Can. J. Math., Vol. XXVII, No. 3, 1975, pp. 500–507

SUR CERTAINS SOUS-ESPACES DE $B_p(G)$

N. LOHOUÉ

On étudie certains sous-espaces de l'algèbre de Banach $B_p(G)$ des multiplicateurs de $A_p(G)$. On montre entre autres que l'espace des coefficients d'une représentation de G sur un espace L^p n'est pas nécessairement fermé dans $B_p(G)$ à moins que p soit égal à deux.

1. Pour formuler le résultat principal, nous rappelons quelques définitions.

Définitions. (1) Nous considérons un groupe localement compact G, muni d'une mesure de Haar dx, que nous supposons bi-invariante; soit $C(G)$ l'espace de Banach, pour la norme uniforme des fonctions continues sur G, à valeurs complexes, bornées.

(2) Considérons une représentation continue π de G sur un espace réflexif $E(\pi)$; soit $E(\pi) \otimes E'(\pi)$ le produit tensoriel projectif de $E(\pi)$ par son espace dual $E'(\pi)$.

Soit $P : E(\pi) \otimes E'(\pi) \to C(G)$ l'application définie à priori pour les éléments de rang un, par la formule suivante: Pour tout $x \in G$,

$$P(u \otimes v)(x) = \langle \pi(x)u, v \rangle.$$

Ici $\langle a, b \rangle$ est la valeur de la fonctionnelle linéaire $b \in E'(\pi)$ au point $a \in E(\pi)$.

On note alors $A_\pi(G)$ la co-image de P, c'est-à-dire l'Image de P, munie de la norme quotient de $E(\pi) \otimes E'(\pi)$ par le noyau de P.

En d'autres termes, une fonction f est dans $A_\pi(G)$ s'il existe deux suites $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, l'une de $E(\pi)$, l'autre de $E'(\pi)$ telles que:

(a) $\sum_1^\infty ||u_i||_{E(\pi)} ||v_i||_{E'(\pi)} < \infty$;

(b) pour tout $x \in G$, $f(x) = \sum_1^\infty \langle \pi(x)u_i, v_i \rangle$.

De plus la norme de f dans $A_\pi(G)$ est donnée par la formule suivante:

$$||f||_{A_\pi(G)} = \operatorname{Inf} \left\{ \sum_1^\infty ||u_i||_{E(\pi)} ||v_i||_{E'(\pi)}, f(x) = \sum_1^\infty \langle \pi(x)u_i, v_i \rangle \right\}.$$

La première définition est cependant plus fructueuse que celle-ci; elle permet de voir immédiatement que $A_\pi(G)$ est un espace de Banach. Ces espaces ont été étudiés par C. S. Herz dans [**2**].

Soit $1 < p < \infty$, on note $A_p(G)$ l'espace $A_\pi(G)$ où π est la représentation régulière gauche sur $L^p(G)$; alors $A_p(G)$ est une algèbre de Banach pour le produit ponctuel.

Reçu le 23 octobre, 1973 et sous forme revisée, le 23 mai, 1974.

Ces algèbres ont été considérées par P. Eymard dans [**1**]; il a introduit les premières définitions et étudié certaines propriétés de ces algèbres; le lecteur pourra se référer à ce texte pour ce qui peut être considéré comme connu sur le sujet.

Rappelons simplement que $B_p(G)$ est l'algèbre de Banach des multiplicateurs de $A_p(G)$; c'est-à-dire l'espace des fonctions continues $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ telles que pour toute fonction f_0 de $A_p(G)$ ff_0 appartienne à $A_p(G)$; la norme d'une fonction f de $B_p(G)$ est sa norme comme endomorphisme de $A_p(G)$:

$$||f||_{B_p(G)} = \sup_{||f_0||_{A_p(G)}=1} ||ff_0||_{A_p(G)}.$$

Quand $E(\pi)$ est un espace de Hilbert, on peut facilement prouver que si $p = 2$, toute fonction f de $A_\pi(G)$ est une fonction de $B_2(G)$ et que la norme de f comme vecteur de $A_\pi(G)$ est exactement sa norme comme fonction de $B_2(G)$ (si G est moyennable).

Par ailleurs si G_1 et G_2 sont deux groupes abéliens localement compacts et $h : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorphisme continu, d'image dense, on sait, (voir [**3**]) que pour toute fonction f_2 de $A_p(G_2)$ la fonction $f_1 = f_2 \circ h$ est dans $B_p(G_1)$ et:

$$||f_1||_{B_p(G_1)} = ||f_2||_{A_p(G_2)}.$$

Soit π la représentation de G_1 sur $L^p(G_2)$ donnée par la formule:

$$\pi(g_1)f(x) = f[x - h(g_1)],$$

l'espace $A_\pi(G_1)$ correspondant à cette représentation n'est autre que l'espace de fonctions $f \circ h$ où f est dans $A_p(G_2)$.

