Compositio Mathematica **134:** 337–366, 2002.

Sur les sous-variétés des tores

(On Subvarieties of Tori)

GAËL RÉMOND
Institut Fourier, BP 74, 38042 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France. Courrier électronique: Gael.Remond@ujf-grenoble.fr

(Received: 23 April 2001; accepted in final form: 18 September 2001)

Abstract. In *Invent. Math.* **126** (2000), pp. 513–545, we gave a proof of Lang's conjecture on Abelian varieties leading to an effective bound for the number of translates involved. We show here that the method can be extended to give a similar statement for the 'Mordell–Lang plus Bogomolov' theorem proven by B. Poonen and independently by S. Zhang. We deal in detail with tori for which effective results have been obtained by J.-H. Evertse and H. P. Schlickewei; we improve on these mainly by providing polynomial bounds in the degree instead of doubly exponential ones. We also state a theorem for Abelian varieties. In both cases the strategy of proof is based on the approach of Mumford and Vojta–Faltings–Bombieri together with an effective Bogomolov property and therefore does not rely on either equidistribution nor subspace theorem arguments.

Mathematics Subject Classifications (2000). 11G35, 11G50, 14G25.

Key words. Bogomolov property, heights, Lang's conjectures, Tori.

1. Introduction

Nous montrons dans ce texte comment les méthodes de [R2] et [R3] peuvent s'étendre d'une part aux sous-variétés des tores et d'autre part pour donner un énoncé de la forme 'Mordell–Lang plus Bogomolov' selon la terminologie introduite par B. Poonen. Ce faisant, nous obtenons pour les tores des résultats de même nature que ceux de J.-H. Evertse et H. P. Schlickewei (voir [Ev]) mais avec des améliorations quantitatives : les bornes deviennent polynomiales en le degré de la sous-variété considérée au lieu de doublement exponentielles.

Un entier g étant fixé dans toute la suite, nous considérons le schéma $A = (\mathbb{G}_{\mathrm{m},\bar{\mathbb{Q}}})^g$. Nous verrons toujours A comme plongé *via* $A \hookrightarrow (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ avec $n = 2^g - 1$, la deuxième immersion étant le morphisme de Segre. Ainsi dispose-t-on d'une hauteur sur les points de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ que nous noterons $h : A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}_+$ (la définition est rappelée dans la partie suivante); nous associons à un sous-schéma fermé X de A son degré $\deg X$, défini comme la somme de ceux des composantes de l'adhérence de X dans $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

Si Γ est une partie de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\varepsilon \geqslant 0$ un réel, nous introduisons un épaississement de Γ par $\Gamma_\varepsilon = \{xy \mid x \in \Gamma,\ y \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h(y) \leqslant \varepsilon\}$.

Dans ces conditions, notre résultat principal s'énonce de la manière suivante.

THÉORÈME 1.1 *Soient X un sous-schéma fermé de A et Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$, un entier naturel S, une famille $x_1, \ldots, x_S$ d'éléments de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ et une famille $B_1, \ldots, B_S$ de sous-tores de A de sorte que $x_i B_i \subset X$ pour $1 \leqslant i \leqslant S$ et si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{S} (x_i B_i)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$. En outre, si $m = \dim X + 1$ et $r = \operatorname{rang}\Gamma$, on peut choisir $\varepsilon_0 = (\deg X)^{-g^2 m^{3m}}$ et $S = (\deg X)^{(r+1)g^2 m^{3m^2}}$.*

La première partie est une conséquence du théorème principal de [Po] (également démontré par S. Zhang). Pour l'aspect quantitatif, nous pouvons comparer avec [Ev, th. 1.6]. L'ensemble Γ_ε y est noté $T(\Gamma, \varepsilon)$ et défini avec une hauteur différente h' qui vérifie $h'(x) \leqslant h(x) \leqslant gh'(x)$ si $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$. A cette différence près, cet énoncé donne $\varepsilon_0 = 2^{-2^{6d\binom{d+m-1}{m-1}}}$ et $S = {\varepsilon_0}^{-(r+1)}$ où d est le degré de X dans $\mathbb{P}^g_{\bar{\mathbb{Q}}}$ relié à celui que nous utilisons ici par $d \leqslant \deg X \leqslant g^{m-1} d$.

Il convient de rappeler que le cas particulier $\varepsilon = 0$ correspond à la conjecture de Lang, démontrée pour les tores par M. Laurent. Nous renvoyons à [Ev] pour plus de détails sur les résultats antérieurs et les liens avec le théorème du sous-espace.

Si l'on compare la partie qualitative du théorème 1.1 avec le résultat de B. Poonen dans ce cas, on constate que ce dernier est un peu plus fort en ce qu'il permet de choisir les points $x_1, \ldots, x_S$ comme éléments de Γ. En fait, pour déduire un tel énoncé du nôtre, il suffit de traiter le cas $X = xB$ et cela se fait élémentairement (par exemple avec le lemme 6.1 ci-après). En revanche, si l'on veut un renseignement quantitatif dans cette formulation, le problème change de nature : si la valeur de S reste évidemment valable, celle de ε_0 doit dépendre d'un terme arithmétique comme on le voit déjà sur l'exemple trivial $\Gamma = 0$ et $\dim X = 0$. Il ne semble pas que les méthodes présentées ici premettent de traiter cette question qui se rapproche d'un problème de Lehmer généralisé (voir par exemple [AD]).

Au delà de l'énoncé principal ci-dessus, nous pouvons donner un résultat partiel à propos de l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{xy \mid x \in \Gamma,\ y \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h(y) \leqslant \varepsilon(1 + h(x))\}$$

introduit dans [Ev]. Comme dans cet article, nous ne savons pas étendre la méthode pour aboutir à un résultat effectif général concernant $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$. Toutefois nous pouvons améliorer [Ev, th. 1.7] dans le cas où X est une courbe C. Nous notons $h(C)$ la hauteur projective de l'adhérence de C dans $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

THÉORÈME 1.2. *Soient Γ un sous-groupe de rang fini r de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et C une courbe irréductible de A qui ne soit pas la translatée d'un sous-tore de A. Si $\varepsilon \leqslant \left(2^{12g+229}(\deg C)^{33} \max(1, h(C))\right)^{-1}$ alors*

$$\operatorname{Card} C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \leqslant \left(2^{12g+229}(\deg C)^{33} \max(1, h(C))\right)^{r+1}.$$

Dans la suite de ce texte, nous démontrerons uniquement les théorèmes précédents sur les tores. Il est par ailleurs possible de transposer les améliorations apportées au

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

cas de [R3] et obtenir ainsi des analogues abéliens. Par exemple, en s'appuyant sur les calculs de [R3] et les résultats de [DP2, II], on peut établir (nous ne le ferons pas ici) la généralisation suivante du théorème 1.2 de [R3] (que l'on retrouve avec $\varepsilon = 0$). L'ensemble $\Gamma_\varepsilon^{\mathcal{L}}$ est défini comme $\{x + y \mid x \in \Gamma,\ y \in A(\bar{\mathbb{Q}}),\ |y|_{\mathcal{L}} \leqslant \varepsilon\}$ où $|\cdot|_{\mathcal{L}}^2$ désigne la hauteur de Néron–Tate associée à $\mathcal{L}$.

THÉORÈME 1.3. *Soient A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A ample et symétrique, X un sous-schéma fermé de A et Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$, un entier naturel S, une famille $x_1, \ldots, x_S$ d'éléments de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ et une famille $B_1, \ldots, B_S$ de sous-variétés abéliennes de A de sorte que $x_i + B_i \subset X$ pour $1 \leqslant i \leqslant S$ et si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$*

$$X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon^{\mathcal{L}} = \bigcup_{i=1}^{S} (x_i + B_i)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon^{\mathcal{L}}.$$

En outre, si $\mathcal{L}$ définit une polarisation principale de A, si $h(A)$ est la hauteur thêta de A associée à $\mathcal{L}^{\otimes 16}$ définie dans [DP2, II], si L est un corps de définition de $(A, \mathcal{L})$, si $h_0(A) = [L : \mathbb{Q}] \max(1, h(A))$ et si $m = \dim X + 1$, $r = \operatorname{rang}\Gamma$, on peut choisir

$$\varepsilon_0 = \left(2^{10} h_0(A) \deg_{\mathcal{L}} X\right)^{-(4g^2)^m} \quad \textit{et} \quad S \leqslant \left(2^{34} h_0(A) \deg_{\mathcal{L}} X\right)^{(r+1)g^{5m^2}}.$$

Le plan de la démonstration du théorème 1.1 est calqué sur celui des articles [R2] et [R3] auxquels nous renvoyons pour plus de détails sur la méthode, nous contentant ici de préciser les différences introduites par le passage des variétés abéliennes aux tores d'une part et celui de Γ à Γ_ε d'autre part.

La première étape (partie 3) est consacrée à l'établissement d'une inégalité de Vojta comme dans [R2] et suit donc les idées de Vojta, Faltings et Bombieri. La principale différence avec le cas abélien vient de ce que A n'est pas propre. Nous contournons cette difficulté comme dans [Vo] en considérant un éclatement de A sur lequel on peut définir un faisceau convenable. Ceci modifie quelques détails techniques, particulièrement lors des estimations locales des dérivées de la section considérée où nous devons établir des lemmes auxiliaires plus précis. Jusqu'ici Γ ou Γ_ε n'ont aucune influence puisque le résultat est valable pour tous les points de $X(\bar{\mathbb{Q}})$.

Dans les deux parties 4 et 6, où l'on suit [R3], le fait que A soit un tore et non une variété abélienne n'induit quasiment aucune différence tandis que la présence de Γ_ε influe. Dans un premier temps, il s'agit de vérifier que les arguments euclidiens dans $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ de recouvrement par des boules ou des cônes s'étendent à Γ_ε (voir principalement le lemme partie suivante). Ensuite, il faut garder trace, dans chacun des arguments de [R3], de la valeur de ε.

Les résultats de la partie 4, centrée autour d'une inégalité de Mumford, peuvent s'appliquer partiellement à $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$. Ainsi, en nous limitant au cas d'une courbe, nous obtenons le théorème 1.2 dans la partie 5.

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

Disons enfin que, comme dans [R3], nous avons besoin d'un résultat effectif sur les points de petite hauteur, analogue à celui de [DP2, II]. Dans le cas torique, nous utilisons [DP]; de meilleurs énoncés ont récemment été obtenus par F. Amoroso et S. David (voir [AD]) mais ils ne permettent pas d'améliorer significativement les théorèmes précédents car les termes principaux proviennent de l'inégalité de Vojta (au moins pour S).

2. Notations et préliminaires

Nous fixons tout d'abord des notations utilisées dans tout le reste de l'article. Nous écrirons toujours $n = 2^g - 1$ et, au vu du plongement de Segre utilisé, il est naturel de désigner par W_β pour $\beta \in \{0, 1\}^g$ les coordonnées de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$; parallèlement nous les noterons aussi W_j pour $0 \leqslant j \leqslant n$ avec les conventions $W_0 = W_{(0,\dots,0)}$ et $W_j = W_\beta$ pour $1 \leqslant j \leqslant g$ si β désigne l'élément de $\{0, 1\}^g$ tel que $\beta_i = 1 \Longleftrightarrow i = j$. Dans ce cadre, si $\beta \in \{0, 1\}^g$, son complémentaire $\bar{\beta}$ est défini par $\bar{\beta}_j = 1 - \beta_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant g$.

Lorsque X est un sous-schéma fermé fixé de A, l'entier m désigne $\dim X + 1$. De plus nous associons à un tel X deux nombres définis *via* son image fermée dans $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$: son degré $\deg X$ et sa hauteur projective $h(X)$ (voir [BGS] ou [R1]). Il est facile de remarquer, en écrivant $\deg X$ à l'aide de multidegrés dans $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$ (voir par exemple [R1, p. 103]), que $\deg X = 1$ entraîne que X est un translaté d'un sous-tore de A de dimension 0 ou 1 et, par suite, que tous nos résultats sont triviaux dans ce cas-là. Ainsi nous utiliserons dans quelques calculs $\deg X \geqslant 2$. Enfin, l'ensemble exceptionnel intervenant naturellement dans le contexte du théorème 1.1, à savoir l'union des translatés de sous-tores de dimension non nulle inclus dans X, s'appelera Z_X comme dans [R3] (c'est le complémentaire de l'ouvert noté X^0 dans [Ev] ou [DP]).

