions f et g, la suite des $\Phi_{f,g}((I_n, l_n), (\xi_n, J_n))$ n'est pas bornée.

Il reste le cas où l'image de J_n converge aussi vers une pointe. Il existe alors $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ tel que J_n soit représenté par $\tilde{J}_n = (1 \quad v_n \quad w_n)\gamma$ avec v_n et $\Im w_n$ bornés et $\Re w_n$ tendant vers $+\infty$. On a

$$f(\tilde{I}_n) g(\tilde{J}_n) \tilde{J}_n(\tilde{I}_n)^{-a} = f(\tilde{I}_n) g(\tilde{J}_n) ((1 \quad v_n \quad w_n)\gamma \tilde{I}_n)^{-a}.$$

Les $\gamma \tilde{I}_n = (x'_n \quad y'_n \quad z'_n)^\top$ représentent des points qui convergent vers la frontière et comme plus haut pour les $\tilde{I}'_n$ on peut trouver λ_n tendant vers l'infini et tel que $\lambda_n^{-1} \gamma \tilde{I}_n$ converge vers $(x' \quad y' \quad z')^\top$ représentant un point frontière. L'expression

$$\lambda_n^{-1} (1 \quad v_n \quad w_n) \gamma I_n = \lambda_n^{-1} (x'_n + v_n y'_n + w_n z' n)$$

tend vers l'infini (si $z' \neq 0$), ou vers $x' \neq 0$ dans le cas où $z' = y' = 0$. Dans un cas comme dans l'autre, on voit que $(1 \quad v_n \quad w_n)\gamma I_n$ n'est pas bornée et on conclut comme dans les cas précédents. □

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Remarque. Dans [Car00] nous avions donné une expression des transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en termes de cohomologie de Dolbeault et qui ne fait pas appel à la théorie de Gidinkin. Une telle expression est encore valide ici.

Remarque. Dans (*loc. cit.*) nous avions montré que les transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont aussi surjectives. Ceci est probablement encore vrai ici à condition de se limiter aux sous-espaces constitué des formes (respectivement des classes) paraboliques. Tout le problème est de définir une notion convenable de parabolicité pour les classes de cohomologie automorphe. On peut le faire sans difficulté d'un point de vue analytique, en exprimant de façon habituelle la cohomologie automorphe comme $(\mathcal{P}, K)$-cohomologie d'un espace de formes automorphes puis en se limitant à la partie parabolique de ce dernier. Avec une telle définition, la surjectivité des trandsformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est essentiellement triviale. Il serait intéressant d'avoir une notion plus géométrique analogue à ce que fait Harris [Har90] dans le cas des variétés de Shimura. Malheureusement les compactifications que nous allons utiliser dans cette article semblent trop partielles pour pouvoir produire une telle définition.

2. Compactification de Kato–Usui

L'article [KU00] construit des 'compactifications partielles' (à vrai dire en général bien loin d'être compactes) des espaces classifiants de structures de Hodge polarisées. Cette même construction vaut encore si l'on ajoute des données supplémentaires (actions). Nous allons appliquer cela à la variété de Griffiths–Schmid que nous considérons. Comme la construction donnée dans [KU00] s'exprime en termes de structures de Hodge, nous allons commencer par expliquer brièvement (en suivant [Del71]) comment Ω paramètre certaines structures de ce type. Cette description ne jouera dans la suite qu'un rôle assez auxiliaire.

2.1 Notons $W = F^3$, muni de la forme hermitienne H, et V le même espace après restriction des scalaires à $\mathbb{Q}$. Désignons par Ψ la forme alternée sur V obtenue comme l'opposée de la partie imaginaire de H. Alors il revient au même de parler du groupe unitaire (respectivement des similitudes unitaires) de (W, H), ou bien du groupe des éléments qui commutent à l'action de F et qui appartiennent au groupe symplectique (respectivement des similitudes symplectiques) de (V, Ψ).

L'application $w \otimes \lambda \to (w\lambda, w\bar{\lambda})$ identifie $V \otimes F$ à la somme $W \oplus \overline{W}$ de W et de son conjugué $\overline{W}$ (le même espace mais muni de l'action conjuguée de F). Avec cette identification la forme Ψ_F déduite de Ψ par extension des scalaires s'exprime comme il suit

$$\Psi_F(v_1 \oplus \bar{v}_2, w_1 \oplus \bar{w}_2) = \frac{i}{2}(H(v_1, \bar{w}_2) - H(w_1, \bar{v}_2)).$$

De même, on a $V_{\mathbb{R}}$, isomorphe à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$ dont le complexifié s'identifie à $W_{\mathbb{C}} \oplus \overline{W}_{\mathbb{C}}$. Choisissons une base (e_1, e_2, e_3) de $W_{\mathbb{C}}$, orthogonale et telle que $H(e_1) = H(e_2) = 1 = -H(e_3)$. Notons $\bar{e}_i$ les mêmes éléments e_i, mais vus dans $\overline{W}_{\mathbb{C}}$, de sorte que l'on a

$$\Psi_F(e_i, \bar{e}_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$
$$\Psi_F(e_1, \bar{e}_1) = \Psi_F(e_2, \bar{e}_2) = 1, \quad \Psi_F(e_3, \bar{e}_3) = -1.$$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ considérons alors la similitude unitaire $h(z)$ de $W_{\mathbb{C}}$ dont la matrice dans cette base s'écrit $\operatorname{diag}(z^{-p_1}\bar{z}^{-q_1}, z^{-p_2}\bar{z}^{-q_2}, z^{-p_3}\bar{z}^{-q_3})$, avec six entiers qui vérifient

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = p_3 + q_3 = w = -1$$
$$-p_1 + q_1 \equiv -p_2 + q_2 \equiv 1 \mod 4 \quad \text{et} \quad -p_3 + q_3 \equiv -1 \mod 4,$$

cette seconde condition signifiant que $h(i) = \operatorname{diag}(i, i, -i)$ définit une involution de Cartan ;

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

elle entraîne d'autre part, compte tenu de la première, le fait que p_1 et p_2 sont pairs et p_3 impair (d'où q_1 et q_2 impairs, q_3 pair). De plus, on a alors le fait que $\Psi(x, h(i)y)$ est une forme symétrique définie positive sur $V_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{C}}$. Finalement, prenant le F^0 de la structure de Hodge définie par h sur l'algèbre de Lie complexifiée de G, on trouve une sous-algèbre parabolique qui coïncide avec l'algèbre de Lie du sous-groupe de Borel noté B dans [Car98, § 3.1] si et seulement si la condition suivante est satisfaite : $p_1 > p_3 > p_2$.

Il y a de nombreux choix possibles de tels entiers, donnant lieu à des types différents de structures de Hodge (suivant la position relative des p_i et des q_j) mais aboutissant finalement à la même compactification. Prenons pour fixer les idées $p_2 = q_3 = -1$; $q_2 = p_3 = 0$; $p_1 = 1$; $q_1 = -2$. Dans ce cas la structure de Hodge associée à h est donnée par :

$$V^{1,-2} = \langle e_1 \rangle, \quad V^{-1,0} = \langle e_2, \bar{e}_3 \rangle, \quad V^{-2,1} = \langle \bar{e}_1 \rangle, \quad V^{0,-1} = \langle e_3, \bar{e}_2 \rangle.$$

D'autre part le Drapeau (p, L) correspondant à h, c'est-à-dire celui fixé par B, est donné par : $p = \langle e_1 \rangle$ et $L = \langle e_1, e_3 \rangle$. La filtration de Hodge sur V associée est donnée par

$$\mathrm{F}^0 = \{0\} \ ; \quad \mathrm{F}^1 = \langle e_1 \rangle \ ; \quad \mathrm{F}^0 = \langle e_1, e_3, \bar{e}_2 \rangle \ ; \quad \mathrm{F}^{-1} = \langle e_1, e_2, e_3, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle \ ; \quad \mathrm{F}^{-2} = V.$$

Autrement dit on obtient comme filtration

$$\mathrm{F}^1 = p \subset \mathrm{F}^0 = L \oplus L^{\perp} \subset \mathrm{F}^{-1} = W_{\mathbb{C}} \oplus p^{\perp}$$

(nous avons dénoté ici, un peu abusivement, par les mêmes notations le point p (respectivement la droite L) et les sous-espaces vectoriels de $W_{\mathbb{C}}$ correspondants).

Prenant les conjugués de h, lesquels correspondent aux différents points de Ω, on obtient des structures de Hodge du type précédent. Ainsi Ω classifie de telles structures (polarisées, munies d'une action de F). A chaque $(p, L) \in \Omega$ correspond une structure de Hodge, telle que la filtration de Hodge associée reste donnée par les mêmes expressions que ci-dessus.