Maintenant si π est une représentation de G sur un espace L^p, il est naturel de considérer les coefficients de π et de chercher si les deux résultats cités dans ce paragraphe peuvent se généraliser.

Le but de cette note est de prouver qu'ils sont inexacts en général.

2. Nous utiliserons le groupe des déplacements du plan pour prouver le principal résultat de cette note.

En ce qui concerne ce groupe, toutes les notations et formules sont empruntées au livre de Vilenkin [**4**]; elles sont classiques; le lecteur pourra s'y reporter au cas où il aurait des doutes.

Rappelons certains résultats qu'on peut trouver dans [**4**].

(1) Le groupe des déplacements du plan est le produit semi-direct $\mathbf{R}^2$ s $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}$ est le cercle unité identifié au groupe des rotations. C'est un groupe moyennable car il est résoluble (voir [**1**]).

Pour alléger les notations, nous désignerons, dans la suite de cette note, ce groupe par G.

Une paramétrisation commode pour ce groupe consiste à repérer un point g par un triplet (r, φ, α); dans ce dernier (r, φ) correspond au vecteur de $\mathbf{R}^2$ noté en coordonnées polaires, qu'on interprète comme une translation, α est le point de $\mathbf{T}$, qui correspond à la rotation dans le déplacement g.

Avec cette paramétrisation, on voit facilement qu'une mesure de Haar bi-invariante sur G est $1/8\pi^3\, r\, dr\, d\varphi\, d\alpha$.

(2) Pour tout nombre réel $\rho > 0$, on définit une représentation unitaire, continue T_ρ de G sur $L^2(\mathbf{T})$ par la formule:

$$\text{pour toute } f \in L^2(\mathbf{T}),\ \text{pour } (r, \varphi, \alpha) \in G, \quad T_\rho(r, \varphi, \alpha)f(\psi) = e^{i\rho r \cos(\psi-\varphi)} f(\psi - \alpha).$$

On vérifie très facilement que $\mathbf{T}_\rho$ est encore une représentation continue de G sur $L^p(\mathbf{T})$, pour tout $1 \leqq p < \infty$.

Pour tout couple (m, n) d'entiers relatif, on pose:

$$t_{m,n}{}^\rho(r, \varphi, \alpha) = \langle T_\rho(r, \varphi, \alpha)e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (T_\rho(r, \varphi, \alpha)e^{in\psi})e^{-im\psi}\, d\psi.$$

On montre dans [**4**] que:

$$t_{m,n}{}^\rho(r, \varphi, \alpha) = i^{n-m}e^{-i[n\alpha+(m-n)\varphi]}J_{n-m}(\rho r).$$

J_r désigne la fonction de Bessel d'indice r.

(3) Pour tout $1 < p \leqq 2$, regardons T_ρ comme une représentation continue de G sur $L^p(\mathbf{T})$ et notons $A_\rho{}^p(G)$ l'espace de Banach correspondant défini au I.2. Nous prouverons le

THÉORÈME. (a) *Soit* $1 < p < 2$; $A_\rho{}^p(G)$ *est un sous-espace non fermé de* $B_p(G)$.

(b) $A_\rho{}^2(G)$ *n'est pas un sous-espace de* $A_\rho{}^p(G)$.

Remarques. Ce résultat est frappant pour plusieurs raisons.

(1) Il est la négation des résultats rappelés au I.(4), car $A_\rho{}^p(G)$ n'est pas fermé.

(2) On sait par ailleurs que si G_1 est un groupe moyennable les algèbres $A_p(G_1)$ s'emboîtent bien:

$$\text{Si } p_1 \leqq p_2 \leqq 2,\ \text{alors } A_2(G_1) \subset A_{p_2}(G_1) \subset A_{p_1}(G_1).\ (\text{voir } [\mathbf{1}])$$

La seconde assertion indique par conséquent un mauvais comportement des $A_\rho{}^p(G)$ par rapport aux indices p.

La preuve du théorème est basée sur le lemme suivant:

LEMME. *Soit* h *une fonction de* $L^p(\mathbf{T})$, *la forme linéaire* S *sur* $A_\rho{}^p(G)$ *définie par la relation*:

$$\text{pour toute } f \in A_\rho{}^p(G)\ f(r, \varphi, \alpha) = \sum_1^\infty \langle T_\rho(r, \varphi, \alpha)u_i, v_i\rangle$$

$$\langle S, f\rangle = \sum_1^\infty \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_i(x)h(y)v_i(y)dx\, dy$$

est bien définie et continue sur $A_\rho{}^p(G)$.