Précisons maintenant la hauteur des points employée. Si F est une partie finie de $\bar{\mathbb{Q}}$, sa hauteur se définit par

$$h(F) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |F|_v$$

où K désigne le corps de nombres $\mathbb{Q}(F)$ et $|F|_v = \max_{x \in F} |x|_v$ pour toute place v de K. Nous étendons les notations $|P|_v$ et $h(P)$ à un polynôme P en l'identifiant à la famille de ses coefficients. De même la hauteur $h(y)$ d'un point fermé y de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est celle d'un système quelconque de coordonnées. Cela fournit donc $h\colon A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}_+$ et, si $x \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \simeq (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^g$ s'écrit $(x_1, \dots, x_g)$, nous avons $h(x) = \sum_{i=1}^g h(1, x_i)$. L'intérêt majeur du choix de cette hauteur réside dans le fait qu'elle induit une norme sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $A(\bar{\mathbb{Q}})/A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$ qui s'étend à

$$\mathcal{V} = A(\bar{\mathbb{Q}}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} \simeq (A(\bar{\mathbb{Q}})/A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R}$$

et que l'on notera $|\cdot|$ (mais on conserve la notation multiplicative sur $\mathcal{V}$ de sorte que $|xy| \leqslant |x| + |y|$ et $|x^\lambda| = |\lambda|\,|x|$ si $x, y \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$). Si x et y sont deux éléments non nuls de $\mathcal{V}$, on utilisera une distance $\ll$ angulaire $\gg$ entre eux, associée à cette norme, définie par $\widehat{(x, y)} = \left|x^{\frac{1}{|x|}} y^{\frac{-1}{|y|}}\right|$.

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

Les arguments géométriques qui permettent de passer de Γ à Γ_ε sont contenus dans le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Soient Γ un sous-groupe de rang r de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\varepsilon \geqslant 0$ un réel.*

(1) *Si ρ et μ sont des réels avec $\rho \geqslant 0$, $\mu > 0$ et $\varepsilon \leqslant \rho/2\mu$, il existe un ensemble $E \subset \Gamma$ tel que* Card $E \leqslant (4\mu+3)^r$ *et*

$$\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |x| \leqslant \rho\} \subset \bigcup_{y \in E} \{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |xy^{-1}| \leqslant \rho/\mu\}.$$

(2) *Si c_1 et c_3 sont des réels $\geqslant 1$ et si $\varepsilon \leqslant c_3/8c_1$ alors on peut partitionner $\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |x| \geqslant c_3\}$ en moins de $(1+8c_1)^r$ ensembles dans chacun desquels deux points quelconques vérifient $\widehat{(x,y)} \leqslant c_1{}^{-1}$.*

(3) *Si $c_3 \geqslant 8$ et $\varepsilon \leqslant (10c_1)^{-1}$ on peut remplacer Γ_ε par $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ dans l'assertion précédente.*

Démonstration. Il convient de noter que, dans le lemme 6.1 de [R3], on peut remplacer la norme euclidienne par toute autre norme. On l'applique alors dans $\Gamma \otimes \mathbb{R} \subset \mathcal{V}$ à l'ensemble $\{x \in \Gamma \mid |x| \leqslant \rho + \varepsilon\}$ que l'on recouvre par des boules de rayon $(\rho/\mu) - \varepsilon$. Leur nombre est majoré par

$$\left(2\frac{\rho+\varepsilon}{\frac{\rho}{\mu}-\varepsilon}+1\right)^r \leqslant \left(2\frac{\rho+\frac{\rho}{2\mu}}{\frac{\rho}{2\mu}}+1\right)^r = (4\mu+3)^r.$$

En notant E l'ensemble de leurs centres, on obtient la première assertion: si $x \in \Gamma_\varepsilon$ et $|x| \leqslant \rho$ on a $x = yz$ avec $y \in \Gamma$ et $|z| \leqslant \varepsilon$ donc $|y| \leqslant \rho+\varepsilon$ et par suite il existe $y_0 \in E$ tel que $|yy_0^{-1}| \leqslant (\rho/\mu) - \varepsilon$ ce qui donne bien $|xy_0^{-1}| = |zyy_0^{-1}| \leqslant \rho/\mu$.

Pour les deux autres assertions, nous appliquons le même lemme à $\{x \in \Gamma \otimes \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$ avec $\gamma = 4c_1$. Il nous donne moins de $(8c_1+1)^r$ boules de rayon $1/4c_1$ dont nous notons les centres x_i, $i \in I$. Alors on trouve

$$\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |x| \geqslant c_3\} \subset \bigcup_{i \in I} \{x \mid \widehat{(x, x_i)} \leqslant (2c_1)^{-1}\}.$$

En effet si x appartient à l'ensemble de gauche on écrit $x = yz$ avec $y \in \Gamma$ et $|z| \leqslant \varepsilon$. Il existe $i \in I$ tel que $|y^{1/|y|}x_i^{-1}| \leqslant (4c_1)^{-1}$ c'est-à-dire $\widehat{(y, x_i)} \leqslant (4c_1)^{-1}$. Puisque $\widehat{(x, x_i)} \leqslant \widehat{(x, y)} + \widehat{(y, x_i)}$ il suffit de majorer $\widehat{(x, y)}$. Or

$$\begin{aligned}\widehat{(x, y)} &= |(yz)^{\frac{1}{|yz|}} y^{\frac{-1}{|y|}}| = |\, y^{\frac{1}{|yz|}-\frac{1}{|y|}} z^{\frac{1}{|yz|}}| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{|yz|} - \frac{1}{|y|}\right| |y| + \frac{1}{|yz|}|z| = \frac{|z| + \big||y| - |yz|\big|}{|x|} \leqslant 2\frac{|z|}{|x|}.\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse sur ε ceci est bien majoré par $(4c_1)^{-1}$. Ainsi a-t-on l'inclusion annoncée et il est clair que les ensembles de droite vérifient la condition imposée.

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

On raisonne de manière identique pour $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ jusqu'à $\widehat{(x,y)} \leqslant 2|z||x|^{-1}$ où ici $|z| \leqslant \varepsilon(1+|y|) \leqslant \varepsilon(1+|x|+|z|)$. On en déduit

$$\widehat{(x,y)} \leqslant \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \times \frac{1+|x|}{|x|} \leqslant \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \times \frac{1+c_3}{c_3} \leqslant \frac{2}{10c_1-1} \times \frac{9}{8} \leqslant \frac{1}{4c_1}$$

avec les hypothèses $|x| \geqslant c_3 \geqslant 8$ et $c_1 \geqslant 1$. On conclut alors de même. □

3. Inégalité de Vojta

Dans cette partie, nous établissons le

THÉORÈME 3.1. *Soit X un sous-schéma fermé intègre de A. Il existe des réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ de sorte que si $x_1, \ldots, x_m$ sont des éléments de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ vérifiant (pour $1 \leqslant i < m$)*

$$\widehat{(x_i, x_{i+1})} \leqslant 1/c_1, \qquad |x_{i+1}| \geqslant c_2|x_i|, \qquad |x_1| \geqslant c_3$$

alors il existe i tel que $x_i \in Z_X(\bar{\mathbb{Q}})$.

De plus on peut choisir les valeurs effectives suivantes

$$c_1 = 8m(2m \deg X)^m \Lambda^{\psi(m)-1},$$
$$c_2 = \Lambda^{3m\psi(m)} \quad \text{et}$$
$$c_3 = \Lambda^{2\psi(m-1)} \max(h(X), 1)$$

où l'on définit

$$\Lambda = \max\left(12m^2 \dim X(2m)^{m \dim X}(n+1)(\deg X)^{2m+1}, (2m^2 \dim^2 X)^{m \dim X}\right)^{1/3}$$

et, si u est un entier avec $u \leqslant m \dim X$, $\psi(u) = \prod_{j=u+1}^{m \dim X}(3j+1)$.

Afin de démontrer le théorème, nous fixons un corps de nombres K de sorte que tous nos objets (tels A, X, Z_X, x_i) proviennent d'objets correspondants sur K. Pour le reste de cette partie, les notations désignent ces objets sur K. En particulier, on a $x_i \in X(K)$ pour tout i.

3.1. CHOIX DES a_i

On définit des entiers $a_1, \ldots, a_m$ par les conditions suivantes: $a_m = 1$ et a_i/a_{i+1} est l'entier le plus proche de $|x_{i+1}|/|x_i|$ (si $1 \leqslant i \leqslant m-1$). Cela entraîne $a_i/a_{i+1} \geqslant c_2$ (car c_2 est entier) puis $a_i|x_i| \geqslant (1-(1/2c_2))^{i-1} a_1|x_1|$ et (grâce à $2c_2 \geqslant c_1$)

$$\sum_{i=1}^{m-1} |x_i^{a_i} x_{i+1}^{-a_{i+1}}| \leqslant \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{m} a_i|x_i|.$$

Nous allons montrer l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.2. *Si les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées avec $x_i \in (X \setminus Z_X)(K)$ pour tout i alors il existe un entier $v \geqslant m-1$ et une famille de*

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

sous-schémas fermés intègres de X notée $(Y_i^{(u)})_{u,i}$ où $1 \leqslant i \leqslant m$ et $v \leqslant u \leqslant m \dim X$ de sorte que les conditions suivantes sont réalisées.

(1) $x_i \in Y_i^{(u)} \subset Y_i^{(u+1)}$ *pour tous* $v \leqslant u < m \dim X$, $1 \leqslant i \leqslant m$.
(2) $\sum_i \dim Y_i^{(u)} = u$ *pour tout* u.
(3) *Si* $u \neq v$, $\dim Y_i^{(u)} \geqslant 1$ *pour tout* i *et il existe* j *tel que* $Y_j^{(v)} = \{x_j\}$.
(4) *Pour tout* u $\prod_{i=1}^m \deg(Y_i^{(u)}) \leqslant (\deg X)^m \Lambda^{\psi(u)-1}$ *et, pour tout* i, $\deg(Y_i^{(u)}) \leqslant (\deg X)\Lambda^{\psi(u)-1}$.
(5) *Pour tout* u

$$\sum_{i=1}^m a_i h(Y_i^{(u)}) \leqslant \frac{1}{2}\Lambda^{2\psi(u)}\left(\sum_{i=1}^m a_i\right)\max(h(X), 1).$$

Moyennant ce résultat, on montre aisément le théorème 3.1 par l'absurde: en effet, on aurait d'une part, pour un certain j,

$$\sum_{i=1}^m a_i h(Y_i^{(v)}) \geqslant a_j h(\{x_j\}) \geqslant a_j h(x_j) = a_j|x_j| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2c_2}\right)^{j-1} a_1 c_3.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{i=1}^m a_i \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} c_2^{-i} a_1 < \frac{c_2}{c_2 - 1} a_1.$$

Ainsi, en majorant j par m et en minorant v par $m-1$, on aboutit à

$$c_3 < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2c_2}\right)^{1-m}\left(\frac{c_2}{c_2 - 1}\right)\Lambda^{2\psi(m-1)}\max(h(X), 1).$$

Vu la valeur de c_2 le produit des trois premiers facteurs est au plus 1 ($c_2 \geqslant 2m+1$ suffit) et l'on en déduit bien, par définition de c_3, une contradiction.

Nous établissons ce théorème par récurrence sur u. Si $u = m \dim X$ on pose $Y_i^{(u)} = X$ pour chaque i. Cela convient clairement ($\psi(m \dim X) = 1$). Ensuite, supposant les conditions réalisées jusqu'à u, nous allons définir des $Y_i^{(u-1)}$ vérifiant les conditions 1, 2, 4 et 5. Si de plus $\dim Y_i^{(u)} \geqslant 1$ pour tout i, la récurrence peut continuer. Sinon on pose $v = u - 1$ et cela termine la preuve.

Ainsi allons-nous travailler à u fixé. Pour alléger, nous noterons donc Y_i en lieu et place de $Y_i^{(u)}$ et, de plus, $u_i = \dim Y_i$ et $D_i = \deg Y_i$. En particulier $u_i \geqslant 1$ pour tout i donc $u \geqslant m$. L'adhérence de Y_i sera désignée par φ_i: $Z_i \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$. En premier lieu, nous allons introduire des plongements modifiés facilitant la description des Z_i.

3.2. PLONGEMENTS ADAPTÉS

Commençons par rappeler la définition. Lorsque Z est un schéma intègre, projectif sur K, de dimension u, on dit ici qu'une immersion fermée $Z \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$ est *adaptée* à Z si

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

(1) $Z \cap V(W_0, \ldots, W_u) = \emptyset$;
(2) $K(Z)$ est engendré par les images de $\frac{W_1}{W_0}, \ldots, \frac{W_{u+1}}{W_0}$;
(3) l'image de W_{u+1}/W_0 est non nulle.

Cette terminologie est celle de [R2, partie 4] à qui nous renvoyons pour plus de détails. Nous aurons besoin de généraliser un peu les résultats.

Tout d'abord, la démonstration du lemme 4.1 de [R2] donne immédiatement la version plus précise suivante (où nous notons $V_0, \ldots, V_n$ les coordonnées de $\mathbb{P}^n_K$).

LEMME 3.1. *Soit Z un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_K$ qui vérifie la condition $Z \cap V(V_0, \ldots, V_u) = \emptyset$. On note $u = \dim Z$, $D = \deg Z$ et f une forme éliminante de Z. Pour $\mu \in K^{n+1}$ on définit $P_\mu(X_0, \ldots, X_{u+1})$ comme*

$$\frac{f(X_{u+1}V_0 - \sum_{i=0}^n \mu_i X_0 V_i, X_0 V_1 - X_1 V_0, \ldots, X_0 V_u - X_u V_0)}{X_0^{Du} f(V_0, \ldots, V_u)}.$$

Alors P_μ est un polynôme homogène de degré D dans lequel le coefficient de X_{u+1}^D est 1, il s'écrit comme la puissance d'un polynôme irréductible et le polynôme

$$P_\mu\left(V_0, \ldots, V_u, \sum_{i=0}^n \mu_i V_i\right)$$

est élément de l'idéal de Z.