2.2 Données combinatoires

L'ingrédient de base de la construction de [KU00] consiste en la donnée d'un éventail Σ constitué de cônes σ dans l'algèbre de Lie sur $\mathbb{Q}$ de G. Chacun de ces cônes doit être engendré par des éléments nilpotents commutant entre eux. A une conjugaison près on voit que l'on peut se ramener à supposer qu'un tel cône est contenu dans la sous-algèbre, constituée des matrices triangulaires supérieures

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ \ \beta + \bar{\beta} = 0 \right\}$$

et associée au sous-groupe

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ \ \beta + \bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha} \right\}.$$

Pour chaque tel cône σ on ajoute comme composante frontière l'ensemble constitué des orbites σ-nilpotentes : ce sont les $\exp(\sigma_{\mathbb{C}})$-orbites $\exp(\sigma_{\mathbb{C}})(X)$ dans la variété de drapeaux $\check{\Omega}$ qui vérifient une condition de transversalité de Griffiths et une condition de positivité. La condition de positivité exprime le fait que, pour N_j des éléments du cône σ et pour des réels Y_j tous assez grands, $\exp(\sum iY_jN_j)(X)$ appartient à Ω. Celle de transversalité est que, pour $N \in \sigma$ et la filtration du type Hodge qui continue à être associée aux points de $\check{\Omega}$, on ait $N\,\mathrm{F}^p \subset \mathrm{F}^{p-1}$. La relation explicitée ci-dessus entre drapeaux (p, L) et filtration de Hodge montre que cette condition est équivalente à : $Np \subset L$.

Remarquons que, si σ est un cône de dimension 2, engendré par deux éléments (non nuls, non proportionnels, commutant entre eux),

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors il n'y a aucune orbite σ-nilpotente. En effet si $X = (p, L)$ appartenait à une telle orbite, avec $p = (x \quad y \quad t)^\top$, on aurait $t \neq 0$ par la condition de positivité ; la condition de transversalité entraînerait que les points définis par

$$N_1 p = \begin{pmatrix} \alpha_1 y + \beta_1 t \\ \bar{\alpha}_1 t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 p = \begin{pmatrix} \alpha_2 y + \beta_2 t \\ \bar{\alpha}_2 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartiennent à la droite L. Comme ils appartiennent tous deux à la 'droite à l'infini' d'équation $t = 0$, ils sont donc confondus, ce qui s'écrit

$$(\alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \alpha_2) t y + (\bar{\alpha}_2 \beta_1 - \bar{\alpha}_1 \beta_2) t^2 = 0 \ ;$$

d'autre part la condition de commutation entre N_1 et N_2 est que $\alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \alpha_2 = 0$; il en résulte que $\bar{\alpha}_2 \beta_1 - \bar{\alpha}_1 \beta_2 = 0$, ce qui contredit la non-proportionalité de N_1 et N_2.

On peut donc se limiter à ne considérer que des cônes de dimension 1. Un tel cône est engendré par un élément nilpotent N. On normalisera dans la suite ce nilpotent comme dans [KU00], de telle sorte que $\exp(N)$ soit un générateur de $\Gamma(\sigma) = \exp(\sigma) \cap \Gamma$. De tels N sont de deux types possibles suivant leur ordre de nilpotence (2 ou 3). Les éléments nilpotents d'ordre 3 et qui appartiennent à $\mathcal{N}$ sont ceux de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$; ceux d'ordre 2 s'écrivent

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Nous allons déterminer pour chacun de ces types l'espace des orbites N-nilpotentes, c'est-à-dire la composante frontière qui lui correspond. Nous ne traitons le cas des nilpotents d'ordre 3 qu'à titre indicatif, car seules joueront un rôle dans la suite de l'article les composantes attachées aux nilpotents d'ordre 2.

(a) *Cas d'un nilpotent d'ordre 3.*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Faisant agir

$$\exp(iYN) = \begin{pmatrix} 1 & iY\alpha & -\dfrac{Y^2}{2}\alpha\bar{\alpha} + iY\beta \\ 0 & 1 & iY\bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

sur un drapeau $X = (p, L)$ avec $p = (x \quad y \quad t)^\top$ et $L = (u \quad v \quad w)$ on obtient le drapeau $X' = (p', L')$ avec

$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iY\alpha y - \dfrac{Y^2}{2}\alpha\bar{\alpha}t + iY\beta t \\ y + iY\bar{\alpha}t \\ t \end{pmatrix}$$

et $L' = (u' \quad v' \quad w') = (u \quad -iY\alpha u + v \quad -(Y^2/2)\alpha\bar{\alpha}u - iY\beta u - iY\bar{\alpha}v + w)$. La condition de positivité est que, pour Y réel assez grand, $y'\bar{y}' - 2\Re(x'\bar{t}')$ ainsi que $v'\bar{v}' - 2\Re(w'\bar{u}')$ soient tous deux > 0. D'autre part on doit avoir que

$$Np = \begin{pmatrix} \alpha y + \beta t \\ \bar{\alpha}t \\ 0 \end{pmatrix} \in L.$$

On en déduit que $t \neq 0$: sans quoi en effet, puisque L ne peut pas être la droite d'équation $t = 0$, on voit que p et Np seraient liés, ce qui entraîne $y = 0$ et conduit finalement à une contradiction avec la condition de positivité.

Si $t \neq 0$ la condition de positivité pour p' est satisfaite (Y grand). Celle pour L' l'est aussi : c'est clair si $v \neq 0$; sinon on remarque que $u \neq 0$: en effet, L, passant par Np, ne passe pas par le point $(1 \quad 0 \quad 0)^\top$.

En résumé on doit partir d'un drapeau (p, L) avec $p = (x \quad y \quad 1)^\top$ et L la droite joignant p à Np. La $\exp(\sigma_{\mathbb{C}})$-orbite correspondante se compose des éléments (p', L') avec p' donné par la même formule que ci-dessus (mais Y variant dans $\mathbb{C}$ tout entier) et L' la droite correspondante, joignant p' à Np'. Chaque orbite de ce type admet un unique représentant vérifiant $p' = (x \quad 0 \quad 1)^\top$, ce qui permet de paramétrer cet ensemble d'orbites par $x \in \mathbb{C}$. Version duale : on part de la droite $L = (1 \quad v \quad w)$ et p le point d'intersection de L et $LN = (0, \alpha, \beta + \bar{\alpha}v)$.

(b) *Cas d'un nilpotent d'ordre 2.* Si β_0 est le plus petit élément imaginaire, de partie imaginaire positive, tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

on peut supposer que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\exp(iYN) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm iY\beta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transforme $X = (p, L)$ en $X' = (p', L')$, donné par (avec les mêmes notations que ci-dessus)

$$x' = x \pm iY\beta_0 t, \quad y' = y, \quad t' = t \ ; \quad u' = u, \quad v' = v, \quad w' = \mp iY\beta_0 u + w.$$

La conditions de positivité correspondante signifie que pour Y réel assez grand

$$y\bar{y} - 2\Re(x\bar{t}) \mp 2iY\beta_0 t\bar{t} > 0 \quad \text{et} \quad v\bar{v} - 2\Re(w\bar{u}) \pm 2iY\beta_0 u\bar{u} > 0.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Cas (b+).

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la première des deux conditions précédentes est satisfaite si $t \neq 0$ ou si $t = 0$ et $y \neq 0$, tandis que la seconde l'est si et seulement si $u = 0$ et $v \neq 0$. Les conditions sont donc équivalentes à ce que la droite L passe par le point $p_\infty = (1 \quad 0 \quad 0)^\top$ (ce qui entraîne la condition $Np(= p_\infty) \in L$) et soit distincte de la droite $L_\infty = (0 \quad 0 \quad 1)$, et que p soit un point de cette droite L distinct de p_∞. La $\sigma_{\mathbb{C}}$-orbite correspondante se décrit ainsi : L est fixe et p varie sur $L \setminus \{p_\infty\}$. Remarquer que l'on a finalement que $t \neq 0$.

Cas (b−).

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant la première condition entraîne $t = 0$ et $y \neq 0$: p varie sur L_∞ privée de p_∞, et L est une droite passant par p et distincte, en vertu de la seconde condition, de L_∞. L'orbite correspondante est telle que p est fixe et L varie en passant par p et en restant distincte de L_∞.

Remarquer que l'on a sur Ω et ses quotients une involution anti-holomorphe provenant de la forme hermitienne. Cette involution préserve l'ensemble des orbites du type (a) et échange celles de type (b+) et (b−).

