M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 50 (1973), 149–173

SUR LE PRINCIPE DE DOMINATION POUR LES NOYAUX DE CONVOLUTION

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction

Dans toute la suite X désigne un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini; ξ est sa mesure de Haar. Nous rappelons qu'un noyau de convolution N sur X signifie une mesure de Radon positive dans X. Il est connu que le principe de domination pour N joue un grand rôle dans la théorie du potentiel. Nous remarquons ici qu'il existe deux sortes des principes de domination pour N; l'un est défini par G. Choquet et J. Deny (cf. [3]), qui est très utile pour discuter le principe du balayage, et l'autre est introduit de celui dans le cardre plus large (cf. [8]). Nous montrerons d'abord que ceux sont équivalents. Par conséquent, on pourra discuter, en même temps, sur les mesures balayées relativement au noyau N et sur la résolvante associée au noyau N.

Nous montrerons ensuite que, pour un noyau de convolution N sur X satisfaisant au principe de domination, les trois énoncés suivants sont équivalents:

(a) N satisfait au principe complet du maximum.

(b) N est de type positif.

(c) N est borné.

L'équivalence entre (a) et (c) était déjà énoncée dans [4] sans aucune démonstration.

Nous discuterons finalement sur les noyaux de convolution de Hunt sur X et sur les noyaux de convolution de Dirichlet généralisés sur X (cf. [6]). Evidemment un noyau de convolution de Dirichlet généralisé est un noyau de Hunt. Nous proposons donc de fournir une condition pour que son inverse ait lieu.

Received May 2, 1972.

2. Les deux sortes des principes de domination

Soient $L_{\text{loc}} = L_{\text{loc}}(\xi)$, $M_K = M_K(\xi)$ et $C_K = C_K(X)$ respectivement l'ensemble constitué par toutes les fonctions réelles et localement ξ-sommables dans X, le sous-ensemble de L_{loc} constitué par fonctions bornées à support compact, et l'espace des fonctions finies et continues dans X à support compact, et muni de la topologie inductive. $L^2 = L^2(\xi)$ et $L^1 = L^1(\xi)$ sont les notations usuelles. $L^+_{\text{loc}}, \cdots$ sont respectivement leur sous-ensembles des fonctions non-négatives.

Soit N un noyau de convolution sur X; on note $\check{N}$ le noyau de convolution sur X défini par $\int \varphi(X) d\check{N}(x) = \int \varphi(-x) dN(x)$ pour toute φ de C_K, qui s'appelle le noyau adjoint de N. Pour une mesure de Radon réelle μ dans X, $N*\mu$ s'appelle le N-potentiel de μ dès que cette convolution a un sens. Si le N-potentiel $N*\mu$ de μ est absolument continu par rapport à ξ, sa densité s'écrit $N\mu$. En particulier si $\mu = f\xi$, où $f \in L_{\text{loc}}$, on note $N*\mu = N*f$ et $N\mu = Nf$. Si une fonction f est N-sommable, la convolution $N*f$ est au sens des fonctions.

Pour une mesure de Radon réelle μ dans X, $s(\mu)$ désigne le support de μ, et en particulier si $\mu = f\xi$, où $f \in L_{\text{loc}}$, on note $s(f) = s(\mu)$. $k(f)$ désigne l'ensemble $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$.

DÉFINITION 1. Un noyau de convolution N sur X satisfait au C-principe de domination (resp. C-principe complet du maximum) si, quelles que soint φ, ψ de C_K^+, l'inégalité $N*\varphi \leqq N*\psi$ (resp. $N*\varphi \leqq N*\psi + 1$) est satisfaite sur X dès qu'elle l'est sur $s(\varphi)$.

Cela est défini par G. Choquet et J. Deny [3].

Remarque 1. Le C-principe de domination (resp. le C-principe complet du maximum) pour N est équivalent à l'énoncé suivant:

Quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X à support compact, l'inégalité $N*\mu \leqq N*\nu$ (resp. $N*\mu \leqq N*\nu + \xi$) est satisfaite au sens des mesures dans X dès qu'elle l'est au sens des mesures dans un voisinage de $s(\mu)$.

Cela se comprend immédiatement de la définition.

Soit N un noyau de convolution sur X; alors pour une fonction f de M_K, Nf a un sens et elle est localement bornée dans X. On a ensuite la remarque suivante:

Remarque 2. Pour une fonction f de L^2 à support compact, Nf a

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

un sens et elle est localement de L^2.