Nous savons ensuite modifier de manière contrôlée un plongement quelconque pour en faire un plongement adapté. On procède comme suit. En vertu de la proposition 4.1 de [R2], nous fixons pour tout sous-schéma fermé intègre $\varphi\colon Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ une matrice $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ à coefficients dans $\{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leqslant \max(D, 2)/2\}$. L'automorphisme défini par M est noté $\chi\colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ (de sorte que le plongement adapté obtenu est $\chi \circ \varphi$). Nous choisissons de désigner par $W_0, \ldots, W_n$ les coordonnées de $\mathbb{P}^n_K$ à la source de χ et $V_0, \ldots, V_n$ au but. De la sorte, si $m_{i,j}$ sont les coefficients de M et $\tilde{m}_{i,j}$ ceux de M^{-1}, on a, *via* χ, les relations

$$V_i = \sum_{j=0}^n m_{i,j} W_j \quad \text{et} \quad W_i = \sum_{i=0}^n \tilde{m}_{i,j} V_j.$$

Nous étendons à présent le lemme 4.2 de [R2] de façon à contrôler les hauteurs de relations de dépendance aussi bien pour les V_j que les W_j.

LEMME 3.2. *Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, il existe $2(n+1)$ polynômes homogènes notés $P_0, \ldots, P_n, Q_0, \ldots, Q_n$ de $K[X_0, \ldots, X_{u+1}]$ de degré D dans lesquels le coefficient de X_{u+1}^D est 1, chacun égal à la puissance d'un polynôme irréductible de telle sorte que*

(1) *si B désigne la famille de tous leurs coefficients on a*

$$h(B) \leqslant h_\varphi(Z) + D(u+1)\log D(n+1)$$

(2) *pour tout* j, $0 \leqslant j \leqslant n$, *les polynômes* $P_j(V_0, \ldots, V_u, V_j)$ *et* $Q_j(V_0, \ldots, V_u, W_j)$ *sont éléments de l'idéal de* $\chi \circ \varphi(Z)$.

Démonstration. L'existence de polynômes satisfaisant la condition 2 est une conséquence immédiate du lemme précédent. En effet, ce dernier nous assure que P_μ convient avec $\mu_i = \delta_{ij}$ pour former P_j et $\mu_i = \tilde{m}_{j,i}$ pour Q_j. Il reste donc à estimer la hauteur des coefficients ainsi obtenus.

Pour P_j, nous sommes exactement dans la situation de la démonstration du lemme 4.2 de [R2] donc P_j est obtenu en spécialisant chaque variable de la forme éliminante f en un élément de la forme $aX_0 + bX_i$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a|, |b| \leqslant \max(D, 2)/2$ et $1 \leqslant i \leqslant u+1$.

En ce qui concerne Q_j, il faut faire un calcul différent pour la première forme linéaire, qui comporte *a priori* plus de termes. Toutefois, si nous la notons $L_j = X_{u+1}V_0 - \sum_{k=0}^n \tilde{m}_{j,k} V_k X_0$, on trouve *via* χ

$$\begin{aligned} L_j(M\cdot) &= X_{u+1} \sum_{i=0}^n m_{0,i} W_i \; - \left(\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \tilde{m}_{j,k} m_{k,i} W_i \right) X_0 \\ &= \left(\sum_{i=0}^n m_{0,i} W_i \right) X_{u+1} - W_j X_0 \\ &= \sum_{i=0}^n (m_{0,i} X_{u+1} - \delta_{ij} X_0) W_i. \end{aligned}$$

Par suite, Q_j s'obtient également en spécialisant chaque variable de f en un élément de la forme $aX_0 + bX_i$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a|, |b| \leqslant \max(D, 2)/2$ et $1 \leqslant i \leqslant u+1$.

Finalement, dans les deux cas, le calcul de hauteur est identique à celui de [R2] et donne le résultat annoncé. □

Nous appliquons ceci aux schémas Z_i: nous disposons donc de matrices M_i, d'automorphismes χ_i et de polynômes $P_j^{(i)}$ et $Q_j^{(i)}$, la famille de leurs coefficients étant désignée par B_i. Pour distinguer les facteurs du produit $(\mathbb{P}_K^n)^m$, les coordonnées du i-ème seront notées $W_0^{(i)}, \ldots, W_n^{(i)}$ ou $V_0^{(i)}, \ldots, V_n^{(i)}$ selon que l'on considère la source ou le but de χ_i. Par exemple, le polynôme $Q_j^{(i)}(V_0^{(i)}, \ldots, V_{u_i}^{(i)}, W_j^{(i)})$ est élément de l'idéal de $\chi_i \circ \varphi_i(Z_i)$.

Nous notons encore $w_j^{(i)}$ et $v_j^{(i)}$ les images respectives de $W_j^{(i)}/V_0^{(i)}$ et $V_j^{(i)}/V_0^{(i)}$ dans le corps des fonctions $K(Z_i)$ (de sorte qu'en particulier ces éléments sont liés par la relation matricielle $(v^{(i)}) = M_i(w^{(i)})$). Finalement, le morphisme fini $Z_i \to \mathbb{P}_K^{u_i}$ défini par $V_0^{(i)}, \ldots, V_{u_i}^{(i)}$ s'appelera π_i et $b_{i,j}$ sera l'entier tel que $Q_j^{(i)}$ est égal à un polynóme irréductible élevé à la puissance $b_{i,j}$.

Le but va à présent être de montrer la

PROPOSITION 3.3. *Dans le cadre décrit ci-dessus, il existe un indice* i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *et un polynôme homogène* $U \in K[V_0^{(i)}, \ldots, V_{u_i}^{(i)}]$ *tel que*

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

– *$\chi_i(x_i) \in V(U)$;*
– *$\chi_i(Y_i) \not\subset V(U)$;*
– *$\deg U \leqslant \Lambda^{3u\psi(u)}$ et*
– *$a_i h(U)$ est au plus $(8 \deg X)^{-1}\Lambda^{(3u+3)\psi(u)+3m-1}\left(\sum_{l=1}^m a_l\right)\max(h(X), 1)$.*

Pour démontrer le théorème 3.2 à partir de cette proposition, nous suivons exactement [R2, p. 119]. Les assertions 1 à 4 sont vérifiées de même et la cinquième s'obtient par

$$\begin{aligned} &D_i a_i h(U) + a_i D_i \Lambda^{3\psi(u)} \log D_i(n+1)(u_i+1) + a_i D_i\sqrt{n} + \Lambda^{3u\psi(u)} \sum_{i=1}^m a_i h(Y_i) \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2}\Lambda^{(3u+4)\psi(u)+3m-2}\left(\sum_{l=1}^m a_l\right)\max(h(X), 1) \end{aligned}$$

puisque $(3u+4)\psi(u) + 3m - 2 \leqslant (3u+3m+2)\psi(u) \leqslant (6u+2)\psi(u) = 2\psi(u-1)$.

La forme de cette proposition permet d'éviter de faire la construction générale dans un certain nombre de cas dégénérés.

On note $(x_0^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in K^{n+1}$ un choix de coordonnées projectives de $\varphi_i(x_i)$ et $(z_0^{(i)}, \dots, z_n^{(i)})$ de même pour $\chi_i \circ \varphi_i(x_i)$.

LEMME 3.3. *Pour démontrer la proposition précédente, on peut supposer que les trois assertions suivantes sont vérifiées pour chaque $1 \leqslant i \leqslant m$.*

(1) *Le morphisme $\pi_i\colon Z_i \to \mathbb{P}_K^{u_i}$ est étale au point x_i.*
(2) $z_0^{(i)} \neq 0$.
(3) *Pour tout j,* $\dfrac{\partial^{b_{i,j}} Q_j^{(i)}}{\partial X_{u_i+1}^{b_{i,j}}}\left(1, \frac{z_1^{(i)}}{z_0^{(i)}}, \dots, \frac{z_{u_i}^{(i)}}{z_0^{(i)}}, \frac{x_j^{(i)}}{z_0^{(i)}}\right) \neq 0$.

Démonstration. En effet, si ce n'était pas le cas, la proposition serait satisfaite avec pour U ou bien le discriminant de $P_{u_i+1}^{(i)}(V_0^{(i)}, \dots, V_{u_i}^{(i)}, \cdot)$ ou bien $V_0^{(i)}$ ou bien le résultant de $Q_j^{(i)}(V_0^{(i)}, \dots, V_{u_i}^{(i)}, \cdot)$ et de sa $b_{i,j}$-ème dérivée. On constate que ces polynômes sont tous de degré au plus $2D_i^2$ et de hauteur au plus $2D_i h(B_i) + 8u_i D_i^3 \leqslant 2D_i h(Y_i) + 16nu_i D_i^3$, ce qui donne facilement les estimations de la proposition (les majorations de degré et hauteur s'obtiennent en écrivant les deux résultants sous forme de déterminants d'ordre au plus $2D_i$ et dont les coefficients sont des polynômes homogènes en $u_i + 1$ variables, de degrés au plus D_i et ayant à leur tour pour coefficients des produits d'un élément de B_i par un entier de valeur absolue au plus $D_i^{b_{i,j}}$). □

Dorénavant, nous supposons que les assertions du lemme sont vérifiées. En changeant le choix des $x_j^{(i)}$ et $z_j^{(i)}$, nous pouvons donc imposer $z_0^{(i)} = 1$ et $(z^{(i)}) = M_i(x^{(i)})$. En outre, chacun des Y_i est un schéma intègre et a un point rationnel lisse x_i. Par conséquent, il est géométriquement intègre. Par suite, le produit $Y_1 \times \cdots \times Y_m$ est intègre.

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

A partir du paragraphe suivant, on note $\mathbb{P} = (\mathbb{P}^n_K)^m \times (\mathbb{P}^1_K)^{g(m-1)}$ et les coordonnées d'un facteur $\mathbb{P}^1_K$ seront $T^{(i)}_{j,0}$ et $T^{(i)}_{j,1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $1 \leqslant j \leqslant g$.

3.3. LE FAISCEAU INVERSIBLE

On considère le morphisme $\beta\colon A^m \to A^{m-1}$ donné sur les points par

$$\beta(x_1, \ldots, x_m) = (x_1^{a_1} x_2^{-a_2}, x_2^{a_2} x_3^{-a_3}, \ldots, x_{m-1}^{a_{m-1}} x_m^{-a_m}).$$

Nous avons besoin d'une compactification de A^m à laquelle on puisse étendre β. Pour cela, on part du graphe de β, qui est un sous-schéma fermé de $A^m \times A^{m-1}$, et l'on définit $\mathcal{A}$ comme son adhérence dans $\mathbb{P}$. Bien entendu, la première projection $\mathcal{A} \to (\mathbb{P}^n_K)^m$ est un isomorphisme au-dessus de A^m tandis que la seconde $\mathcal{A} \to (\mathbb{P}^1_K)^{g(m-1)}$ étend β. On verra donc A^m comme ouvert de $\mathcal{A}$. En particulier, on associe ainsi à $Y_1, \ldots, Y_m$ le sous-schéma fermé $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{A}$, adhérence de $Y_1 \times \cdots \times Y_m$ (de manière équivalente c'est l'adhérence du graphe de la restriction de β à $Y_1 \times \cdots \times Y_m$).

C'est sur ce schéma $\mathcal{Y}$ que nous allons travailler. Il faut noter que, par rapport à [R2], des complications surviennent du fait que $\mathcal{Y}$ est défini à l'aide des entiers a_i (dont les estimations ne doivent pas dépendre). En revanche, ce procédé fait que les faisceaux inversibles utilisés s'écrivent plus simplement: nous n'aurons en effet besoin de considérer que des restrictions à $\mathcal{Y}$ de faisceaux sur $\mathbb{P}$.

Pour écrire ces faisceaux, nous notons $p_i\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}^n_K$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $q_{i,j}\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}^1_K$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $1 \leqslant j \leqslant g$ les différentes projections. Pour $b \in \mathbb{Z}^m$ et $b' \in \mathbb{Z}$, nous posons

$$\mathcal{O}(b, b') = \bigotimes_{i=1}^{m} p_i^* \mathcal{O}(b_i) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} \bigotimes_{j=1}^{g} q_{i,j}^* \mathcal{O}(b')$$

considéré comme faisceau sur $\mathbb{P}$, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{Y}$. Avec cette convention, nous pouvons introduire le faisceau qui sera au centre de la démonstration: il est associé à un couple $(\varepsilon, d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ tel que $d\varepsilon \in \mathbb{Z}$ par $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d} = \mathcal{O}(-\varepsilon d a, d)$ (où a désigne le m-uplet $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$). Le paramètre d apparaissant ici est destiné à tendre vers l'infini: dans la suite les notations $\mathrm{o}(\cdot)$ et $\mathrm{O}(\cdot)$ se réfèrent à cette limite.