2.4 Compactification de [KU00]

Pour chaque cône σ, on ajoute comme composante frontière l'ensemble des orbites σ-nilpotentes, quotienté par le stabilisateur dans Γ de σ. Il est plus difficile de voir comment recoller cette composante à la variété $\Gamma \setminus \Omega$. Dans le cas d'un cône de dimension 1 engendré par un élément N, on introduit dans ce but l'espace :

$$E_\sigma = \left\{ (\theta, X) \in \mathbb{C} \times \check{\Omega} \;\middle|\; \begin{cases} \text{si } \theta \neq 0, \ \exp((\log(\theta)/2\pi i)N)X \in \Omega \ ; \\ \text{si } \theta = 0, \ \exp(\sigma_{\mathbb{C}})X \text{ est une orbite } \sigma\text{-nilpotente.} \end{cases} \right\}$$

On obtient ensuite $\Gamma_\sigma^{\mathrm{grp}} \setminus \Omega_\sigma$, quotient de Ω auquel on a accolé la composante frontière associée à σ par le groupe engendré par $\Gamma(\sigma)$, comme le quotient de E_σ par l'action de $\mathbb{C}$ donnée par

$$\lambda.(\theta, X) = (\exp(2\pi i \lambda)\theta, \exp(-\lambda N)X).$$

Il ne reste plus alors qu'à quotienter l'espace ainsi obtenu par le stabilisateur dans Γ de σ, et ce quotient décrit un voisinage de la composante frontière considérée.

Mettons en pratique cette construction dans chacun des cas considérés.

Cas (a). On peut supposer pour fixer les idées et simplifier les notations que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors E_σ se compose des triplets (θ, p, L) avec $p = (x \quad y \quad t)^\top$ et $L = (u \quad v \quad w)$ qui vérifient les conditions suivantes, où l'on a posé $q = \log(\theta)/2\pi$:

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

– si $\theta \neq 0$, alors

$$|y - iqt|^2 - 2\Re\left(\left(x - iqy - \frac{q^2}{2}t\right)\bar{t}\right) > 0$$
$$\text{et} \quad |v + iqu|^2 - 2\Re\left(\left(w + iqv - \frac{q^2}{2}u\right)\bar{u}\right) > 0\ ;$$

– si $\theta = 0$, alors $t \neq 0$ et L est la droite joignant p à $Np = (y \quad t \quad 0)^\top$.

L'action de $\lambda \in \mathbb{C}$ est donnée par

$$\lambda.(\theta, (p, L)) = (\exp(2\pi i\lambda)\theta, (p', L'))$$

avec

$$p' = \begin{pmatrix} x - \lambda y + \dfrac{\lambda^2}{2}t \\ y - \lambda t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L' = \begin{pmatrix} u & \lambda u + v & \dfrac{\lambda^2}{2}u + \lambda v + w \end{pmatrix}.$$

Comme on cherche à décrire un voisinage de la composante frontière on peut se placer dans l'ouvert E'_σ de E_σ constitué des points tels que $t \neq 0$, lequel est stable par l'action de $\mathbb{C}$. Dans cet ouvert, l'ensemble des points pour lesquels $y = 0$ constitue un ensemble de représentants transverse aux orbites (un 'slice'), de sorte qu'on peut décrire un voisinage de la composante frontière comme l'ensemble des points $(\theta, (x \quad 0 \quad 1)^\top, (u \quad v \quad -ux))$ qui vérifient les conditions ci-dessus. En particulier, pour $\theta = 0$ on doit avoir $v = 0$ et par suite $u \neq 0$. De sorte que l'on peut se restreindre un peu plus, et se placer dans l'ouvert où $u \neq 0$. Notre nouveau voisinage est l'ensemble des $(\theta, (x \quad 0 \quad 1)^\top, (1 \quad v \quad -x))$, pour lequel les conditions précédentes se récrivent :

– si $\theta \neq 0$, alors

$$2(\Re(q))^2 - 2\Re(x) > 0 \text{ et } 2(\Re(q))^2 + |v|^2 + 2\Re(x) + 4\Re(q)\Im(v) > 0;$$

– si $\theta = 0$, alors $v = 0$.

Au voisinage de $\theta = 0$ les inégalités précédentes sont automatiquement satisfaites ($\Re(q)$ tend vers $-\infty$), de sorte qu'un voisinage de cette composante frontière peut se décrire localement comme la droite $\{(0, x, 0)\}$ ajoutée à l'ensemble des $\{(\theta, x, v) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}\}$. Il reste ensuite à passer au quotient par le stabilisateur dans Γ de notre cône σ. On voit que ce stabilisateur est constitué (en supposant Γ assez petit) des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 & \alpha' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha' \in \mathbb{Z}$ et β' entier de F vérifiant $\beta' + \bar{\beta}' = (\alpha')^2$, ces deux éléments étant soumis à des conditions de congruence. On vérifie qu'une telle matrice envoie (θ, x, v) sur $(\theta, x + i\Im(\beta'), v)$. En particulier la composante frontière ajoutée s'identifie au quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau de $i\mathbb{R}$, et donc à une copie de $\mathbb{C}^*$.

Cas (b).

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Dans ce cas la condition lorsque $\theta \neq 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} &|y|^2 - 2\Re(x\bar{t}) \pm 2(\Re(q))i\beta_0|t|^2 > 0 \\ \text{et} \quad &|v|^2 - 2\Re(w\bar{u}) \mp 2(\Re(q))i\beta_0|u|^2 > 0. \end{aligned}$$

L'action de $\lambda \in \mathbb{C}$ envoie $(\theta,(p,L))$ sur $(\exp(2\pi i\lambda)\theta,(p',L'))$ avec

$$p' = \begin{pmatrix} x \mp \lambda\beta_0 t \\ y \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L' = (u \quad v \quad \pm\lambda\beta_0 u + w).$$

Cas $(b+)$. On a explicité ci-dessus la condition que l'on a pour $\theta = 0$: en particulier, on a alors $t \neq 0$ et $v \neq 0$. On peut se placer dans un voisinage E'_σ de la composante frontière où ces conditions sont encore remplies. Ce voisinage est stable par l'action de $\mathbb{C}$. On obtient un système de représentants transverse aux orbites dans E'_σ en faisant : $x = 0$; d'autre part, on peut prendre $t = 1$ et $v = 1$, et donc $w = -y$. Dans E'_σ la première moitié des conditions relatives au cas $\theta \neq 0$ est automatique dès que θ est assez petit. Il en résulte que l'on peut décrire localement un voisinage de la composante frontière $\{(\theta,y,u) = (0,y,0)\}$ en ajoutant à cette dernière l'ensemble des (θ,y,u) qui vérifient l'inégalité

$$1 + 2\Re(\bar{y}u) - 2(\Re(q))i\beta_0|u|^2 > 0$$

ou, si l'on préfère,

$$\log|\theta| > \pi\frac{1 + 2\Re(\bar{y}u)}{i\beta_0|u|^2}.$$

On doit ensuite passer au quotient par $\Gamma \cap V$. Une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(avec $\beta + \bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}$) envoie (θ,y,u) sur le point (θ,p',L') où $p' = (\alpha y + \beta \quad y + \bar{\alpha} \quad 1)^\top$ et $L' = (u \quad 1 - \alpha u \quad u\bar{\beta} - \bar{\alpha} - y)$ et ce dernier est équivalent par l'action de

$$\lambda = \frac{1}{\beta_0}(\alpha y + \beta) \quad \text{à} \quad \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{\beta_0}(\alpha y + \beta)\right)\theta, p'', L''\right)$$

avec $p'' = (0 \quad y + \bar{\alpha} \quad 1)^\top$ et

$$L'' = (u \quad 1 - \alpha u \quad \alpha y u + \beta u + u\bar{\beta} - \bar{\alpha} - y) = (1 - \alpha u)\left(\frac{u}{1 - \alpha u} \quad 1 \quad -\bar{\alpha} - y\right).$$

En définitive (θ,y,u) est envoyé sur

$$\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{\beta_0}(\alpha y + \beta)\right)\theta, y + \bar{\alpha}, \frac{u}{1 - \alpha u}\right).$$

En particulier, la composante frontière est $\mathbb{C}$ quotientée par un réseau (un ordre $\mathcal{R}$ de F plongé par $\alpha \to \bar{\alpha}$), et donc une courbe elliptique CM que nous noterons $\mathcal{E}$. Noter que le voisinage E_σ que nous avions choisi n'est pas stable sous $\Gamma \cap V$ (la condition $v \neq 0$ n'est pas conservée) ce qui explique le dénominateur dans la formule précédente (laquelle décrit néanmoins la structure locale au voisinage de notre composante frontière).