Preuve. 0. La continuité de S sera évidente dès qu'on aura prouvé que $\langle S, f\rangle$ ne dépend pas de la représentation de f comme somme de la série $f(r, \varphi, \alpha) = \sum_1^\infty \langle T_\rho(r, \varphi, \alpha)u_i, v_i\rangle$.

Nous procédons de la façon suivante: nous construisons une suite double $\{S_{l,M}\}_{l\in\mathbf{Z}^+, M\in\mathbf{Z}^+}$ de fonctions intégrables telle que:

$$\text{(i)} \quad \left|\int_G f(r, \varphi, \alpha)\, S_{l,M}(r, \varphi, \alpha) r\, dr\, d\varphi\, d\alpha\right| \leqq C\|f\|_{A_\rho^p(G)}$$

(C est une constante absolue)

$$\text{(ii)} \quad \lim_{l\to+\infty, M\to+\infty} \int_G f(r, \varphi, \alpha) S_{l,M}(r, \varphi, \alpha) r\, dr\, d\varphi\, d\alpha = \langle S, f\rangle.$$

Il en résultera alors que $\langle S, f\rangle$ ne dépend pas du choix des (u_i, v_i).

1. Soit $W : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction de Weierstrass: $W(X) = e^{-4\pi^2|X|^2}$. Pour tout couple (l, M) d'entiers positifs, considérons

(a) la fonction

$$W_l(X) = e^{(-4\pi^2/l)|X|^2}$$

la somme partielle h_M d'ordre M de h:

$$h_M(\varphi) = \sum_{|m|\leqq M} a_m e^{-im\varphi};$$

(b) la fonction $\mathscr{F}S_{l,M}{}^0 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$

$$\mathscr{F}S_{l,M}{}^0(r, \varphi) = W_l(r) h_M(\varphi).$$

Soit $S_{l,M}{}^0$ la transformée de Fourier de $\mathscr{F}S_{l,M}{}^0$; on peut vérifier (mais cela n'est pas important pour la suite) que:

$$S_{l,M}{}^0(r, \varphi) = \sum_{|m|\leqq M} i^m a_m \left[\int_0^{+\infty} W_l(\rho) J_{-m}\, \rho|r|\rho\, d\rho\right] e^{im\varphi}.$$

$S_{l,M}{}^0$ est intégrable sur R^2 car $\mathscr{F}S_{l,M}{}^0$ est de la classe $\mathscr{S}(R^2)$ de Schwartz. Définissons alors une fonction $S_{l,M} : G \to \mathbf{C}$ par la formule

$$S_{l,M}(r, \varphi, \alpha) = S_{l,M}{}^0(r, \varphi).$$

$S_{l,M}$ est intégrable sur G pour la mesure indiquée au II.1.

2. Soit $\rho > 0$, montrons que la relation (0i) a lieu:

Pour cela, considérons une fonction f de $A_\rho{}^p(G)$

$$f = \sum_1^\infty \langle T_\rho(\cdot) u_i, v_i\rangle$$

et estimons l'intégrale:

$$I_{l,M} = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi, \alpha)\, S_{l,M}(r, \varphi, \alpha) r\, dr\, d\varphi\, d\alpha.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1975-061-2 Published online by Cambridge University Press

Remarquons que pour tout triplet (i, l, M) d'entiers positifs:

$$(2.\mathrm{i}) \quad \frac{1}{4\pi^2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_i(\alpha)v_i(\psi)h_M(\psi)d\alpha\, d\psi\right| \leqq ||u_i||_{L^p(T)}||v_i||_{L^{p'}(T)}||h_M||_{L^p(T)}.$$

Comme h_M est la somme partielle d'ordre M de h,

$$(2.\mathrm{ii}) \quad ||h_M||_{L^p(T)} \leqq C(p)||h||_{L^p(T)}$$

où $C(p)$ est une constante (voir [**5**, p. 225]).