La construction de $\mathcal{Y}$ est évidemment donnée de manière que la hauteur associée à $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ permette d'exploiter les hypothèses sur les x_i (voir plus bas); à part ce fait, on en emploiera essentiellement les deux conséquences suivantes:

- le faisceau $\mathcal{O}(2a, -1)$ sur $\mathcal{A}$ a une section globale s_0 qui ne s'annule en aucun point de A^m.

  En effet elle s'obtient facilement à l'aide des relations

$$T^{(i)}_{j,1} W_0^{(i)a_i} W_j^{(i+1)a_{i+1}} = T^{(i)}_{j,0} W_j^{(i)a_i} W_0^{(i+1)a_{i+1}}$$

valables sur $\mathcal{A}$ pour tous i, j (avec $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $1 \leqslant j \leqslant g$). De manière précise, pour $\omega \in \{0,1\}^{g(m-1)}$, on impose que la restriction de s_0 à l'ouvert $\mathcal{A} \cap (\mathbb{P}^n)^m \times \prod_{i,j} D_+(T^{(i)}_{j,\omega_{i,j}})$ soit

$$W_0^{(1)^{a_1}} W_0^{(m)^{a_m}} \prod_{i=1}^{m-1} \left(W_{\omega_i}^{(i)^{a_i}} W_{\overline{\omega_i}}^{(i+1)^{a_{i+1}}} \prod_{j=1}^{g} T^{(i)}_{j,\omega_{i,j}}{}^{-1} \right)$$

dont on vérifie qu'elle ne s'annule pas sur A^m (qui est contenu dans tous ces ouverts).

– on a la minoration du nombre d'intersection suivant: $[\mathcal{O}(0,1)]^u \cdot \mathcal{Y} \geqslant \prod_{i=1}^m a_i^{u_i}$.

Cela découle de [Vo]: par homogénéité ([Vo, théorème 5.5]) on peut supposer $a_i = 1$ pour chaque i; dans ce cas il reste à voir que la restriction de β à $Y_1 \times \cdots \times Y_m$ est génériquement finie: cela suit de [Vo, 5.1] ou bien d'une démonstration entièrement identique à [R2, lemme 2.1] ($\mathcal{Y}$ n'intervient pas). C'est ici que l'on utilise $Y_i \not\subset Z_X$.

Avec ces préliminaires, nous pouvons énoncer le résultat-clef sur le faisceau $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$, qui exprime l'existence de suffisamment de sections globales.

PROPOSITION 3.4. *Si* $\varepsilon \leqslant u^{-1}(2m)^{-u} \prod_{i=1}^m D_i^{-1}$, *il existe* $d_0 \in \mathbb{N}$ *tel que si* $d_0 \mid d$

$$\dim_K \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}) \geqslant \frac{d^u}{4u!} \prod_{i=1}^m a_i^{u_i} + \mathrm{O}(d^{u-1}).$$

Démonstration. Notons ici $\mathcal{N}_a = \mathcal{O}(a, 0)$ de sorte que l'on a

$$[\mathcal{N}_a]^u \cdot \mathcal{Y} = u! \prod_{i=1}^m \frac{D_i}{u_i!} a_i^{u_i}.$$

On considère un sous-schéma fermé H de $\mathcal{Y}$ d'idéal $\mathcal{N}_a^{\otimes -1}$ et tel que $s_{0|H} \neq 0$ (il suffit de prendre une section hyperplane rencontrant A^m). Pour tous $d_0 \mid d$ on a:

$$\dim_K \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}) \geqslant \dim_K \Gamma\left(\mathcal{Y}, \mathcal{O}\left(\frac{d}{d_0} a, d\right)\right) - \sum_{j=-d/d_0}^{d\varepsilon - 1} \dim_K \Gamma(H, \mathcal{O}(-ja, d)).$$

Grâce à $s_{0|H}$, on a une injection $\mathcal{O}(-ja, d) \hookrightarrow \mathcal{N}_a^{\otimes 2d-j}$ qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} &\dim_K \Gamma(H, \mathcal{O}(-ja, d)) \\ &\quad \leqslant \left(1 + \frac{1}{2d_0}\right)^{u-1} (2d)^{u-1} u \prod_{i=1}^m \frac{D_i}{u_i!} a_i^{u_i} + \mathrm{O}(d^{u-2}) \\ &\quad \leqslant \left(1 + \frac{1}{2d_0}\right)^{u-1} \frac{d^{u-1}}{2\varepsilon u!} \prod_{i=1}^m a_i^{u_i} + \mathrm{O}(d^{u-2}) \end{aligned}$$

(on utilise ici l'hypothèse sur ε) tandis que

$$\begin{aligned}
&\dim_K \Gamma\left(\mathcal{Y}, \mathcal{O}\left(\frac{d}{d_0}a, d\right)\right)\\
&\quad = \frac{(d/d_0)^u}{u!}[\mathcal{O}(a, d_0)]^u \cdot \mathcal{Y} + \mathrm{O}(d^{u-1})\\
&\quad = \frac{d^u}{u!}\left([\mathcal{O}(0, 1)]^u \cdot \mathcal{Y} + P_1\left(\frac{1}{d_0}\right)\right) + \mathrm{O}(d^{u-1})\\
&\quad \geqslant \frac{d^u}{u!}\left(\prod_{i=1}^m a_i^{u_i}\right)\left(1 + P_2\left(\frac{1}{d_0}\right)\right) + \mathrm{O}(d^{u-1})
\end{aligned}$$

où P_1 et P_2 sont des éléments de $T\mathbb{Q}[T]$ indépendants de d. En combinant nos estimations, on peut donc minorer $\dim_K \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$ par

$$\frac{d^u}{u!}\left(\prod_{i=1}^m a_i^{u_i}\right)\left(1 + P_2\left(\frac{1}{d_0}\right) - \left(1 + \frac{1}{2d_0}\right)^{u-1} \sum_{j=-d/d_0}^{d\varepsilon-1} \frac{1}{2d\varepsilon}\right) + \mathrm{O}(d^{u-1})$$

et ceci donne le résultat en fixant d_0 assez grand. □

Désormais, on considère un entier d_0 fixé comme dans l'énoncé et l'on supposera toujours que d est divisible par d_0. On pose également $\varepsilon = u^{-1}(2m)^{-u} \prod_{i=1}^m D_i^{-1}$.

3.4. SECTION GLOBALE DE PETITE HAUTEUR

Nous allons exploiter la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d} \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{k\in[0,n]^m} \mathcal{O}(da, d) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{k_1,k_2\in[0,n]^m} \mathcal{O}(d(4+\varepsilon)a, 0)$$

où les morphismes sont définis par

$$\Phi(s) = \left(s \otimes \bigotimes_{i=1}^m W_{k_i}^{(i)\,d(1+\varepsilon)a_i}\right)_k$$

et

$$\Psi((s_k)_k) = \left(s_{k_1} \otimes s_0^{\otimes d} \otimes \bigotimes_{i=1}^m W_{k_{2,i}}^{(i)\;d(1+\varepsilon)a_i} - s_{k_2} \otimes s_0^{\otimes d} \otimes \bigotimes_{i=1}^m W_{k_{1,i}}^{(i)\;d(1+\varepsilon)a_i}\right)_{k_1,k_2},$$

s_0 étant la section de $\mathcal{O}(2a, -1)$ définie au paragraphe précédent. Il est clair que cette suite est exacte sur $\mathcal{A}$ et il en va de même de sa restriction à $\mathcal{Y}$ puisque la multiplication par s_0 reste injective.

En premier lieu, Φ nous permet de représenter une section de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ par des polynômes. En effet, si d est assez grand, l'application $\Theta\colon \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{O}(da, d)) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}(da, d))$ est surjective et l'espace de gauche s'identifie avec l'espace des polynômes en W, T multihomogènes de multidegré (da, d) (avec la même convention d'écriture que pour les faisceaux). Nous choisissons, une fois pour toutes, une famille de monômes de multidegré (da, d) en W, T dont l'image par Θ est une base de $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}(da, d))$ sur K et nous notons E l'espace qu'ils engendrent.

Nous dirons qu'une section $s \in \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$ est représentée par une famille de polynômes $F_k \in E$, $k \in [0, n]^m$, si $\Phi(s) = (\Theta(F_k))_k$. Avec cette convention, le but de ce paragraphe est d'établir

PROPOSITION 3.5. *Il existe une section $s \in \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$ non nulle représentée par une famille $\mathcal{F} = (F_k)_k$ dont la hauteur vérifie*

$$h(\mathcal{F}) \leqslant d2^{gm+2}(4+\varepsilon)(3m)^u\left(\prod_{i=1}^m D_i\right)\sum_{i=1}^m a_i(h(B_i) + \log(2u_i+2)) + \mathrm{o}(d).$$

L'application Ψ ci-dessus fournit le système à partir duquel un lemme de Siegel donnera le résultat: l'espace des inconnues est $F = \bigoplus_k E$, celui des solutions $F' = \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$. Ainsi l'exposant de Dirichlet du système sera

$$\zeta = \frac{\dim F - \dim F'}{\dim F'} \leqslant \frac{\dim F}{\dim F'}.$$

Grâce à s_0 on a une injection $\mathcal{O}(da, d) \hookrightarrow \mathcal{O}(3da, 0)$ qui permet de majorer $\dim F = (n+1)^m \dim E$ par

$$(n+1)^m \dim \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}(3da, 0)) = (n+1)^m \prod_{i=1}^m \frac{D_i}{u_i!}(3da_i)^{u_i} + \mathrm{O}(d^{u-1}).$$

D'autre part, le choix de ε permet d'appliquer la proposition 3.4 qui minore $\dim F'$ et l'on obtient

$$\zeta \leqslant 4(n+1)^m(3m)^u \prod_{i=1}^m D_i + \mathrm{o}(1).$$

Primitivement le système qui nous intéresse est donné par $\Psi(\Theta(F_k)_k) = 0$. Dans cette écriture le terme en facteur d'une inconnue donnée (un coefficient de l'un des F_k) est de la forme $\pm\Theta(\mathfrak{m})$ où $\mathfrak{m}$ est un monôme (sans coefficient) de multidegré $d(4+\varepsilon)a$ en W (puisque la puissance de s_0 dans Ψ est choisie de sorte à faire disparaître les variables T). Ici, et dans la suite, nous notons encore Θ l'application $\Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{O}(b, b')) \to \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}(b, b'))$ pour tous b, b'.

Pour transformer ce système, nous appliquerons la technique de [R2, paragraphe 5.5]. Ainsi grâce au lemme 5.3 pour un monôme $\mathfrak{m}$ comme ci-dessus on peut écrire

$$\Theta(\mathfrak{m}) = \Theta\left(\sum_{k\in\mathcal{K}} Q_{\mathfrak{m},k}(\hat{V})W^{[k]}\right)$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

où l'on note $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{N}^{(n+1)m} \mid k_{i,j} < D_i\}$, $W^{[k]} = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=0}^{n} W_j^{(i)^{k_{i,j}}}$ et $\hat{V}$ la famille des $V_j^{(i)}$ avec $0 \leqslant j \leqslant u_i$, de telle sorte que

$$h((Q_{\mathrm{m},k})_{\mathrm{m},k}) \leqslant d(4+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m} a_i(h(B_i) + \log(2u_i + 2)) + \mathrm{o}(d).$$

Il est loisible d'appliquer ce lemme puisque les $W_j^{(i)}$ satisfont des relations de dépendance relativement à $\hat{V}$, données par le lemme 3.2, dont $h(B_i)$ borne la hauteur. Le seul changement concerne le nombre de variables mais ici le terme correspondant disparaît dans le $o(d)$.

Pour conclure, il faut multiplier toutes les équations par un polynôme R_Y choisi de sorte que, pour tout $k \in \mathcal{K}$, on puisse écrire

$$\Theta(R_Y W^{[k]}) = \Theta\left(\sum_{l \in \prod[0, D_i - 1]} S_{k,l}(\hat{V}) \prod_{i=1}^{m} V_{u_i+1}^{(i)\ l_i}\right).$$

Puisque les coefficients apparaissant ici ne dépendent pas de d, cette manipulation ne modifie la hauteur que par un terme $o(d)$ et, par suite, dans le système final la hauteur d'une ligne se majore par

$$d(4+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m} a_i(h(B_i) + \log(2u_i + 2)) + \mathrm{o}(d)$$

(les lignes du système sont obtenues comme coefficients des monômes en $\hat{V}$ qui sont linéairement indépendants). Par application du lemme de Siegel ([R2, lemme 5.4]), on trouve une famille $\mathcal{F} \neq 0$ avec

$$h(\mathcal{F}) \leqslant \zeta d(4+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m} a_i(h(B_i) + \log(2u_i + 2)) + \mathrm{o}(d)$$

et la majoration de ζ donnée ci-dessus entraîne la proposition.

3.5. ESTIMATION LOCALE DES DÉRIVÉES

Soit P un polynôme à coefficients dans K en q groupes de variables. On note n_i le nombre de variables dans le i-ème groupe et d_i le degré de P en celles-ci. Alors pour une place v et tout entier $b \geqslant 1$ on a

$$|P|_v \leqslant \left(\prod_{i=1}^{q}(n_i+1)^{3d_i/2}\right)^{\varepsilon_v} |P^b|_v^{1/b}$$

(on procède comme dans [L, ch. 3, prop. 2.12] en utilisant en une place infinie $|P|_v \leqslant \left(\prod_{i=1}^{q}(n_i+1)^{d_i}\right)m(P)$ pour la mesure de Mahler $m(P)$ de P). On rappelle que $\varepsilon_v = 1$ si v est infinie et $\varepsilon_v = 0$ sinon.