Cas $(b-)$. Dans ce cas, pour $\theta = 0$ on a $y \neq 0$ et $u \neq 0$ de sorte qu'on peut se placer dans le voisinage E'_σ défini par ces conditions. Alors un système transverse de représentants est constitué des points qui vérifient $w = 0$. On peut prendre $y = u = 1$, de sorte que $v = -x$. Cette fois c'est la seconde des deux inégalités qui est automatique pour θ assez petit. On décrit localement notre compactification partielle en ajoutant à la droite$(\theta, x, t) = (0, x, 0)$ l'ensemble des points défini par :

$$\log|\theta| > \pi \frac{1 - 2\Re(\bar{x}t)}{i\beta_0|t|^2}.$$

Maintenant l'action d'une matrice comme ci-dessus envoie notre point sur (θ, p', L') avec

$$p' = \begin{pmatrix} x + \alpha + \beta t \\ 1 + \bar{\alpha}t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L' = (1 \quad -x - \alpha \quad \bar{\beta} + \bar{\alpha}x)\ ;$$

faisant agir $\lambda = (\bar{\beta} + \bar{\alpha}x)/\beta_0$ on obtient en définitive le point associé à

$$\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{\beta_0}(\bar{\alpha}x + \bar{\beta})\right)\theta, x + \alpha, \frac{t}{1 + \bar{\alpha}t}\right).$$

La frontière est la courbe elliptique quotient par le même réseau que ci-dessus, mais plongé par $\alpha \to \alpha$, autrement dit la complexe conjuguée $\mathcal{E}'$ de la précédente.

2.5 Remarques

La structure des compactifications au voisinage des composantes de type (b) est compliquée ; en particulier un voisinage épointé d'un point-frontière n'est pas de Stein. Ceci en contraste avec les composantes du type (a) qui ont une structure beaucoup plus simple, comme expliqué ci-dessus.

Pour voir cela, par exemple dans le cas (b+), on peut se placer dans un voisinage du point de la courbe frontière image de $y = 0$ et considérer la section transverse définie par $y = 0$. C'est donc l'intersection d'un voisinage du point $(0, 0)$ avec l'ensemble constitué des (θ, u) qui vérifient

$$\log|\theta| > \pi \frac{1}{i\beta_0|u|^2}.$$

Posant $\Theta = \log\theta$ et $U = \log u$, on voit que l'inégalité précédente se récrit

$$\Re\Theta > \frac{\pi}{i\beta_0}\exp(-2\Re U).$$

L'ensemble des tels couples (Θ, U) constitue donc un domaine tube au dessus d'un ouvert concave de $\mathbb{R}^2$ (rappelons en effet que $i\beta_0$ est un réel négatif). Il n'est donc pas de Stein, non plus que l'ensemble des (θ, u) dont il constitue un revêtement. De même pour les voisinages de $(0, 0)$, dont en obtient les revêtements d'un système fondamental en tronquant par les conditions $\Theta < -A$ et $U < -A$ pour A un réel positif assez grand.

Il serait très intéressant de comprendre la cohomologie d'un tel voisinage. Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, cela permettrait d'associer des coefficients de Fourier–Jacobi aux classes de cohomologie de degré 2 et d'en déduire des renseignements arithmétiques nouveaux sur les formes modulaires du type de Maass. Faute d'une telle compréhension, nous allons dans la suite nous borner à définir de tels coefficients dans le cas des classes de degré 1, ce qui n'utilise que la partie la plus algébrique de la cohomologie.

3. Développements à la frontière des formes modulaires et des classes de cohomologie automorphe

3.1 Le cas classique : développement des formes modulaires de Picard

Pour simplifier, nous nous bornerons ici à ne considérer que les faisceaux $\mathcal{F}_{-k,0}$ sur $\Gamma\backslash\mathbf{X}$ (respectivement $\mathcal{F}_{0,-k}$ sur $\Gamma\setminus\mathbf{Y}$), qui proviennent des surfaces de Picard $\Gamma\backslash\Delta$ (respectivement $\Gamma\backslash\overline{\Delta}$). Nous ne considérerons de plus que des sections qui s'annulent aux pointes. De telles sections correspondent, comme on l'a déjà fait remarquer, à des 'formes de Picard paraboliques de poids k'.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Expliquons comment écrire le développement de Fourier–Shimura d'une telle forme ; les coefficients qui apparaissent sont des fonctions thêta, associées à certaines courbes elliptiques CM. Géométriquement, cela correspond au fait que les surfaces de Picard admettent des compactifications lisses, dont la frontière est composée de telles courbes : voir [Lar92] pour la construction d'un modèle arithmétique d'une telle compactification.

Nous suivrons ici le point de vue plus concret de Shimura [Shi76, Shi77]. On peut voir Δ comme l'ouvert du plan constitué des points $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ qui vérifient l'inégalité $2\Re(x) > |y|^2$. Nous allons définir le développement de Fourier de formes modulaires, en une pointe associée au parabolique normalisateur du sous-groupe V déjà considéré plus haut. Une forme de Picard s'identifie à une fonction $f(x, y)$ avec (x, y) les coordonnées d'un point de Δ, qui doit vérifier la loi de transformation habituelle, et en particulier être invariante sous le groupe $\Gamma \cap V$. Autrement dit, pour

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \cap V,$$

on doit avoir $f(x + \alpha y + \beta, y + \bar{\alpha}) = f(x, y)$.

Considérant le cas où $\alpha = 0$, et donc β imaginaire multiple de β_0, on voit que ce qui précède et la condition de cuspidalité entraînent que f admet un développement :

$$f(x, y) = \sum_{r \in \mathbb{N}^*} g_r(y) \exp\left(-\frac{2\pi i r}{\beta_0} x\right)$$

avec g_r satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$g_r(y + \bar{\alpha}) = g_r(y) \exp\left(\frac{2\pi r i}{\beta_0}(\alpha y + \beta)\right).$$

Il s'agit donc de fonctions thêta, associées à la courbe elliptique $\mathcal{E}$ déjà rencontrée plus haut. La relation ci-dessus définit un fibré en droites $\mathcal{L}_r$ sur $\mathcal{E}$ dont les g_r constituent des sections. Plus précisément on peut récrire la relation précédente sous la forme

$$g_r(y + \bar{\alpha}) = g_r(y) \chi(\bar{\alpha}) \exp\left(\frac{2\pi r i}{\beta_0}\left(\alpha y + \frac{1}{2}\alpha\bar{\alpha}\right)\right)$$

où le multiplicateur χ est défini par $\chi(\bar{\alpha}) = \exp(2\pi r i \Im\beta / \Im\beta_0)$ (en effet β est déterminé par α à un multiple entier près de β_0) ; $\chi(\bar{\alpha})$ est une racine de l'unité parce que $\Im\beta/\Im\beta_0$ est un rationnel.

De façon duale, on peut considérer des formes paraboliques dans $H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y}, \mathcal{F}_{0,b})$. Une telle forme f' ne dépend que de L, de coordonnées $(1, v, w)$, et satisfait à la loi de transformation : $f'(v - \alpha, w - \bar{\alpha}v + \bar{\beta}) = f'(v, w)$. Il en résulte qu'elle admet un développement :

$$f'(v, w) = \sum_{r \in \mathbb{N}^*} g'_r(v) \exp\left(-\frac{2\pi i r}{\beta_0} w\right)$$

où les g'_r satisfont à

$$g'_r(v + \alpha) = g'_r(v) \exp\left(2\frac{\pi r i}{\beta_0}(\bar{\alpha} v + \beta)\right)$$

autrement dit ce sont des fonctions thêta relatives à la courbe elliptique conjuguée $\mathcal{E}'$ et au faisceau conjugué $\mathcal{L}'_r$.

3.2 Développement de Fourier au voisinage de la frontière de Kato–Usui

Commençons par remarquer que les faisceaux $\mathcal{F}_{a,b}$ sont triviaux au voisinage des composantes frontières de type (b) : pour le type (b+) cela résulte du fait, déjà remarqué en (2.4), que dans un tel voisinage on peut supposer t et v non nuls, de sorte que $t^a v^b$ définit une section partout non

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

nulle de $\mathcal{F}_{a,b}$, et donc une trivialisation de ce faisceau. De même pour le type (b−) puisque l'on peut alors supposer y et u non nuls. La situation est d'ailleurs analogue au voisinage des composantes de type (a), mais nous n'utiliserons pas ces dernières dans la suite.

Considérons une composante du type (b+) et plaçons-nous sur le fermé du voisinage de cette composante où $u = 0$: les drapeaux (p, L) correspondants sont tels que L passe par le point p_∞. Un tel voisinage peut se décrire comme le quotient de l'ensemble des (θ, y) par l'action de $\Gamma \cap V$ telle qu'une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

envoie (θ, y) sur $(\exp((2\pi i/\beta_0)(\alpha y + \beta))\theta, y + \bar{\alpha})$.

Un tel quotient s'identifie donc à l'espace total, que nous noterons $\tilde{\mathcal{L}}_1$, du fibré $\mathcal{L}_1$ sur $\mathcal{E}$ considéré ci-dessus. Si $\omega \in H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,b})$ est une classe de cohomologie, on peut la restreidre à ce quotient (ou plus précisément à un voisinage épointé de la section nulle dans $\tilde{\mathcal{L}}_1$). Ensuite on définit un 'développement de Fourier' comme suit.