Cette remarque étant faite, revenons à

$$\begin{aligned} I_{l,M} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{16\pi^4}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\rho r\cos(\psi-\varphi)}u_i(\psi-\alpha)v_i(\psi)S_{l,M} \\ &\qquad\qquad \times (r,\varphi,\alpha)r\,dr\,d\varphi\,d\psi\,d\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{16\pi^4}\int_0^{2\pi} u_i(\alpha)d\alpha \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\rho r\cos(\psi-\varphi)}v_i(\psi)S_{l,M}{}^0 \\ &\qquad\qquad \times (r,\varphi)r\,dr\,d\varphi\,d\psi \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{16\pi^4}\int_0^{2\pi} u_i(\alpha)d\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\rho r\cos(\psi-\varphi)}v_i(\psi)S_{l,M} \\ &\qquad\qquad \times (r,\varphi)r\,dr\,d\varphi\,d\psi \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_i(\alpha)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_i(\psi)w_l(\rho)h_M(\psi)d\psi \\ &= W_l(\rho)\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_i(\alpha)v_i(\psi)h_M(\psi)d\alpha\,d\psi. \end{aligned}$$

On passe de la troisième égalité à la quatrième par la transformation de Fourier.

D'après (2.ii), on voit que

$$|I_{l,M}| \leqq C(p)||h||_{L^p(T)}\sum_1^\infty ||u_i||_{L^p(T)}||v_i||_{L^{p'}(T)}.$$

Par conséquent

$$|I_{l,M}| \leqq C(p)||h||_{L^p(T)}||f||_{A_\rho^p(G)}$$

ce qui prouve 0.i

$$\lim_{l\to\infty} I_{l,M} = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_i(\alpha)v_i(\psi)h_M(\psi)d\alpha\,d\psi$$

et

$$\lim_{l\to+\infty,\,M\to\infty} I_{l,M} = \langle S, f\rangle$$

ce qui prouve bien (0.ii).

https://doi.org/10.4153/CJM-1975-061-2 Published online by Cambridge University Press

Preuve du Théorème. 1. Faisons d'abord deux remarques.

(a) Soit $PF_p(G)$ la fermeture de $L^1(G)$ considérée comme sous-algèbre de l'algèbre de Banach $\mathrm{CONV}_p(G)$ des convoluteurs de $L^p(G)$.

$B_p(G)$ est l'espace de Banach dual de $PF_p(G)$ puisque G est moyennable; si f est dans $B_p(G)$ et h dans $L^1(G)$ la formule de dualité n'est autre que l'intégrale:

$$\int_G f(g)\, h(g)\, dg.$$

Ce théorème a été prouvé par C. S. Herz en 1970; la démonstration complète n'est pas encore publiée (pour une ébauche voir [**1**]).

(b) D'après [**2**] si f est dans $A_\rho^p(G)$ et h dans $L^1(G)$

$$\left|\int_G f(g)h(g)dg\right| \leqq \|f\|_{A_\rho^p(G)}\|h\|_{PF_p(G)}.$$

On voit ainsi, d'après la remarque a) que toute fonction de $A_\rho^p(G)$ est une fonction de $B_p(G)$.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $A_\rho^p(G)$ soit un sous-espace fermé de $B_p(G)$.

Le théorème du graphe fermé prouve alors l'existence d'une constante $k > 0$ telle que:

$$(*) \qquad \|f\|_{B_p(G)} \leqq \|f\|_{A_p(G)} \leqq k\|f\|_{B_p(G)}.$$

Soit C_k la boule de $PF_p(G)$ de rayon k; alors toute forme linéaire sur $A_\rho^p(G)$ de norme au plus égale à 1 est la limite faible, pour la topologie $\sigma(A_\rho^p(G), A_\rho^p(G)')$ d'une suite d'éléments de C_k. (On peut considérer des suites au lieu de filtres, car $A_\rho^p(G)$ est séparable par conséquent tout convexe compact de $A_\rho^p(G)'$ est métrisable). En effet, s'il n'en est pas ainsi, soit F_0 une forme linéaire sur $A_\rho^p(G)$, $\|F_0\| \leqq 1$ qui n'appartienne pas à la fermeture $\bar{C}_k$ de C_k pour la topologie faible.

Comme $\bar{C}_k$ est un convexe compact, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existerait $\epsilon > 0$, il existe une fonction $f \in A_\rho^p(G)$ telle que:

(i) pour toute $\phi \in L^1(G)$, $\|\phi\|_{PF_p(G)} \leqq k$,

$$\left|\int_G f(x)\phi(x)dx\right| \leqq 1$$

et alors $\|f\|_{B_p(G)} \leqq 1/k$ d'après (1.a).

(ii) $|\langle F_0, f\rangle| > 1 + \epsilon$ ce qui prouve que $\|f\|_{A_p^p(G)} > 1 + \epsilon$.

(i) et (ii) contredisent la relation (*).

3. Nous allons prouver qu'il n'existe aucune suite $\{\mu_n\}$ d'éléments de C_k qui converge faiblement vers la forme linéaire S que nous avons construite dans le lemme.