On a alors la généralisation suivante du lemme 6.1 de [R2].

LEMMA 3.4. *Soient u et b des entiers $\geqslant 1$, $X_1 \dots, X_u$, Y des indéterminées, P un polynôme de $K[X, Y] = K[X_1, \dots, X_u, Y]$ qui est la puissance b-ème d'un élément de cet anneau, L une extension algébrique de $K(X)$ et $y \in L$ un élément tel que $P(X, y) = 0$. On suppose qu'il existe un morphisme de K-algèbres φ: $K[X, y] \to K$ tel que $\varphi(X_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant u$ et on désigne encore par φ son extension lorsqu'on localise en* $\mathrm{Ker}(\varphi)$. *On note $(d_i\colon L \to L)_{1 \leqslant i \leqslant u}$ les K-dérivations caractérisées par $d_i(X_j) = \delta_{ij}$ et lorsque $\kappa \in \mathbb{N}^u$ on note $d^\kappa = d_1^{\kappa_1} \dots d_u^{\kappa_u}$ et $\partial^\kappa = (1/\kappa!)d^\kappa$. On pose $R = (1/b!)\partial^b P/\partial Y^b$ et on suppose $\varphi(R(X, y)) \neq 0$. Soient maintenant v une place de K, $a \in K$ tel que $|\varphi(y)|_v \leqslant |a|_v$ et $\kappa \in \mathbb{N}^u$ $\{0\}$. Alors on a*

$$|\varphi(\partial^\kappa y)|_v \leqslant |a|_v \big(f_1(u, D)(2u+2)^{3D/2} \big)^{\varepsilon_v|\kappa|} \left(\frac{|P(X, aY)|_v}{|a^b\varphi(R(X, y))|_v} \right)^{(2|\kappa|-1)/b}$$

où D majore à la fois $\deg_X P$ *et* $\deg_Y P$ *et*

$$f_1(u, D) = (2u+4)D\binom{D+u}{u}^2 \binom{D+1}{2}^2.$$

Démonstration. Pour $a = 1$ et $b = 1$ le lemme 6.1 de [R2] donne l'estimation sans le facteur $(2u+2)^{3D/2}$. Pour $a = 1$ et $b \geqslant 2$, on écrit $P = P_1{}^b$ et l'on applique ce résultat à P_1. La formule pour P s'en déduit car si $R_1 = \partial P_1/\partial Y$ on a en dérivant $R = R_1^b + P_1 Q$ avec un certain polynôme Q donc $R(X, y) = R_1(X, y)^b$ et par ailleurs $|P_1|_v \leqslant (2u+2)^{3\varepsilon_v D/2b}|P|_v^{1/b}$ puisque P_1 est de degré au plus D/b en chacun des deux groupes de variables. Enfin on passe facilement au cas général en remplaçant y par y/a et P par le polynôme $P(X, aY)$. □

L'introduction du paramètre b nous permet d'appliquer ce résultat aux polynômes $Q_j^{(i)}$ (voir ci-dessous). L'utilité de a apparaîtra au paragraphe suivant: nous y majorons le produit des dérivées de différents facteurs qui ne sont pas de norme au plus un tandis que c'est le cas de leur produit.

Puisque π est étale en x, on peut trouver un voisinage U de x tel que $\Omega_{U/K}$ ait pour base la famille $(dv_j^{(i)})_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant u_i$. On note $\partial_{v_j^{(i)}}$ les dérivations correspondantes $(\partial_{v_j^{(i)}}(v_{j'}^{(i')}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'})$ et on pose pour $l \in \mathbb{N}^{u_i}$

$$\partial^{i,l} = \prod_{j=1}^{u_i} \frac{1}{l_j!} \left(\partial_{v_j^{(i)}}\right)^{l_j}.$$

Par application du lemme précédent, on a:

COROLLAIRE 3.1. *Si v est une place de K, $1 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $l \in \mathbb{N}^{u_i}$ et $\eta \in \{-1, 1\}$ on a*

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}&\left|\partial^{i,l}\left(w_j^{(i)\eta}\right)(x)\right|_v\\&\quad\leqslant \left|x_j^{(i)\eta}\right|_v f_4(u_i,D_i)^{\varepsilon_v|l|}\left(\frac{\left|Q_j^{(i)}\left(1,X_1+z_1^{(i)},\ldots,X_{u_i}+z_{u_i}^{(i)},x_j^{(i)}Y\right)\right|_v}{\left|\dfrac{x_j^{(i)b_{i,j}}}{b_{i,j}!}\dfrac{\partial^{b_{i,j}}Q_j^{(i)}}{X_{u_i+1}^{b_{i,j}}}\left(1,z_1^{(i)},\ldots,z_{u_i}^{(i)},x_j^{(i)}\right)\right|_v}\right)^{(2|l|-1)/b_{i,j}}\end{aligned}$$

où $f_4(u,D)=f_1(u,D)(2u+2)^{3D/2}$.

Démonstration. Pour $\eta=1$ c'est une application directe du lemme avec $X_k=v_k^{(i)}-z_k^{(i)}$ $(1\leqslant k\leqslant u_i)$, $y=w_j^{(i)}$ et $a=x_j^{(i)}$ (φ étant l'évaluation en x). Pour $\eta=-1$, il faut considérer le polynôme réciproque de $Q_j^{(i)}$ en X_{u_i+1} et on a le résultat en reliant sa dérivée à celle de $Q_j^{(i)}$. □

Ceci nous amène à poser $(1\leqslant i\leqslant m)$

$$c_i=\prod_{j=0}^{n}\left(\frac{x_j^{(i)b_{i,j}}}{b_{i,j}!}\frac{\partial^{b_{i,j}}Q_j^{(i)}}{X_{u_i+1}^{b_{i,j}}}\left(1,z_1^{(i)},\ldots,z_{u_i}^{(i)},x_j^{(i)}\right)\right)^{1/b_{i,j}}.$$

LEMME 3.5. *Sous les hypothèses du corollaire précédent*

$$\left|c_i^{2|l|}\partial^{i,l}\left(w_j^{(i)\eta}\right)(x)\right|_v\leqslant\left|x_j^{(i)\eta}\right|_v f_5(u_i,D_i,n)^{\varepsilon_v|l|}\left(|B_i|_v\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|x_k^{(i)}\right|_v^{D_i}\right)^{2(n+1)|l|}$$

où

$$f_5(u,D,n)=f_4(u,D)\binom{D+u}{u}^2 4^D\binom{D+u+1}{u+2}^{2n}((n+1)D)^{2(n+1)D}.$$

Démonstration. L'un des facteurs de c_i est utilisé pour supprimer le dénominateur apparaissant dans le corollaire. Il reste un produit de facteurs à majorer: les estimations procèdent comme dans le lemme 6.2 de [R2] excepté que l'on utilise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_j^{(i)b_{i,j}}}{b_{i,j}!}\frac{\partial^{b_{i,j}}Q_j^{(i)}}{X_{u_i+1}^{b_{i,j}}}\left(1,z_1^{(i)},\ldots,z_{u_i}^{(i)},x_j^{(i)}\right)\right|_v\\&\quad\leqslant\binom{D_i+u_i+1}{u_i+b_{i,j}+1}^{\varepsilon_v}|B_i|_v\max\left(1,\left|z_1^{(i)}\right|_v,\ldots,\left|z_{u_i}^{(i)}\right|_v,\left|x_j^{(i)}\right|_v\right)^{D_i}\end{aligned}$$

puis $\binom{D_i+u_i+1}{u_i+b_{i,j}+1}\leqslant\binom{D_i+u_i+1}{u_i+2}^{b_{i,j}}$. En utilisant encore $\binom{D_i+u_i+1}{u_i+2}\leqslant 2^{D_i}\binom{D_i+u_i}{u_i}$, ceci majore la quantité de l'énoncé par

$$\begin{aligned}&\left|x_j^{(i)\eta}\right|_v\left(f_5(u_i,D_i,n)((n+1)D)^{-2(n+1)D}\right)^{\varepsilon_v|l|}\\&\quad\times\left(|B_i|_v\max\left(1,\left|z_1^{(i)}\right|_v,\ldots,\left|z_{u_i}^{(i)}\right|_v,\left|x_j^{(i)}\right|_v\right)^{D_i}\right)^{2(n+1)|l|}\end{aligned}$$

et l'on conclut par $\left|z_j^{(i)}\right|_v\leqslant(n+1)D_i\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|x_k^{(i)}\right|_v$ puisque $(z^{(i)})=M_i(x^{(i)})$. □

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

3.6. MINORATION DE L'INDICE

Nous notons σ l'indice en x et relativement à $3da$ de la section $s \in \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$ donnée par la proposition 3.5. Par définition, cela signifie que si s' est une section de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ sur un voisinage de x qui ne s'annule pas en x et si $s = \alpha s'$ alors il existe $\kappa \in \prod_{i=1}^m \mathbb{N}^{u_i}$ tel que $\sum_{i=1}^m |\kappa_i|/3da_i = \sigma$ et, si $D = \prod_{i=1}^m \partial^{i,\kappa_i}$, alors $D\alpha(x) \neq 0$ et les dérivées d'ordre inférieur s'annulent.

Nous montrons alors

PROPOSITION 3.6. *L'indice σ vérifie la minoration*

$$\sigma \geqslant \frac{\varepsilon}{12(n+1)\max_i D_i} + \mathrm{o}(1).$$

Nous introduisons des notations analogues aux $w_j^{(i)}$ pour le deuxième groupe de facteurs de $\mathbb{P}$: $\tau_{l,l'}^{(i)}$ sera l'image de $T_{l,l'}^{(i)}/T_{l,0}^{(i)}$ dans le corps des functions de $\mathcal{Y}$. Nous désignons aussi par $(t_{l,0}^{(i)}, t_{l,1}^{(i)})_{i,l}$ un choix de coordonnées pour $\beta(x) \in (\mathbb{P}_K^1)^{g(m-1)}$ de sorte qu'en particulier $\tau_{l,1}^{(i)}(x) = t_{l,1}^{(i)}/t_{l,0}^{(i)}$.

De la définition des polynômes F_k représentant s, il suit que la section α de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ sur un voisinage de x définie par

$$\alpha = \left(\prod_{i=1}^m w_{k_i}^{(i)\,(1+\varepsilon)da_i}\right)^{-1} F_k(w,\tau)$$

ne dépend pas de l'indice $k \in [0,n]^m$ et, de plus, α peut être utilisé pour définir l'indice de s. Il existe donc κ puis D comme dans la définition ci-dessus et cela permet d'écrire pour tous $k, j \in [0,n]^m$ et $j' \in \{0,1\}^{g(m-1)}$

$$D\alpha(x) = \frac{\prod_{i=1}^m x_{j_i}^{(i)\,da_i} \prod_{i=1}^{m-1}\prod_{l=1}^g t_{l,j'_{i,l}}^{(i)\ d}}{\prod_{i=1}^m x_{k_i}^{(i)\,(1+\varepsilon)da_i}} D\left(F_k\left(\frac{w}{w_j}, \frac{\tau}{\tau_{j'}}\right)\right)(x)$$

où la notation sous-entend que le i-ème groupe de w/w_j est $w_0^{(i)}/w_{j_i}^{(i)}, \dots, w_n^{(i)}/w_{j_i}^{(i)}$ et de même pour τ et j'.