Notons $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{L}}_1$ le voisinage considéré, et $\mathcal{U}'$ le complémentaire de la section nulle $\mathcal{E}$. On peut prendre $\mathcal{U}$ assez petit de sorte que le faisceau $\mathcal{F}_{a,b}$ soit trivial sur $\mathcal{U}'$; nous le trivialisons comme expliqué ci-dessus. On peut ainsi voir la restriction de ω comme un élément de

$$H^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{U}, j_*(\mathcal{O}))$$

où j désigne l'inclusion de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{U}$ (noter que les $R^i j_*$ supérieurs sont nuls). La restriction à $\mathcal{E}$ nous fournit un élément de $H^1(\mathcal{E}, j_*(\mathcal{O})_{|\mathcal{E}})$.

Ensuite, étant donnée une section locale de $j_*(\mathcal{O})_{|\mathcal{E}}$, on peut écrire son développement de Laurent sur les fibres de la projection sur $\mathcal{E}$ (si l'on veut, en utilisant les notations de ci-dessus, c'est le développement en les puissances de θ) ; les coefficients de ce développement sont des sections locales des puissances du fibré dual. On obtient donc ainsi pour chaque entier $r \in \mathbb{Z}$ un morphisme de $j_*(\mathcal{O})_{|\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{L}_{-r}$, d'où une application de $H^1(\mathcal{E}, j_*(\mathcal{O})_{|\mathcal{E}})$ dans $H^1(\mathcal{E}, \mathcal{L}_{-r})$. Au bout du compte cette construction associe à une classe de cohomologie automorphe ω des 'coefficients' $\omega_r \in H^1(\mathcal{E}, \mathcal{L}_{-r})$ (nécessairement nuls si $r < 0$).

On définit de façon complètement analogue les coefficients de $\omega' \in H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{a,b})$ au voisinage d'une composante frontière de type (b−) : ce sont des éléments $\omega'_r \in H^1(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_{-r})$.

4. Des transformations cohomologiques au niveau des courbes elliptiques

Nous allons maintenant définir des transformations cohomologiques entre les courbes elliptiques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Plus précisément, nous allons définir des applications linéaires (en fait bijectives) $\eta' : H^0(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_r) \to H^1(\mathcal{E}, \mathcal{L}_{-r})$ et $\eta \ : H^0(\mathcal{E}, \mathcal{L}_r) \to H^1(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_{-r})$. Leur construction est analogue à celle des transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, que nous avions rappelée au début de cet article.

4.1 Commençons par introduire l'espace

$$\mathbf{W} = \mathcal{R} \setminus \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

où $\mathcal{R}$ est le réseau qui définit les courbes elliptiques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, opérant par $\alpha \to \bar{\alpha}$ sur le premier facteur $\mathbb{C}$ et par $\alpha \to -\alpha$ son sur le second. Cet espace $\mathbf{W}$ se projette sur $\mathcal{E}$ (premier facteur) et sur $\mathcal{E}'$ (second facteur). Nous noterons π_1 et π_2 ces deux projections.

Proposition 2. *L'espace* $\mathbf{W}$ *est de Stein.*

Preuve. On construit comme suit des fonctions holomorphes sur $\mathbf{W}$: partant de deux fonctions thêta f et f' relatives à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ respectivement

$$f(z+\bar{\alpha}) = f(z)\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}(\alpha z+\beta)\right),$$
$$\text{et}\quad f'(z'-\alpha) = f'(z')\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}(-\bar{\alpha}z'+\beta)\right),$$

on voit alors que la fonction $g(z,z') = f(z)f'(z')\exp((2\pi ir/\beta_0)zz')$ est invariante sous $\mathcal{R}$ et définit donc une fonction sur $\mathbf{W}$. De telles fonctions séparent les points de $\mathbf{W}$ (cela résulte du fait que pour r assez grand les fonctions thêta produisent des plongements projectifs).

Il reste à voir que $\mathbf{W}$ est holomorphiquement convexe. Donnons-nous une suite sans valeur d'adhérence d'éléments de $\mathbf{W}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer des représentants (z_n, z'_n) choisis tels que z_n converge vers $z \in \mathbb{C}$. Puis (extrayant peut-être encore une suite) que $z'_n = z''_n - \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathcal{R}$ et z''_n convergeant vers z''.

Il reste alors à choisir des fonctions thêta f (respectivement f') comme ci-dessus et ne s'annulant pas en z (respectivement z''). Alors

$$g(z_n,z'_n) = f(z_n)f'(z''_n)\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}z_nz''_n\right)\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}(-\alpha_nz_n - \bar{\alpha}_nz''_n + \bar{\beta}_n)\right),$$

et on voit que cette expression n'est pas bornée : en effet la suite α_n n'est pas bornée et $\Re\beta_n = \frac{1}{2}|\alpha_n|^2$, d'où il résulte que la dernière exponentielle de l'expression ci-desssus n'est pas bornée (rappelons que $2\pi ir/\beta_0$ est un réel > 0). □

4.2 Nous allons maintenant définir les transformations η et η' en termes de la théorie de Eastwood–Gindikin–Wong (cf. § 1). Partons d'un élément $\phi' \in H^0(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_r)$, autrement dit d'une fonction thêta comme plus haut. La fonction $h(z,z') = \phi'(z')\exp((2\pi ir/\beta_0)zz')$ vérifie alors l'équation fonctionnelle

$$h(z+\bar{\alpha}, z'-\alpha) = h(z,z')\exp\left(-\frac{2\pi ir}{\beta_0}(\alpha z+\beta)\right),$$

c'est donc une section sur $\mathbf{W}$ de l'image réciproque par π_1 du faisceau $\mathcal{L}_{-r}$. L'expression

$$\eta'(\phi') = \phi'(z')\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}zz'\right)\,dz'$$

définit alors une forme différentielle relative (à la projection π_1) à valeurs dans $\pi_1^*\mathcal{L}_{-r}$ et donc l'élément cherché de $H^1(\mathcal{E}, \mathcal{L}_{-r})$.

On définit η de manière similaire,

$$\eta(\phi) = \phi(z)\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}zz'\right)\,dz.$$

4.3 Exprimons ces transformations en termes de cohomologie de Dolbeault. Ceci est analogue à ce que nous avions rappelé plus haut (remarque à la fin du § 1) concernant les transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Le moyen d'effectuer cette traduction est expliqué dans [EGW95, EGW96, Gin93] : pour obtenir un représentant de la classe de cohomologie de Dolbeault associée à $\eta'(\phi')$, on doit commencer par étendre cette dernière en une forme différentielle absolue sur $\mathbf{W}$; puis prendre l'image réciproque de cette extension par s, une section C^∞ de la projection de $\mathbf{W}$ sur $\mathcal{E}$. Enfin, on prend la partie de type $(0,1)$ de cette image réciproque.

Dans notre cas une section est donnée par $s(z) = (z, -\bar{z})$; si l'on prend la partie de type $(0,1)$ du pull-back par s de la forme différentielle $\phi'(z')\exp((2\pi ir/\beta_0)zz')\,dz'$, on obtient l'expression de

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

notre élément comme une classe de cohomologie de Dolbeault :

$$\eta'_{\mathcal{D}}(\phi') = -\phi'(-\bar{z}) \exp\left(-\frac{2\pi i r}{\beta_0} z\bar{z}\right) d\bar{z}.$$

De façon analogue $\eta(\phi)$ s'exprime en cohomologie de Dolbeault :

$$\eta_{\mathcal{D}}(\phi) = -\phi(-\bar{z}') \exp\left(-\frac{2\pi i r}{\beta_0} z'\bar{z}'\right) d\bar{z}'.$$

4.4 La formule

$$\langle \phi'_1, \phi'_2 \rangle = \int_{\mathcal{E}'} \phi'_1(z')\overline{\phi'_2(z')} \exp\left(-\frac{2\pi i r}{\beta_0}|z'|^2\right) |dz' \wedge \overline{dz'}|$$

définit un produit scalaire hermitien sur $H^0(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_r)$, associé à une métrique sur le fibré $\mathcal{L}'_r$. Cette métrique est d'ailleurs essentiellement canonique (i.e. à une constante de normalisation près) : elle est caractérisée, à multiplication près par un scalaire, par le fait d'être hermitienne et à courbure parallèle. D'autre part, on a une bijection antilinéaire de $H^0(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_r)$ sur $H^0(\mathcal{E}, \mathcal{L}_r)$ qui associe à ϕ' la section $\check{\phi}'$ définie par $\check{\phi}'(z) = -\overline{\phi'(-\bar{z})}$. On a finalement la dualité de Serre $(\cdot,\cdot)$ entre $H^0(\mathcal{E}, \mathcal{L}_r)$ et $H^1(\mathcal{E}, \mathcal{L}_{-r})$, donnée en cohomologie de Dolbeault par l'intégrale sur $\mathcal{E}$ du produit. Il résulte des formules ci-dessus que pour ϕ'_1 et $\phi'_2 \in H^0(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_r)$ on a

$$\langle \phi'_1, \phi'_2 \rangle = (\eta'_{\mathcal{D}}(\phi'_1), \check{\phi}'_2),$$

ce qui exprime l'application η' comme une certaine composée entre dualité de Serre, dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et application $\phi' \to \check{\phi}'$. En particulier η' est une bijection entre $H^0(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_r)$ et $H^1(\mathcal{E}, \mathcal{L}_{-r})$. De même bien sûr pour η.