Raisonnons encore par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $\{\mu_n\}$ de points de C_k qui converge vers S.

https://doi.org/10.4153/CJM-1975-061-2 Published online by Cambridge University Press

Nous remarquons d'après [2] qu'une telle suite étant bornée dans $PF_p(G)$ est une suite bornée dans $PF_2(G)$. Par conséquent si la suite $\{\mu_n\}$ d'éléments de C_k converge vers S, la restriction de cette fonctionnelle linéaire à $A_\rho^2(G) \cap A_\rho^p(G)$ est continue pour la topologie de $A_\rho^2(G)$.

D'autre part $A_\rho^2(G) \cap A_\rho^p(G)$ est visiblement dense dans $A_\rho^2(G)$ car ce dernier contient le sous-espace engendré par les fonctions $t_{m,n}{}^\rho$ considérées au II.2.

S se prolonge alors en une forme linéaire $\tilde{S}$ sur $A_\rho^2(G)$. Cela est absurde si la fonction h qui nous a permis de construire S au lemme précédent n'est pas dans $L^2(\mathbf{T})$. Soit à prouver cette assertion.

Si h n'est pas dans $L^2(\mathbf{T})$, il existe une suite $\{v_l\}$ de polynômes trigonométriques qui converge vers une fonction v dans $L^2(T)$ et telle que

$$\lim_{l\to+\infty} \int_T h(x)v_l(x)dx = +\infty.$$

Soit u une fonction quelconque de $L^2(T)$ d'intégrale 1

$$\lim_{l\to+\infty} \langle S, \langle T_\rho u, v_l\rangle\rangle = \lim_{l\to+\infty} \int_T h(y)v_l(y)dy = +\infty$$
$$= \langle \tilde{S}, \langle T_\rho u, v\rangle\rangle.$$

La dernière assertion résulte du fait que: $\lim_{l\to+\infty}||v_l - v||_p = 0$.

Pour voir que cette limite est nulle, il suffit, grâce à l'inégalité 2 ii page 7, de la vérifier pour les polynômes trigonométriques, ce qui est élémentaire.

Ceci termine la preuve de la première partie du théorème.

4. Nous avons aussi prouvé qu'il existe une fonctionnelle linéaire continue sur $A_\rho^p(G)$, non définie sur $A_\rho^2(G)$, ce qui prouve la dernière partie du théorème.

Remarque. On peut vérifier ici, que le noyau de P est réduit à 0; c'est un peu plus délicat que le lemme, nous ne rentrerons pas dans les détails.

Il apparait alors une différence profonde entre le cas $p = 2$ et celui où p est quelconque.

Dans la première situation, puisque Ker $P = \{0\}$, tout opérateur S de $L^2(\mathbf{T})$ définit de façon évidente une forme linéaire sur $A_\rho^2(G)$; compte-tenu du résultat connu pour $p = 2$ rappelé au I.4, on voit, par le même genre argument que nous avons utilisé dans la partie 2 de la démonstration du théorème qu'il existe une suite S_n de fonctions de $L^1(G)$ telle que:

(i) $||S_n||_{PF_2(G)} \leqq ||S||$ ($||S||$ est la norme de l'endomorphisme S);

(ii) pour tout couple u, v de fonctions de $L^2(\mathbf{T})$

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \langle T_\rho(g)u, v\rangle\, S_n(g)dg = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Su(\theta)v(\theta)d\theta.$$

Pour p quelconque le théorème dit que ceci est faux.

Dans le même cadre d'idées, remarquons d'après [2], que tout convoluteur de $L^p(G)$ se transfère facilement en un opérateur de $L^p(\mathbf{T})$, grâce à T_ρ. Le théorème dit encore qu'il est impossible de reconstituer un opérateur de convolution de $L^p(G)$, à partir des différents opérateurs obtenus quand ρ varie.

Bibliographie

1. P. Eymard, *Séminaire N. Bourbaki*, 22ème année 1969–70, exp. 367, nov. 1969.
2. C. S. Herz, *The theory of p-spaces with an application to convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. *154*, p. 69.
3. N. Lohoué, *Atomisation d'opérateurs de convolution et algèbres $A_p(G)$*, Thèse à paraitre.
4. N. Vilenkin, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes* (Dunod, Paris 1969).
5. W. Rudin, *Fourier Analysis on groups* (Interscience Publishers, New York-London, 1962).

Université Paris-Sud,
Centre d'Orsay, 91-Orsay;
McGill University,
Montreal, Quebec

https://doi.org/10.4153/CJM-1975-061-2 Published online by Cambridge University Press