Nous pouvons maintenant relier ce calcul à la quantité

$$\phi = d\sum_{i=1}^{m-1} \left|x_i^{a_i} x_{i+1}^{-a_{i+1}}\right| - d\varepsilon \sum_{i=1}^m a_i|x_i|$$

qui est la valeur en x de la hauteur associée à $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ (compte tenu des plongements choisis) et qui vérifie, d'après le choix des entiers a_i et la valeur de c_1,

$$\phi \leqslant d\left(\frac{2}{c_1} - \varepsilon\right) \sum_{i=1}^m a_i|x_i| \leqslant -\frac{3}{4} d\varepsilon \sum_{i=1}^m a_i|x_i|.$$

En effet

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{g} dh\left(t_{l,0}^{(i)}, t_{l,1}^{(i)}\right) - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon d a_i h\left(x_0^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)\\ &= \sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\left|\prod_{i=1}^{m} x_{j_{v,i}}^{(i)\,-\varepsilon d a_i}\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{l=1}^{g} t_{l,j'_{v,i,l}}^{(i)\ d}\right|_v\end{aligned}$$

où les indices j_v et j'_v sont choisis de sorte que

$$\left|x_{j_{v,i}}^{(i)}\right|_v = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|x_k^{(i)}\right|_v \quad \text{et} \quad \left|t_{l,j'_{v,i,l}}^{(i)}\right|_v = \max\left(\left|t_{l,0}^{(i)}\right|_v, \left|t_{l,1}^{(i)}\right|_v\right)$$

Par conséquent, grâce à la formule du produit pour $D\alpha(x)\in K^\times$, on a

$$\begin{aligned}-\phi &= \sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\left|D\left(F_{j_v}\left(\frac{w}{w_{j_v}}, \frac{\tau}{\tau_{j'_v}}\right)\right)(x)\right|_v\\ &\leqslant h(\mathcal{F}) + \log\dim E + \sum_v \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\max_{\mathfrak{m}}\left|D\left(\mathfrak{m}\left(\frac{w}{w_{j_v}}, \frac{\tau}{\tau_{j'_v}}\right)\right)(x)\right|_v\end{aligned}$$

où $\mathfrak{m}$ parcourt les éléments de la base de E que l'on a fixée, qui sont des mon ômes de multidegré (da, d). Puisque si $\beta, \gamma \in \{0,1\}^g$

$$\prod_{l=1}^{g}\frac{\tau_{l,\beta_l}^{(i)}}{\tau_{l,\gamma_l}^{(i)}} = \left(\frac{w_\beta^{(i)}}{w_\gamma^{(i)}}\right)^{a_i}\left(\frac{w_{\bar\beta}^{(i+1)}}{w_{\bar\gamma}^{(i+1)}}\right)^{a_{i+1}}$$

on peut écrire

$$\mathfrak{m}\left(\frac{w}{w_{j_v}}, \frac{\tau}{\tau_{j'_v}}\right) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{\lambda=1}^{6da_i} w_{v_\lambda}^{(i)\eta_\lambda}$$

avec $v_\lambda \in [0,n]$ et $\eta_\lambda \in \{-1,1\}$. Par la formule de Leibniz,

$$D\left(\mathfrak{m}\left(\frac{w}{w_{j_v}}, \frac{\tau}{\tau_{j'_v}}\right)\right) = \prod_{i=1}^{m}\sum_{(l_\lambda)}\prod_{\lambda=1}^{6da_i}\partial^{i,l_\lambda}\left(w_{v_\lambda}^{(i)\eta_\lambda}\right)$$

où la somme est sur toutes les familles d'éléments $l_\lambda \in \mathbb{N}^{u_i}$ avec $\sum_{\lambda=1}^{6da_i} l_\lambda = \kappa_i$. Le nombre de telles familles est au plus $2^{|\kappa_i|+6da_iu_i}$ tandis que la valeur absolue de la dérivée est majorée par le lemme 3.5. En remarquant qu'il résulte du choix de j_v et j'_v que

$$\left|\prod_{i=1}^{m}\prod_{\lambda=1}^{6da_i} w_{v_\lambda}^{(i)\eta_\lambda}(x)\right|_v \leqslant 1$$

puis en utilisant la formule du produit pour les c_i on aboutit à

$$\begin{aligned}-\phi \leqslant h(\mathcal{F}) + \log\dim E + \sum_{i=1}^{m}(6da_iu_i\log 2 + |\kappa_i|(\log 2f_5(u_i, D_i, n) +\\ + 2(n+1)h(B_i) + 2(n+1)D_i|x_i|)).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

En faisant encore intervenir la majoration de ϕ, le fait que $\dim E = \mathrm{o}(e^d)$ et l'inégalité $|\kappa_i| \leqslant 3da_i\sigma$, cela donne

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{4}\varepsilon - 6(n+1)\sigma \max_i D_i\right)\sum_{i=1}^{m} a_i|x_i| \\ &\quad\leqslant \frac{h(\mathcal{F})}{d} + \sum_{i=1}^{m} a_i(6u_i\log 2 + 3\sigma\log 2f_5(u_i, D_i, n) + \\ &\qquad + 6(n+1)\sigma h(B_i)) + \mathrm{o}(1).\end{aligned}$$

On remarque que l'on peut facilement écrire $\log 2f_5(u_i, D_i, n) \leqslant 8(n+1)D_i \times \log(n+1)D_i$. Nous concluons en raisonnant par l'absurde c'est-à-dire que nous supposons $\sigma < \varepsilon(12(n+1)\max_i D_i)^{-1}$; alors

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{4}c_3\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \leqslant \frac{h(\mathcal{F})}{d} + \sum_{i=1}^{m} a_i\Big(6u_i\log 2 + 2\varepsilon\log(n+1)D_i + \frac{\varepsilon}{2}h(B_i)\Big) + \\ + \mathrm{o}(1).\end{aligned}$$

Vu la valeur de c_3, nous obtenons facilement une contradiction en remarquant que $\varepsilon^{-1} \leqslant \Lambda^{\psi(u)+2}$ et en utilisant le

LEMME 3.6. *Les majorations suivantes sont vérifiées:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(h(B_i) + \Lambda) \leqslant \Lambda^{2\psi(u)}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\max(h(X), 1)$$

et

$$\frac{h(\mathcal{F})}{d} \leqslant (32m\deg X)^{-1}\Lambda^{3\psi(u)+3m-1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\max(h(X), 1) + \mathrm{o}(1).$$

Démonstration. Pour la première inégalité, $h(B_i)$ est majoré par le lemme 3.2 tandis que $D_i(u_i+1)\log D_i(n+1) + \Lambda \leqslant \frac{1}{2}\Lambda^{2\psi(u)}$ en majorant largement. La seconde s'en déduit si l'on note que, vu la valeur de Λ, on a $32m(\deg X)^{m+1}2^{gm+2}(4+\varepsilon)(3m)^u \leqslant \Lambda^{3m}$. □

3.7. THÉORÈME DU PRODUIT

Nous allons appliquer le théorème du produit au but du morphisme fini $\pi\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{P}_K^{u_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{u_m}$. Tout d'abord, on remplace s par une section sur ce but, *via* un calcul de norme.

LEMME 3.7. *Il existe une section globale G de $\mathcal{O}\big(3d\big(\prod_{i=1}^m D_i\big)a\big)$ sur $\mathbb{P}_K^{u_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{u_m}$ d'indice au moins égal à σ au point $\pi(x)$ relativement à $3da$ et telle que*

$$h(G) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{m} D_i\right)\left(h(\mathcal{F}) + 3d\sum_{i=1}^{m} a_i(h(B_i) + \log(2u_i+2))\right) + \mathrm{o}(d).$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. La section $s \otimes s_0^{\otimes d} \otimes \bigotimes_{i=1}^m W_0^{(i)\,(1+\varepsilon)da_i} \in \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}(3da, 0))$ est représentée par un polynôme en W de même hauteur que F_0. En appliquant le lemme 5.3 de [R2] à ce polynôme, elle est également représentée par un polynôme de la forme $\sum_{k\in\mathcal{K}} G_k(\hat{V})W^{[k]}$ avec

$$h((G_k)_{k\in\mathcal{K}}) \leqslant h(F_0) + 3d\sum_{i=1}^m a_i(h(B_i) + \log(2u_i + 2)) + \mathrm{o}(d).$$

Il en découle que la norme de $\sum_{k\in\mathcal{K}} G_k(\hat{v})w^{[k]}$ s'écrit $G(\hat{v})$ pour un polynôme satisfaisant toutes les conditions de l'énoncé. $\square$

Nous appliquons maintenant au polynôme G ainsi obtenu le théorème du produit effectif suivant:

THÉORÈME 3.7. *Soient $(x_1', \dots, x_m')$ un point rationnel de $\mathbb{P}_K^{u_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{u_m}$ et $u = u_1 + \cdots + u_m$. On considère un polynôme multihomogène G de multidegré $\delta' \in (\mathbb{N} \setminus 0)^m$. On suppose que*

(1) *G s'annule en x avec un indice supérieur à σ_0 par rapport à $(\delta_1', \dots, \delta_m')$,*

(2) $\dfrac{\delta_i'}{\delta_{i+1}'} \geqslant \left(\dfrac{m}{\sigma_0}\right)^u$ *et*

(3) $\dfrac{\sigma_0}{m} < \left(\dfrac{\log(u+1)}{2u^2}\right)^u$.

Alors il existe un indice i et un polynôme non nul U homogène en $W_0, \dots, W_{u_i}$ tel que

(1) $x_i' \in V(U)$,

(2) $\deg U \leqslant \left(\dfrac{m}{\sigma_0}\right)^u$ *et*

(3)
$$\begin{aligned}\delta_i' h(U) \leqslant u_i\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u \Bigg[h(G) + \sum_{l=1}^m \Big(\delta_l'(u_l \log(u_l+1) + {}\\ + \log 2) + \sqrt{u_l}\Big) + \frac{u-1}{2}\log|\delta'| \Bigg] + {}\\ + \delta_i'\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u (u_i+1)\log\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u (u_i+1) + \delta_i' \log\binom{\deg U + u_i}{u_i}.\end{aligned}$$

Démonstration. C'est le théorème 7.1 de [R2] dans lequel on a de plus tenu compte de la majoration du nombre de Stoll donnée avant son énoncé. $\square$

Pour appliquer cet énoncé à G, nous choisissons $x' = \pi(x)$, $\delta' = 3d(\prod_{i=1}^m D_i)a$ et $\sigma_0 = m\Lambda^{-3\psi(u)}$. L'indice de G par rapport à δ' est au moins

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^m D_i\right)^{-1}\sigma \geqslant \frac{\varepsilon}{12(n+1)(\prod_{i=1}^m D_i)\max_i D_i}\\ = \left(12u(2m)^u(n+1)\left(\prod_{i=1}^m D_i\right)^2 \max_i D_i\right)^{-1} \geqslant \sigma_0.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

On a d'une part $\delta'_i/\delta'_{i+1} = a_i/a_{i+1} \geqslant c_2 \geqslant (m\sigma_0^{-1})^u$ et d'autre part $\sigma_0/m \leqslant \Lambda^{-3} \leqslant (2m^2 \dim^2 X)^{-m\dim X} \leqslant (2u^2)^{-u}$. Ceci montre que toutes les hypothèses sont satisfaites et l'on obtient donc un polynôme U vérifiant les conditions de la proposition 3.3 si, pour la hauteur, on utilise les estimations du lemme 3.6 pour le terme principal (provenant de $h(\mathcal{F})$) et si l'on traite les termes secondaires comme dans [R2].

4. Inégalité de Mumford

D'après [DP], on connaît l'existence d'une fonction q de deux variables, ne dépendant que de l'entier g, telle que pour tout sous-schéma fermé intègre X de A

$$\mathrm{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \mid |x| \leqslant q(\dim X, \deg X)^{-1}\} \leqslant q(\dim X, \deg X).$$

Quitte à l'augmenter, nous allons supposer que cette fonction q est croissante en chacune de ses variables et que pour $1 \leqslant d \leqslant g$ et $D \geqslant 1$ on a $q(d-1, 2^g D^{d+2}) \leqslant q(d, D)$.

Nous introduisons ensuite une fonction f de trois variables par $f(r, d, D) = \left((2^g D)^{\xi(d)} q(d, D)\right)^{r+1}$ où pour un entier $d \geqslant 0$ on note $\xi(d) = 2(d+1)\prod_{j=d}^{d^2+d}(3j+1)$. En vertu des propriétés de q, la fonction $f(r, d, D)/D$ est croissante en chacune de ses trois variables et vérifie $f(r, d-1, D^2) \leqslant f(r, d, D)$.

Aves ces notations, le but de cette partie est de démontrer le

THÉORÈME 4.1. *Si X est un sous-schéma fermé de A, Γ un sous-groupe de rang r de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et ε un réel vérifiant $0 \leqslant \varepsilon \leqslant (2q(\dim X, \deg X))^{-1}$ alors*

$$\mathrm{Card}(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \leqslant f(r, \dim X, \deg X).$$

Nous établissons ce théorème par récurrence sur la dimension de X. Si elle est nulle, le résultat est immédiat puisqu'alors $\mathrm{Card}(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \leqslant \mathrm{Card}(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) = \deg X \leqslant f(r, 0, \deg X)$. Nous supposons donc le théorème acquis pour tout schéma de dimension au plus $\dim X - 1$ et nous allons le prouver pour X en supposant de plus que X est intègre. Cela est suffisant car, si X n'est pas intègre, on applique le résultat à chacune de ses composantes irréductibles $V_1, \ldots, V_t$: la condition sur ε est vérifiée par croissance de q et l'on conclut grâce à

$$\sum_{s=1}^{t} f(r, \dim V_s, \deg V_s) \leqslant f(r, \dim X, \deg X).$$

Nous considérons donc dorénavant X, Γ et ε fixés comme dans le théorème avec X intègre de dimension non nulle. Nous avons alors la généralisation suivante de l'inégalité de Mumford.