4.5 Les courbes $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ ainsi que les faisceaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont définis sur l'extension abélienne maximale $F^{ab} \subset \mathbb{C}$ de F. Notre objectif est de prouver qu'il en est de même des transformations η et η'.

THÉORÈME 1. *A multiplication près par un scalaire indépendant de r, les transformations η et η' sont définies sur F^{ab} (autrement dit transforment sections rationnelles sur ce corps en classes de cohomologie rationnelles).*

Preuve. D'après ce qu'on a dit plus haut (4.4), il suffit de voir que le produit scalaire hermitien sur $H^0(\mathcal{E}', \mathcal{L}'_r)$ défini par la formule ci-dessus, de même que son analogue sur $H^0(\mathcal{E}, \mathcal{L}_r)$,

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{\mathcal{E}} \phi_1(z)\overline{\phi_2(z)} \exp\left(-\frac{2\pi i r}{\beta}|z|^2\right) |dz \wedge \overline{dz}|$$

est *rationnel* sur F^{ab} à une constante multiplicative c près, c'est-à-dire que si ϕ_1 et ϕ_2 sont définis sur F^{ab} alors il en est de même de $c\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$.

On utilise dans ce but l'article [Shi76] qui explicite une base de telles sections rationnelles sur F^{ab} en termes de fonctions thêta classiques. On peut alors explicitement calculer les produits scalaires de ces éléments, dont on trouve qu'ils constituent une base orthogonale. Un tel calcul se trouve d'ailleurs dans Siegel [Sie63]. Tout cela vaut d'ailleurs plus généralement pour des variétés abéliennes CM.

Notons (ω_1, ω_2) une base du réseau $\mathcal{R}$ choisie de telle sorte que $z = \omega_1/\omega_2$ soit de partie imaginaire > 0. Posons $\lambda = ir/\beta_0$. Alors les fonctions thêta que nous considérons sont celles étudiées dans *loc. cit.* avec $H(x,y) = 2\lambda\bar{x}y$ (à ne pas confondre bien sûr avec la forme hermitienne du §1 qui définit G) et $\Psi(a) = \exp(2\pi r i \Im b/\Im\beta_0)$ (une racine de l'unité). Les notations de Shimura s'écrivent dans notre cas particulier : $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\epsilon = 1$ et enfin

$$\mu = E(\omega_2, \omega_1) = 2\lambda\Im(\bar{\omega}_2\omega_1) = 2\lambda|\omega_2|^2\Im z.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Les fonctions thêta sont données par

$$\theta(u,z\,;\rho,s)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i(n+\rho)^2z)\exp(2\pi i(n+\rho)(u+s)),$$

où $u\in\mathbb{C}$ et où ρ et s sont des paramètres réels (en fait dans $\mathbb{Q}$) qui doivent être choisis de telle sorte que $\psi(\omega_1\alpha_1+\omega_2\alpha_2)=\exp(\pi i\alpha_1\alpha_2+\mu\rho\alpha_2-s\alpha_1)$. Le rationnel s est défini à un entier près, et ρ à un élément près de $\mu^{-1}\mathbb{Z}$.

On pose ensuite $\phi(u,z\,;\rho,s)=\exp((\pi/2\Im z)u^2)\theta(u,z\,;\rho,s)$ et on définit enfin des sections de $\mathcal{L}_r$ par la formule

$$f_{\rho,s}(u)=\phi(\mu\omega_2^{-1}u,\mu\omega_2^{-1}\omega_1\,;\rho,s)=\exp\left(\frac{\pi}{2\Im z}\mu\omega_2^{-2}u^2\right)\theta(\mu\omega_2^{-1}u,\mu z\,;\rho,s)\ ;$$

soit encore, avec $\zeta=\omega_2/|\omega_2|$,

$$f_{\rho,s}(u)=\exp(\pi\lambda\zeta^{-2}u^2)\theta(\mu\omega_2^{-1}u,\mu z\,;\rho,s).$$

Un des résultats de l'article précité est le suivant : pour ρ,s fixés et j variant dans un système de représentants des classes de $\mu^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, les fonctions $f_{\rho+j,s}(u)$ constituent une base de $H^0(\mathcal{E},\mathcal{L}_r)$ sur $\mathbb{C}$. D'autre part on obtient une base de sections rationnelles sur F^{ab} en prenant les fonctions $f'_{\rho+j,s}(u)=h(z)^{-1}f_{\rho+j,s}(u)$ pour h une quelconque forme modulaire de poids demi-entier algébrique sur $\mathbb{Q}^{ab}$.

On voit que les produits scalaires $\langle f_{\rho_1,s}f_{\rho_2,s}\rangle$ sont donnés par les intégrales

$$\int_{\mathcal{E}}\exp(-4\pi\lambda(\Im(\zeta^{-1}u)))^2\theta(\mu\omega_2^{-1}u,\mu z\,;\rho_1,s)\overline{\theta(\mu\omega_2^{-1}u,\mu z\,;\rho_2,s)}\,|du\wedge\overline{du}|.$$

On calcule ces dernières en remplaçant les fonctions thêta par la somme qui les définit et en intégrant sur un rectangle fondamental (de sommets $0,\omega_1,\omega_2,\omega_1+\omega_2$) chacun des produits qui apparaissent. Autrement dit on doit intégrer

$$\begin{aligned}&\exp(2\pi i(n_1+\rho_1)(\mu\omega_2^{-1}u+s)-2\pi i(n_2+\rho_2)(\mu\bar\omega_2^{-1}\bar u+s)-4\pi\lambda|\omega_2|^2(\Im(\omega_2^{-1}u))^2)\\&\quad=\exp(2\pi i(n_1+\rho_1-n_2-\rho_2)\mu\Re(\omega_2^{-1}u)-2\pi(n_1+\rho_1+n_2+\rho_2)\mu\Im(\omega_2^{-1}u)-4\pi\lambda|\omega_2|^2(\Im(\omega_2^{-1}u))^2).\end{aligned}$$

On peut commencer cette intégration avec $\Im(\omega_2^{-1}u)$ constant et la partie réelle variant de 0 à 1 ; les intégrales ci-dessus sont alors nulles sauf si $n_1+\rho_1-n_2-\rho_2=0$. Ceci n'est possible que pour $\rho_1\equiv\rho_2 \bmod \mathbb{Z}$, et donc dans notre cas on voit que les fonctions que nous considérons sont orthogonales deux à deux.

Il reste à calculer $\langle f_{\rho,s}f_{\rho,s}\rangle$. C'est la somme de la série dont le terme de rang n est le produit par $\exp(-2\pi(n+\rho)^2\mu\Im z)$ de l'ntégrale sur le rectangle fondamental de $\exp(-4\pi(n+\rho)\Im(\omega_2^{-1}u)-4\pi\lambda|\omega_2|^2(\Im(\omega_2^{-1}u))^2)$. On doit donc calculer la somme des intégrales des fonctions

$$\exp(-2\pi(n+\rho)^2\mu\Im z-4\pi(n+\rho)\mu\Im(\omega_2^{-1}u)-4\pi\lambda|\omega_2|^2(\Im(\omega_2^{-1}u))^2).$$

Soit, compte tenu du fait que $\mu\Im z=2\lambda|\omega_2|^2(\Im z)^2$, la somme des intégrales des $\exp(-4\pi\lambda|\omega_2|^2((n+\rho)\Im z+\Im(\omega_2^{-1}u))^2)$.