PROPOSITION 4.2. *Soient $c_4 = (\dim X)(\deg X)^m$ et $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $|x| \geqslant c_3$. Il existe au plus $f(r, \dim X - 1, (\deg X)^{m+1})$ points $y \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ tels que*

$$\widehat{(x, y)} \leqslant \frac{1}{c_1} \text{ et } \big||x| - |y|\big| \leqslant \frac{1}{c_4}|x|.$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Nous suivons la même démarche que dans [R3]. La proposition 3.3 de ce texte est valable telle quelle dans le présent cadre en remplaçant Γ par Γ_ε: dans la démonstration il suffit de vérifier que l'hypothèse de récurrence s'applique bien au fermé V_e (condition sur ε) et cela découle de l'inégalité $q(e, (\deg X)^{2m-1-e}) \leqslant q(\dim X, \deg X)$ pour $e \leqslant \dim X - 1$. Pour établir l'analogue de la proposition 3.4, où n'interviennent ni Γ ni ε, notons d'une part que

$$\left|x_i x^{-1}\right| \leqslant \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_4}\right)|x|$$

si $\widehat{(x_i, x)} \leqslant c_1^{-1}$ et d'autre part que les formules d'addition de A sont de bidegré $(1, 1)$ et de hauteur 1. Par suite, si x est un point isolé de $X \cap x x_1^{-1} X \cap \ldots \cap x x_{\dim X}^{-1} X$, il vérifie

$$\begin{aligned}|x| \leqslant (\deg X)^{\dim X}(h(X) + \tfrac{1}{2}(\dim X)(h(X) + \\ + (\deg X)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_4}\right)|x| + 2m(\deg X)\log(\deg X)(n+1)))\end{aligned}$$

puis

$$|x|\left(\frac{(\deg X)^{-m}}{\dim X} - \frac{1}{2c_4} - \frac{1}{2c_1}\right) \leqslant 2h(X) + m\log(\deg X)(n+1).$$

Avec la valeur de c_4 et $c_1 \geqslant 2c_4$ on trouve

$$|x| \leqslant 4(\dim X)(\deg X)^m(2h(X) + m\log(\deg X)(n+1)) < c_3. \qquad \square$$

En combinant avec l'inégalité de Vojta, nous trouvons:

COROLLAIRE 4.1. *Si* $N = 2mc_2c_4(1+8c_1)^r f(r, m-2, (\deg X)^{m+1})$ *on a*

$$\operatorname{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x| \geqslant c_3\} \leqslant N.$$

Démonstration. Puisque $\varepsilon \leqslant 1 \leqslant c_3/8c_1$ la deuxième assertion du lemme 2.1 s'applique et donc les points considérés sont répartis dans au plus $(1+8c_1)^r$ ensembles dans chacun desquels deux points quelconques vérifient $\widehat{(x, y)} \leqslant c_1^{-1}$. Dans un tel ensemble on ordonne les points en $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de sorte que $|x_{i+1}| \geqslant |x_i|$. Par la proposition ci-dessus, on a $|x_{ik+j}| \geqslant (1+c_4^{-1})^i |x_j|$ pour $i, j \geqslant 0$ si $k = [f(r, m-2, (\deg X)^{m+1})]$. On remarque $(1+c_4^{-1})^{2c_2c_4} \geqslant c_2$ donc $|x_{(i+1)(2kc_2c_4)}| \geqslant c_2|x_{i(2kc_2c_4)}|$. Par conséquent cette suite contredit le théorème 3.1 si $x_{2mkc_2c_4}$ est défini et cela donne la borne de l'énoncé. $\square$

Il reste à supprimer la hauteur de X (dont dépend c_3) dans cette formule. Pour énoncer le résultat, nous notons $M = [f(r, m-2, (n+1)(\deg X)^2)]$ puis $\gamma = (n+2)^m(\deg X)\Lambda^{2\psi(m-1)}$ et $c_5 = 3\gamma\log(n+1)$.

PROPOSITION 4.3. *Si* $y \in \Gamma$ *et si* $x_0, \ldots, x_M$ *sont des points distincts de* $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ *alors*

$$\operatorname{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |xy^{-1}| \geqslant \gamma \max_{0 \leqslant i \leqslant M} |x_i y^{-1}| + c_5\} \leqslant N.$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On applique le lemme 3.1 de [R3] à $y^{-1}X$ et à l'ensemble de points $S = \{x_i y^{-1} \mid 0 \leqslant i \leqslant M\}$. L'hypothèse en est vérifiée car si $Y \subset y^{-1}X$ satisfaisait $\dim Y = \dim X - 1$, $\deg Y \leqslant (n+1)(\deg X)^2$ et $S \subset Y(\bar{\mathbb{Q}})$ on trouverait pour $Y' = yY$ que $\varepsilon \leqslant (2q(\dim Y', \deg Y'))^{-1}$ et donc $\mathrm{Card}(Y' \setminus Z_{Y'})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \leqslant M$ ce qui est absurde. On combine alors la majoration obtenue pour $h(y^{-1}X)$ avec le corollaire précédent appliqué lui aussi à $y^{-1}X$ (ce qui est loisible car $y\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon$). □

Le théorème 4.1 découle maintenant du

COROLLAIRE 4.2. *Le cardinal de* $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ *est majoré par*

$$N + \max((8\gamma+3)^r M, q(\dim X, \deg X)^{r+1}(9c_5)^r).$$

Démonstration. Nous supposons ce cardinal au moins égal à $N + (8\gamma+3)^r M + 1$ et notons c le plus petit réel positif pour lequel il existe $y \in \Gamma$ tel que

$$\mathrm{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |xy^{-1}| \geqslant c\} \leqslant N.$$

Nous allons appliquer la première assertion du lemme 2.1 pour recouvrir $\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |xy^{-1}| \leqslant c\}$ d'abord par des boules de rayon $c/2\gamma$ (nous en aurons moins de $(8\gamma+3)^r$) puis par des boules de rayon $q(\dim X, \deg X)^{-1}$ (en nombre inférieur à $(4cq(\dim X, \deg X)+3)^r$). Dans le second cas c'est toujours possible car $\varepsilon \leqslant (2q(\dim X, \deg X))^{-1}$ tandis que dans le premier cas il faut supposer $c \geqslant 4\gamma\varepsilon$. Si cela est vrai, on trouve une boule de centre $y' \in \Gamma$ et de rayon $c/2\gamma$ contenant $M+1$ points de $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ par le principe des tiroirs et en appliquant à ces points la proposition précédente on a

$$\mathrm{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |xy'^{-1}| \geqslant (c/2) + c_5\} \leqslant N.$$

Ainsi par minimalité $c_5 + c/2 \geqslant c$ soit $c \leqslant 2c_5$. Par ailleurs, si $c \leqslant 4\gamma\varepsilon$ on a aussi $c \leqslant 2c_5$. Après la seconde application du lemme, nous disposons de boules de rayon $q(\dim X, \deg X)^{-1}$. Par définition de q chacune contient moins de $q(\dim X, \deg X)$ points de $X \setminus Z_X$ (la propriété étant stable par translation). Par suite

$$\begin{aligned}&\mathrm{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |xy^{-1}| \leqslant c\}\\ &\quad \leqslant q(\dim X, \deg X)(4cq(\dim X, \deg X)+3)^r.\end{aligned}$$

Le résultat final s'obtient en majorant $4c+3$ par $9c_5$. □

On a facilement $c_1 \leqslant 2mc_2c_4 \leqslant \Lambda^{2\psi(m-1)} \leqslant \gamma/2$ donc $2N$ est au plus

$$(8\gamma+3)^{r+1} f(r, m-2, 2^g(\deg X)^{m+1}),$$

quantité qui majore également $2(8\gamma+3)^r M$. Si l'on remplace f par sa valeur et que l'on tient compte de $q(m-2, 2^g(\deg X)^{m+1}) \leqslant q(\dim X, \deg X)$ il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon &\leqslant q(\dim X, \deg X)^{r+1} \times\\ &\times \left((8\gamma+3)\left(2^{2g}(\deg X)^{m+1}\right)^{\xi(m-2)}\right)^{r+1},\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

étant donné que le second facteur majore clairement $2(9c_5)^r$. En se reportant à l'expression de Λ, il est aisé de vérifier que $\Lambda \leqslant 2^{gm^2}(\deg X)^m$. Il en découle $8\gamma + 3 \leqslant (2^g \deg X)^{2m^2\psi(m-1)+2m}$. Finalement le théorème 4.1 sera acquis si l'on montre

$$2m^2\psi(m-1) + 2m + (m+1)\xi(m-2) \leqslant \xi(m-1).$$

Or, au vu des définitions, on a $\psi(m-1) = (2m(3m-2))^{-1}\xi(m-1)$ et

$$\frac{\xi(m-1)}{\xi(m-2)} = \frac{m}{(m-1)(3m-5)} \prod_{j=m^2-3m+3}^{m^2-m} (3j+1)$$
$$\geqslant \frac{m(3m^2-3m+1)(3m^2-3m-2)}{(m-1)(3m-5)} \geqslant 4(m+1)$$

et cela entraîne bien notre formule.

5. Démonstration du théorème 1.2

Dans le cas de $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ il est possible de faire le premier pas du raisonnement par récurrence de la partie précédente jusqu'au corollaire 4.1. En effet, puisque pour la dimension 0 l'ensemble Γ_ε ou $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ n'intervient pas, la proposition 4.2 reste valable. D'après $\varepsilon \leqslant (10c_1)^{-1}$ (ici $c_1 = 2^8(\deg C)^2$) la dernière assertion du lemme 2.1 s'applique et il vient donc (par hypothèse $Z_C = \emptyset$)

$$\mathrm{Card}\{x \in C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \mid |x| \geqslant c_3\} \leqslant N$$

avec

$$N = 4c_2c_4(\deg X)^3(1+8c_1)^r \leqslant c_3(1+c_3)^r.$$

Ensuite, en revanche, la proposition 4.3 ne s'adapte pas: l'ensemble $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ n'est pas en général stable par translation par les éléments de Γ.

Pour une courbe, on peut cependant conclure en majorant directement le nombre de points de hauteur au plus c_3. Pour ce faire, remarquons

$$\{x \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \mid |x| \leqslant c_3\} \subset \{x \in \Gamma_{\varepsilon'} \mid |x| \leqslant c_3\}$$

si l'on note $\varepsilon' = \varepsilon(1+c_3)/(1-\varepsilon)$ (voir le calcul à la fin de la démonstration du lemme 2.1). Par suite

$$\mathrm{Card}\{x \in C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \mid |x| \leqslant c_3\} \leqslant q(1, \deg C)(4c_3q(1, \deg C) + 3)^r$$

grâce à l'argument utilisé pour le corollaire 4.2 à condition que $\varepsilon' \leqslant (2q(1, \deg C))^{-1}$. Cette condition s'écrit $\varepsilon \leqslant (2q(1, \deg C)(1+c_3)+1)^{-1}$ tandis que l'on trouve

$$\mathrm{Card}\, C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \leqslant (4c_3q(1, \deg C) + 3)^{r+1}$$

à l'aide de la majoration de N. Enfin $c_3 = (768 \times 2^g(\deg C)^5)^{14/3} \max(1, h(C))$ et [DP, Erratum] montre que l'on peut choisir $q(1, \deg C) = 2^{7g+182}(\deg C)^{28/3}$ de sorte que

$$4c_3q(1, \deg C) + 3 \leqslant 2^{12g+229}(\deg C)^{33} \max(1, h(C))$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

qui permet de conclure, la condition sur ε étant vérifiée puisque $2q(1, \deg C)(1 + c_3) + 1 \leqslant 4c_3q(1, \deg C) + 3$.

Les arguments de la partie précédente ne permettent pas d'exploiter ce résultat pour passer en dimension supérieure car la proposition 4.2 n'est utilisable que lorsque l'on connaît des bornes indépendantes de la hauteur tandis qu'ici par exemple la borne sur ε doit nécessairement dépendre de la hauteur de C.

6. Décompte final

Nous commençons par majorer le nombre de sous-tores de degré borné.

PROPOSITION 6.1. *Soient h un entier compris entre* 0 *et g et δ un réel positif. Si h' désigne le minimum entre h et $g - h$, le nombre de sous-tores B de A vérifiant* $\dim B = h$ *et* $\deg B \leqslant \delta$ *est majoré par* $N(h, \delta) = (g2^{g-1})^{h'}\delta^g(1 + \log\delta)^{h'-1}$.

Démonstration. Si B est un sous-tore de A de dimension h on lui associe le groupe des caractères de A triviaux sur B qui est un sous-groupe H de $\mathbb{Z}^g$ de rang $g - h$. L'application

$$\mathbb{Z} \simeq \bigwedge^{g-h} H \to \bigwedge^{g-h}(\mathbb{Z}^g) \simeq \mathbb{Z}^{\binom{g}{h}}$$

définit au signe près un élément ω de $\mathbb{Z}^{\binom{g}{h}}$ et ω détermine uniquement B. Pour le degré, on a $\deg B = h!|\omega|_1$ où $|\cdot|_1$ désigne la somme des valeurs absolues des composantes (voir par exemple [BP]). Par ailleurs, *via* l'isomorphisme canonique

$$\bigwedge^{g-h}(\mathbb{Z}^g) \simeq \bigwedge^{h}(\mathbb{Z}^g),$$

l'élément ω est aussi associé au sous-groupe primitif $H^\perp$. En conséquence, en considérant soit H soit $H^\perp$, on cherche à majorer le nombre d'éléments (au signe près) $\omega \in \bigwedge^{h'}(\mathbb{Z}^g)$ associés à un sous-groupe primitif H' de rang h' de $\mathbb{Z}^g$ tels que $|\omega|_1 \leqslant h!^{-1}\delta$.