Prenons pour fixer les idées la mesure usuelle sur $\mathbb{C}$. Le changement de variable $v=\omega_2^{-1}u$ transforme notre rectangle en celui de sommets 0, 1, z, $1+z$, et nous devons donc intégrer sur ce dernier les fonctions $|\omega_2|^2\exp(-4\pi\lambda|\omega_2|^2((n+\rho)\Im z+\Im(v))^2)$. Comme cette fonction ne dépend que de $y=\Im u$, on doit donc calculer la somme des $|\omega_2|^2\int_0^{\Im z}\exp(-4\pi\lambda|\omega_2|^2((n+\rho)\Im z+y)^2)dy$. On voit alors finalement que l'on a

$$\langle f_{\rho,s}f_{\rho,s}\rangle=|\omega_2|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-4\pi\lambda|\omega_2|^2y^2)\,dy.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

On obtient donc le résultat suivant :

$$\langle f_{\rho,s} f_{\rho,s}\rangle = \frac{|\omega_2|}{2\sqrt{\lambda}}$$

et donc

$$\langle f'_{\rho,s} f'_{\rho,s}\rangle = \frac{|\omega_2|}{2|h(z)^2|\sqrt{\lambda}}\ ;$$

ces produits scalaires sont donc bien rationnels sur F^{ab} à la constante près $c = |h(z)^2/\omega_2|$. □

5. Relations entre les transformations $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \eta, \eta'$

Théorème 2. *Soit f' une forme modulaire parabolique de poids $k \geqslant 2$ sur $\Gamma\backslash\overline{\Delta}$ et soit $\omega' = \mathcal{P}'(f') \in H^1(\Gamma \setminus \Omega, \mathcal{F}_{-k+1,k-2})$ la classe de cohomologie automorphe correspondante. Alors les coefficients du développement de ω' au voisinage de la composante frontière du type (b−) sont nuls, tandis qu'en celle du type (b+) ces coefficients sont donnés en fonction des coefficients g'_r de f' par : $\omega'_r = -\eta'(g'_r)$ pour $r \geqslant 1$, et $\omega'_r = 0$ pour $r \leqslant 0$.*

De même pour f une telle forme sur $\Gamma\backslash\Delta$, les coefficients de $\omega = \mathcal{P}(f)$ sont donnés par $\omega_r = -\eta(g_r)$ ($r \geqslant 1$) et 0 si $r \leqslant 0$ au voisinage de la composante de type (b−) ; ils sont nuls au voisinage de celle de type (b+).

Preuve. (i) Rappelons en quelques mots la construction de [EGW95, EGW96, Gin93] ; soit $\pi : X \to M$ une fibration holomorphe entre variétés complexes, à fibres contractiles et dont l'espace total est de Stein. Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur M. Alors on a un isomorphisme entre la cohomologie $H^*(M, \mathcal{O}(\mathcal{F}))$ et la cohomologie du complexe $\Gamma(X, \Omega^*_\pi(\mathcal{F}))$, où $\Omega^*_\pi(\mathcal{F})$ désigne le faisceau des formes différentielles π-relatives à valeurs dans $\mathcal{F}$. Cet isomorphisme s'obtient ainsi : on considère le faisceau $\pi^*\mathcal{O}(\mathcal{F})$ image réciproque de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Parce que les fibres de π sont contractiles, on a : $H^*(M, \mathcal{O}(\mathcal{F})) \simeq H^*(X, \pi^*\mathcal{O}(\mathcal{F}))$. D'autre part le complexe de de Rham relatif est une résolution du faisceau $\pi^*\mathcal{O}(\mathcal{F})$, et cette résolution est acyclique parce que l'espace total est de Stein. D'où un isomorphisme entre $H^*(X, \pi^*\mathcal{O}(\mathcal{F}))$ et $H^*(\Gamma(X, \Omega^*_\pi(\mathcal{F})))$.

On voit facilement que cette construction est fonctorielle au sens suivant : pour $M' \to M$ et η une classe de cohomologie associée à une forme différentielle ω, sa restriction à M' est donnée par la restriction de ω au produit fibré $X' = M' \times_M X$ pourvu que ce dernier soit de Stein. C'est le cas en particulier pour M' un sous-espace fermé de M.

De même, si une classe de cohomologie est associée à ω sur X et si $X' \subset X$ est une sous-variété, encore de Stein, et telle que la restriction de π soit encore une fibration sur M à fibres contractiles, alors la même classe est définie par la restriction de ω à X'.

(ii) Nous appliquerons ces considérations à $\mathcal{P}'(f')$, qui est définie par la forme différentielle $f'(z \wedge \xi)l(\xi)^k\omega_J$ sur l'espace $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ (cf. § 1 ; on tient compte ici du fait que $a = 0$). En fait nous commencerons par prendre le pull-back de cette forme sur l'espace quotient $\Gamma \cap V \setminus \mathbf{U}$: ceci définit le pull-back sur $\Gamma \cap V \setminus \Omega$ de notre classe de cohomologie ; noter que $\Gamma \cap V \setminus \mathbf{U}$ est de Stein : cela résulte de ce qu'il est un revêtement de l'espace de Stein $\Gamma \setminus \mathbf{U}$ (on peut aussi démontrer cela de façon plus explicite).

Notons $\mathbf{U}^-$ sous-ensemble fermé de $\mathbf{U}$ constitué des couples de drapeaux $(z, l; \xi\alpha)$ dans $\mathbf{U}$ tels que $z \in D_\infty$ et que α passe par p_∞. Le quotient $\Gamma \cap V \setminus \mathbf{U}^-$, fermé dans $\Gamma \cap V \setminus \mathbf{U}$, est encore de Stein. Il se projette sur le sous ensemble fermé de $\Gamma \cap V \setminus \Omega$, que nous noterons S^- et qui est constitué des drapeaux qui vérifient la condition supplémentaire $z \in D_\infty$. Le développement en une composante de type (b−) se calcule à partir de la restriction à S^- de la classe de cohomologie ω.

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

On voit que les fibres de la projection de $\Gamma\cap V\setminus\mathbf{U}^-$ sur S^- sur sont encore contractiles. Par suite la restriction de notre classe de cohomologie est donnée par la restriction de la forme différentielle correspondante à $\Gamma\cap V\setminus\mathbf{U}^-$.

De façon duale on considère $\mathbf{U}^+$, formé des drapeaux tels que l passe par p_∞ et que $\xi\in D_\infty$. C'est un revêtement de sous-espace $S^+\subset\Gamma\cap V\setminus\Omega$ constitué des drapeaux (z,l) vérifiant la condition supplémentaire que l passe par p_∞. Le développement en la composante de type (b+) se lit sur la restriction de la classe de cohomologie à S^+, et cette restriction est associée à la restriction à $\mathbf{U}^+$ de la forme différentielle.

(iii) Commençons par le cas d'une composante de type (b$-$). On va montrer alors que la restriction de $\mathcal{P}'(f')$ à $\mathbf{U}^-$ est relativement exacte. Pour cela, on remarque que c'est vrai sur chaque fibre de la projection sur S^- : $\mathcal{P}'(f')$ y est la différentielle d'une section holomorphe bien définie à une constante près. Ces intégrales sur les fibres ne dépendent que de J, la droite joignant x à ξ, et nous allons les normaliser de sorte que leur limite soit nulle lorsque cette droite tend vers D_∞. Une fois cette normalisation accomplie, on obtient une section holomorphe bien définie sur $\mathbf{U}^-$ du faisceau $\mathcal{F}_{-k+1k-2}$ dont $\mathcal{P}'(f')$ est la différentielle relative.

Vérifions qu'une telle normalisation est possible. Soient $z=(x_0\quad 1\quad 0)^\top$ et $l=(1\quad -x_0\quad \tau_0)$ un point fixé de S^- ; un point de la fibre au-dessus de cet élément correspond à la donnée supplémentaire de $\xi=(x\quad y\quad 1)^\top$ et $\alpha=(0\quad 1\quad -y)$ tels que le point d'intersection I de l et α soit intérieur à Δ et que la droite J joignant z et ξ soit extérieure à $\overline{\Delta}$. Des coordonnées de J sont données par $J=(1\quad -x_0\quad w)$ avec $w=x_0y-x$ $(2\Re w>|x_0|^2)$. La différentielle ω_J est la différentielle d'une coordonnée $y(J)$ bien définie à une constante près par : $y(J)=\det_z(J,J_0)\det_z^{-1}(J,l)$, où les déterminants sont pris dans le plan constitué des formes nulles sur z et où J_0 représente le choix d'un point-base (ne dépendant que de (z,l)), normalisé de telle sorte que $\det(J_0,l,*)=*(z)$.

Ici on peut prendre $J_0=(0\quad 0\quad 1)$, ce qui donne $y(J)=(\tau_0-x_0y+x)^{-1}=(\tau_0-w)^{-1}$. Parce que $l(\xi)=x-x_0y+x=\tau_0-w$, la restriction à la fibre au dessus de (z,l) de notre forme différentielle est donnée par

$$\mathcal{P}'(f')=f'(J)(\tau_0-w)^k d((\tau_0-w)^{-1})=f'(1,-x_0,w)(\tau_0-w)^{k-2}\,dw.$$

L'expression $f'(1,-x_0,w)$ est une fonction $\phi'(q)$ de $q=\exp(-(2\pi i/\beta_0)w)$, holomorphe au voisinage de 0 et nulle en 0. Notre forme différentielle est alors le produit de $(\phi'(q)/q)dq$ par un polynôme en $\log(q)$ et on voit qu'une primitive d'une telle forme admet une limite en $q=0$ (une détermination de log étant choisie avec une partie imaginaire bornée) ; autrement dit, toute primitive admet une limite lorsque $\Re w$ tend vers $+\infty$, la partie imaginaire restant bornée.

(iv) Traitons maintenant le cas d'une composante de type (b$+$). Un point de $\mathbf{U}^+$ étant défini par un couple de drapeaux $(z,l)=((x\quad y\quad 1)^\top,(0\quad 1\quad -y))$ et $(\xi,\alpha)=((-v\quad 1\quad 0)^\top,(1\quad v\quad w))$, on voit que la droite J est donnée par $J=(1\quad v\quad -x-vy)$. La classe de cohomologie $\mathcal{P}'(f')$ est associée à la forme différentielle relative $f'(J)\omega_J$ (noter en effet que $l(\xi)$ est identiquement 1).

On calcule comme ci-dessus (la restriction de) ω_J. On peut prendre $J_0=(1\quad v_0\quad -x-v_0y)$ (avec v_0 fixé). On trouve alors que $y(J)=v_0-v$ et donc $\omega_J=-dv$.

Finalement, $-\mathcal{P}'(f')$ est donnée par

$$-\mathcal{P}'(f')(x,y;v,w)=f'(v,-x-vy)\,dv=\sum_{r\in\mathbb{N}^*}g'_r(v)\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}(x+vy)\right)\,dv.$$

Ou, si l'on préfère, en termes $\theta=\exp((2\pi i/\beta_0)x)$,

$$-\mathcal{P}'(f')(x,y;v,w)=\sum_{r\in\mathbb{N}^*}g'_r(v)\exp\left(\frac{2\pi ir}{\beta_0}vy\right)\theta^r\,dv.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Cette dernière expression ne dépend que de v, y et θ. L'action d'un élément

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\Gamma \cap V$ transforme y en $y + \bar{\alpha}$, v en $v - \alpha$, θ en $\exp((2\pi i/\beta_0)(\alpha y + \beta))$, et laisse invariante l'expression de $\mathcal{P}'(f')$.

Notons $\mathbf{W}\tilde{\mathcal{L}}_1$ l'espace total du fibré image réciproque de $\mathcal{L}_1$ par la projection de $\mathbf{W}$ sur $\mathcal{E}$. Cet espace ce projette sur l'espace total du fibré $\mathcal{L}_1$, que nous avions noté $\tilde{\mathcal{L}}_1$. Notons également $\mathbf{W}\tilde{\mathcal{L}}_1^*$ et $\tilde{\mathcal{L}}_1^*$ les complémentaires des sections nulles. On voit que l'expression précédente définit une forme différentielle sur $\mathbf{W}\tilde{\mathcal{L}}_1^*$ (relativement à sa projection sur $\tilde{\mathcal{L}}_1^*$).

Remarquons de plus que l'espace $\mathbf{W}\tilde{\mathcal{L}}_1$ est de Stein : on peut utiliser le fait général qu'un fibré vectoriel sur un espace de Stein est encore de Stein, ou bien aussi le prouver directement dans ce cas particulier. Il en est donc de même de $\mathbf{W}\tilde{\mathcal{L}}_1^*$, et il en résulte que la formule ci-dessus définit une classe de cohomologie sur $\tilde{\mathcal{L}}_1^*$. Cette dernière n'est autre, en vertu des considérations (i) ci-dessus, que la classe de cohomologie qui nous a servi en (3.2) à définir le développement de Fourier.

On remarque enfin que la formule ci-dessus a un sens sur l'espace $\mathbf{W}\tilde{\mathcal{L}}_1$ tout entier : notre classe de cohomologie se prolonge donc à $\tilde{\mathcal{L}}_1$. Dans ces conditions il est clair que la construction de (3.2) revient à se restreindre à la section nulle puis à prendre les coefficients de Fourier. Il en résulte que la r-ième composante de Fourier de $-\mathcal{P}'(f')$ est associée au cocycle qui envoie (y, v) sur $g'_r(v) \exp((2\pi i r/\beta_0) v y)\, dv$. Cela prouve le théorème pour la transformation $\mathcal{P}'$.

La démonstration dans le cas de la transformation $\mathcal{P}$ est duale de la précédente. $\square$

Compte tenu des propriétés de rationalité pour les transformations η et η' prouvées au paragraphe précédent, et du fait que les formes modulaires de Picard sont engendrées par celles rationnelles sur F^{ab}, le théorème précédent admet le corollaire suivant.

Corollaire 1. *L'image de la transformation $\mathcal{P}'$ est engendrée par des classes de cohomologie rationnelles sur F^{ab} (au sens que leurs coefficients sur les composantes du type (b+) le sont). Résultat analogue pour l'image de $\mathcal{P}$.*

On remarquera d'ailleurs que cette image est l'ensemble des classes paraboliques, que l'on peut définir de façon analytique (remarque finale du § 1) à défaut de disposer d'une définition géométrique.

Commentaire final

Pour $\omega' = \mathcal{P}'(f')$ comme dans l'énoncé du théorème, le fait que les coefficients correspondant aux composantes de type (b −) soient nuls traduit le fait qu'au voisinage d'une composante frontière de ce type, la restriction de ω' à la partie algébrique de la compactification (cf. (3.2)) s'annule. On aimerait pouvoir définir des invariants plus fins, qui 'mesurent' le H^1 d'un voisinage de la courbe frontière (rappelons (cf. (2.5)) qu'un tel voisinage n'est pas de Stein).

Ce problème est intimement lié à celui de définir des coefficients pour les 2-classes de cohomologie du type de Maass ; en effet, de même que nous l'avions démontré dans [Car98] dans le cas compact, il devrait encore être vrai que ces classes (dans le cas parabolique) sont engendrées par des cup-produits $\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}'(f')$.

Remerciements

J'ai exposé une version préliminaire de ce travail lors d'un workshop 'Arithmetic Groups and Automorphic Forms' organisé au début 2002 par Joachim Schwermer à l'Erwin Schrödinger International

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press

Institute for Mathematical Physics de Vienne. Je remercie ici cet organisme ainsi que l'organisateur de la rencontre.

Bibliographie

Car98 H. Carayol, *Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes et variétés de Griffiths–Schmid : le cas du groupe U(2, 1)*, Compositio Math. **111** (1998), 51–88.

Car00 H. Carayol, *Quelques relations entre les cohomologies des variétés de Shimura et celles de Griffiths–Schmid (cas du groupe SU(2, 1))*, Compositio Math. **121** (2000), 305–335.

Del71 P. Deligne, *Travaux de Griffiths*, dans *Séminaire Bourbaki* (exp. 373), Lecture Notes in Mathematics, vol. 180 (Springer, New York, 1971), 213–237.

EGW95 M. Eastwood, S. Gindikin et H. Wong, *Holomorphic realization of $\overline{\partial}$-cohomology and constructions of representations*, J. Geom. Phys. **17** (1995), 231–244.

EGW96 M. Eastwood, S. Gindikin et H. Wong, *A holomorphic realization of analytic cohomology*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), 529–534.

Gin93 S. Gindikin, *Holomorphic language for $\overline{\partial}$-cohomology and representations of real semisimple Lie groups*, dans *The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory* (South Hadley, MA, 1992), Contemporary Mathematics, vol. 154 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1993), 103–115.

GS69 P. A. Griffiths et W. Schmid, *Locally homogeneous complex manifolds*, Acta Math. **123** (1969), 253–301.

Har90 M. Harris, *Automorphic forms of $\overline{\partial}$-cohomology type as coherent cohomology classes*, J. Differential Geom. **32** (1990), 1–63.

KU00 K. Kato et S. Usui, *Logarithmic Hodge structures and classifying spaces*, dans *The arithmetic and geometry of algebraic cycles* (Banff, AB, 1998), CRM Proceedings Lecture Notes, vol. 24 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2000), 115–130.

Lar92 M. J. Larsen, *Arithmetic compactification of some Shimura surfaces*, dans *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, eds R. P. Langlands and D. Ramakrishnan (Publications CRM, 1992), 31–45.

Shi76 G. Shimura, *Theta functions with complex multiplication*, Duke Math. J. **43** (1976), 673–696.

Shi77 G. Shimura, *Unitary groups and theta functions*, dans *Algebraic number theory*, Kyoto International Symposium, Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto (Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977), 195–200.

Shi78 G. Shimura, *The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group*, Ann. of Math. (2) **107** (1978), 569–605.

Sie63 C.-L. Siegel, *Moduln Abelscher Funktionen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II (1963), 365–427.

WW97 R. O. Wells et J. A. Wolf, *Poincaré series and automorphic cohomology on flag domains*, Ann. of Math. (2) **105** (1997), 397–448.

Henri Carayol carayol@math.u-strasbg.fr
IRMA, 7 Rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X05001454 Published online by Cambridge University Press