On applique le théorème de Minkowski (voir théorème V page 218 de [Ca]) au réseau H' de l'espace $H' \otimes \mathbb{R}$ muni de $|\cdot|_1$. On en déduit qu'il existe $u_1, \ldots, u_{h'}$ des éléments indépendants de H' tels que $\prod_{i=1}^{h'} |u_i|_1 \leqslant h'!|\omega|_2 \leqslant h'!|\omega|_1 \leqslant \delta$ car le volume de $\{x \in H' \otimes \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 1\}$ est au moins $2^{h'}/h'!$ et le volume de $H' \otimes \mathbb{R}/H'$ est égal à $|\omega|_2$ (norme euclidienne). Parce qu'il existe un unique sous-groupe primitif de $\mathbb{Z}^g$ de rang h' contenant h' éléments indépendants donnés, on trouve que le nombre que l'on cherche est au plus

$$\sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_{h'} \leqslant \delta} \prod_{i=1}^{h'} 2^{g-1} \binom{\lambda_i + g - 1}{g - 1}$$

où la somme est prise sur les $\lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant la condition (ici le coefficient binomial majore le nombre d'éléments $x \in \mathbb{N}^g$ avec $|x|_1 = \lambda_i$ et l'on multiplie par 2^{g-1} pour passer aux éléments de $\mathbb{Z}^g$ au signe près). Pour conclure on a

$$\binom{\lambda_i+g-1}{g-1} \leqslant g\lambda_i^{g-1} \quad \text{donc} \quad \prod_{i=1}^{h'} 2^{g-1}\binom{\lambda_i+g-1}{g-1} \leqslant (g2^{g-1})^{h'}\delta^{g-1}$$

et, si $[\cdot]$ est la partie entière,

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_{h'}\leqslant\delta} 1 &= \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_{h'-1}\leqslant\delta}\ \sum_{\lambda_{h'}=1}^{[\delta/\lambda_1\ldots\lambda_{h'-1}]} 1 \leqslant \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_{h'-1}\leqslant\delta}\frac{\delta}{\lambda_1\ldots\lambda_{h'-1}}\\ &\leqslant \delta\left(\sum_{\lambda=1}^{[\delta]}\frac{1}{\lambda}\right)^{h'-1} \leqslant \delta(1+\log\delta)^{h'-1}\end{aligned}$$

(si $h'=0$ on vérifie directement la formule). □

Nous donnons maintenant un résultat permettant de passer au quotient par un sous-tore B donné. Nous contrôlons d'une part le degré d'un sous-schéma, pour lequel il est remarquable que la borne obtenue ne dépende pas de B, et d'autre part il faut examiner ce que devient Γ_ε. Pour cela notons Γ_B et $(\Gamma_\varepsilon)_B$ les images respectives de Γ et Γ_ε dans $(A/B)(\bar{\mathbb{Q}})$.

LEMME 6.1. *Pour tout sous-tore B de A, il existe une injection $\imath : A/B \hookrightarrow A$ telle que*

(1) *pour tout sous-schéma fermé V de A avec $B\subset \mathrm{Stab}(V)$ on ait $\deg \imath(V/B) \leqslant g!^3 \deg V$,*
(2) *pour tout sous-groupe Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et tout réel $\varepsilon \geqslant 0$ on ait $\imath((\Gamma_\varepsilon)_B) \subset (\imath(\Gamma_B))_{\varepsilon'}$ avec $\varepsilon' = g!^2(\deg B)\varepsilon$.*

Démonstration. Notons $d=\dim V$ et $h=\dim B$. Considérons $\chi_1,\ldots,\chi_{g-h}$ des caractères de A tels que le morphisme

$$\begin{aligned}&A \longrightarrow (\mathbb{G}_{\mathrm{m},\bar{\mathbb{Q}}})^{g-h},\\ &x \mapsto (\chi_i(x))_{1\leqslant i\leqslant g-h}\end{aligned}$$

est une réalisation de $A\to A/B$. Nous définissons $\imath : A/B \hookrightarrow A$ associée à ces caractères grâce à l'injection canonique $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^{g-h} \hookrightarrow (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^g$ des $g-h$ premiers facteurs. Dans ce cadre, $\deg \imath(V/B) = (d-h)!\sum_{|I|=d-h} D_I$ où les D_I pour $I\subset\{1,\ldots,g\}$ et $|I|=d-h$ sont les multidegrés de V/B. Si a_i pour $i\in I$ sont des éléments de $\bar{\mathbb{Q}}$ assez généraux, on a

$$D_I = \mathrm{Card}(V/B(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \{x\in(\bar{\mathbb{Q}}^\times)^g \mid \forall i\in I\ x_i=a_i\}).$$

On en déduit que $D_I=0$ si $I\not\subset\{1,\ldots,g-h\}$ et, dans le cas contraire, par image réciproque

$$D_I \deg B = \deg\left(V\cap\bigcap_{i\in I}\chi_i^{-1}(a_i)\right).$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

Si maintenant nous voyons χ_i comme élément de $\mathbb{Z}^g$ le fermé $\chi_i^{-1}(a_i)$ s'écrit dans $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ comme l'intersection de A avec une hypersurface de degré $|\chi_i|_\infty$ (maximum des coordonnées). Par suite

$$\deg \imath(V/B) \leqslant g!\left(\prod_{i=1}^{g-h} |\chi_i|_\infty\right)\frac{\deg V}{\deg B}.$$

Il nous reste à choisir les χ_i de sorte que le produit ci-dessus soit au plus $g!^2 \deg B$: le raisonnement est semblable à celui de la démonstration de la proposition précédente car la condition sur les χ_i est qu'ils forment une base de H. On sait trouver des éléments indépendants de H avec

$$\prod_{i=1}^{g-h} |\chi_i|_1 \leqslant \frac{(g-h)!}{h!}\deg B$$

et, grâce au lemme 8 page 135 de [Ca], on en déduit une base avec

$$\prod_{i=1}^{g-h} |\chi_i|_1 \leqslant 2^{h-g+1}\frac{(g-h)!^2}{h!}\deg B \leqslant g!^2 \deg B.$$

Vérifions maintenant que ce choix de $\imath$ satisfait la seconde partie de l'énoncé. Il suffit de voir que si $z \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ avec $|z| \leqslant \varepsilon$ et si z' est l'image de z *via* $A \to A/B \hookrightarrow A$ alors $|z'| \leqslant \varepsilon'$. Un calcul direct de hauteur montre $|z'| \leqslant |z| \sum_{i=1}^{g-h} |\chi_i|_\infty$ et, par ce qui précède,

$$\sum_{i=1}^{g-h} |\chi_i|_\infty \leqslant g \prod_{i=1}^{g-h} |\chi_i|_1 \leqslant g!^2 \deg B$$

ce qui donne la conclusion. □

Ce lemme permet de démontrer le théorème 1.1 suivant la méthode de [R3, 4.b)] (simplifiée puisque l'on remplace une isogénie par un isomorphisme). Le lemme 4.6 de [R3] est valable ici donc si l'on note $(X : B) = \bigcap_{b \in B} b^{-1}X$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des composantes de ce fermé, le nombre de translatés de B intervenant dans $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ est au plus

$$S_B = \sum_{V \in \mathcal{V}} \mathrm{Card}(V/B \setminus Z_{V/B})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap (\Gamma_\varepsilon)_B$$

et l'on peut prendre pour l'entier S intervenant dans le théorème 1.1 la somme des S_B pour les sous-tores avec $\deg B \leqslant (\deg X)^{m^2/4}$. Pour majorer S_B nous avons

$$S_B \leqslant \sum_{V \in \mathcal{V}} \mathrm{Card}(\imath(V/B) \setminus Z_{\imath(V/B)})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap (\imath(\Gamma_B))_{\varepsilon'}.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème 4.1 à $\imath(V/B)$ à condition que $\varepsilon' \leqslant (2q(\dim \imath(V/B), \deg \imath(V/B)))^{-1}$ pour tout $V \in \mathcal{V}$. Si c'est le cas, il vient avec $h = \dim B$ et car rang $\imath(\Gamma_B) \leqslant r$

$$\begin{aligned}S_B &\leqslant \sum_{V\in\mathcal{V}} f(r, \dim V - h, g!^3 \deg V)\\ &\leqslant \max_{h\leqslant e\leqslant \dim X} f(r, e-h, g!^3(\deg X)^{m-e})\\ &\leqslant f(r, \dim X - h, g!^3 \deg X)\end{aligned}$$

tandis que la condition sur ε' est entraînée par

$$\varepsilon^{-1} \geqslant 2g!^2(\deg B)q(e-h, g!^3(\deg X)^{m-e})$$

pour tout e entier entre h et $\dim X$ donc par

$$\varepsilon^{-1} \geqslant 2g!^2(\deg B)q(\dim X - h, g!^3 \deg X)$$

vu la croissance de q. En traitant séparément le cas $B=0$ ceci montre que l'on peut prendre

$$\varepsilon_0 = 2\max(g!^2(\deg X)^{m^2/4}q(\dim X-1, g!^3\deg X), q(\dim X, \deg X))^{-1}$$

tandis que le nombre de translatés obtenu est

$$\begin{aligned}S &\leqslant \sum_{h=0}^{\dim X} N(h, (\deg X)^{m^2/4}) f(r, \dim X - h, g!^3 \deg X)\\ &\leqslant 2N([g/2], (\deg X)^{m^2/4}) f(r, \dim X, g!^3\deg X)\\ &\leqslant 2^{g^2}(\deg X)^{gm^2/2} f(r, \dim X, g!^3 \deg X).\end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression finale, il reste à faire intervenir les valeurs de f et q.

D'après [DP, Erratum], on a

$$\mathrm{Card}\{x \in (X\setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \mid |x| \leqslant q'(\dim X, \deg X)^{-1}\} \leqslant q'(\dim X, \deg X)$$

avec

$$q'(d, D) = (2^{g+4d+22}D^{4/3})^{7^d}$$

(on majore $\log(\deg X + 1) \leqslant \sqrt{\deg X}$). Pour remplir la condition de croissance imposée plus haut, il est nécessaire d'augmenter cette fonction. Par exemple, on peut choisir

$$q(d, D) = (2^{g+4d+22}D^{4/3})^{7^4(d+2)!/6!}.$$

On majore maintenant $g+4d+22 \leqslant 14g$ et $4/3 \leqslant 14$ et l'on vérifie

$$\xi(m-1) + 14\frac{7^4}{6!}(m+1)! \leqslant m^{3m^2-4}.$$

Ceci donne

$$f(r, m-1, D) \leqslant (2^g D)^{(r+1)m^{3m^2-4}}.$$

On reporte finalement dans la borne pour S obtenue plus haut avec $2^g g!^3 \leqslant 2^{3g^2-1}$ et $2 \leqslant \deg X$. Ainsi S est majoré par $\deg X$ élevé à la puissance

$$g^2m + 3(r+1)g^2m^{3m^2-4} \leqslant (r+1)g^2m^{3m^2}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1020982431028 Published online by Cambridge University Press

En procédant de même à partir de la formule pour ε_0, on le minore par $\deg X$ à la puissance $-g^2 m^{3m}$ et le théorème 1.1 est complètement démontré.

Références

[AD] Amoroso, F. et David, S.: Minoration de la hauteur normalisée dans un tore, *J. Inst. Math. Jussieu*. à paraître.

[BP] Bertrand, D. et Philippon, P.: Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs, *Illinois J. Math.* **32** (1988), 263–280.

[BGS] Bost, J.-B., Gillet, H. et Soulé, C.: Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 903–1027.

[Ca] Cassels, J. W. S.: *An Introduction to the Geometry of Numbers,* Springer-Verlag, Berlin, 1959.

[DP] David, S. et Philippon, P.: Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4)* **28** (1999), 489–543; Erratum, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4)* **29** (2000), 729–731.

[DP2] David, S. et Philippon, P.: Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes, dans: V. K. Murty et M. Waldschmidt (éds), *Number Theory, Tiruchirapalli 1996*, Contemp. Math. 210, Amer. Math. Soc., Providence, 1998, pp. 333–364. — II. *Comment. Math. Helv.*, à paraître.

[Ev] Evertse, J.-H.: Points on subvarieties of tori, *Proc. Conf. Number Theory*, Zurich, 1999 (édité par G. Wüstholz), Cambridge Univ. Press, 2002.

[L] Lang, S.: *Fundamentals of Diophantine Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Po] Poonen, B.: Mordell–Lang plus Bogomolov, *Invent. Math.* **137** (1999), 413–425.

[R1] Rémond, G.: Géométrie diophantienne multiprojective. Chapitre 7 de *Introduction to Algebraic Independence Theory* (édité par Y. Nesterenko et P. Philippon). Lecture Notes in Math. 1752, Springer-Verlag, New York, 2001, pp. 95–131.

[R2] Rémond, G.: Inégalité de Vojta en dimension supérieure, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4)* **29** (2000), 101–151.

[R3] Rémond, G.: Décompte dans une conjecture de Lang, *Invent. Math.* **142** (2000) 513–545.

[Vo] Vojta, P.: Integral points on subvarieties of semi-abelian varieties, I, *Invent. Math.* **126** (1996), 133–181.