Cela résulte immédiatement du fait que, quels que soient K un compact de X et f une fonction de M_K portée par K,

$$\int_K |Nf|^2 d\xi \leqq \int_K |Nf|^2 d\xi + \int_K |\check{N}f|^2 d\xi \leqq 2A(K;N)A(K;\check{N})\int |f|^2 d\xi ,$$

où

$$A(K;N) = \xi\text{-ess.}\sup_{x\in X} N_{\chi_K}(x) .$$

On désigne par χ_K la fonction caractéristique de K.

DÉFINITION 2. Un noyau de convolution N sur X satisfait au M-principe de domination (resp. M-principe complet du maximum) si, quelles que soient f, g de M_K^+, l'inégalité $Nf \leqq Ng$ (resp. $Nf \leqq Ng + 1$) est satisfaite ξ-p.p. sur X dès qu'elle l'est ξ-p.p. sur $k(f)$.

Un noyau de convolution sur X étant un cas spécial dans le cadre des noyaux résonables (cf. [8]), il est nécessaire de discuter le M-principe de domination. La remarque suivante est déjà obtenue dans [9].

Remarque 3. Le M-principe de domination (resp. le M-principe complet du maximum) pour N est équivalent à l'énoncé suivant:

Quelles que soient f, g de M_K^+, l'inégalité $Nf \leqq Ng$ (resp. $Nf \leqq Ng + 1$) est satisfaite ξ-p.p. sur X dès qu'elle l'est ξ-p.p. sur $s(f)$.

THÉORÈME 1. *Soit N un noyau de convolution sur X; on a alors:*

(1) *Les deux principes de domination sont équivalents.*

(2) *Les deux principes complets du maximum sont équivalents.*

Démonstration. Le M-principe de domination pour N déduit évidemment le C-principe de domination pour N, et par suite, il suffit de montrer son inverse. On va séparer sa démonstration en trois parties suivantes. On désigne par ε la mesure d'unité à l'origine de X.

1° Si N satisfait au C-principe de domination, alors, quelle que soit c une constante non-négative, $N + c\varepsilon$ satisfait aussi au C-principe de domination.

Supposons que, pour une constante $c \geqq 0$ et pour deux fonctions φ et ψ de C_K^+,

$$N*\varphi + c\varphi \leqq N*\psi + c\psi \text{ sur } s(\varphi);$$

on a alors

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$N*(\varphi-\psi)^+ + c(\varphi-\psi)^+ \leqq N*(\varphi-\psi)^- + c(\varphi-\psi)^- \text{ sur } s((\varphi-\psi)^+)\,,$$

car $s(\varphi) \supset s((\varphi-\psi)^+)$. On a donc

$$N*(\varphi-\psi)^+ \leqq N*(\varphi-\psi)^- \text{ sur } s((\varphi-\psi)^+)\,,$$

et par suite cette inégalité a lieu sur X, d'après le C-principe de domination pour N. Par conséquent,

$$N*(\varphi-\psi)^+ + c(\varphi-\psi)^+ \leqq N*(\psi-\varphi)^+ + c(\psi-\varphi)^+ \text{ sur } X\,,$$

d'où $N*\varphi + c\varphi \leqq N*\psi + c\psi$ sur X, et par suite $N + c\varepsilon$ satisfait au C-principe de domination.

2° Soit c une constante positive. Si $N + c\varepsilon$ satisfait au C-principe de domination, alors il satisfait au M-principe de domination.

Supposons que, pour deux fonction f et g de M_K^+,

$$Nf + cf \leqq Ng + cg \ \xi\text{-p.p. sur } s(f)\,.$$

On choit une suite décroissante $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de X telle que l'on ait $\omega_n \supset s(f)$ et $\lim_{n\to+\infty} \xi(\omega_n) = \xi(s(f))$. On désigne par χ_n la fonction caractéristique de $\omega_n - s(f)$, et alors la suite $(N\chi_n + c\chi_n)$ converge d'une manière décroissante vers 0 ξ-p.p. sur X avec $n \to +\infty$. Posons

$$a = \xi\text{-ess.}\sup_{x\in\omega_1} (Nf(x) + cf(x))\,;$$

alors $0 \leqq a < +\infty$, et on a

$$Nf + cf \leqq Nf + cg + \frac{a}{c}(N\chi_n + c\chi_n) \ \xi\text{-p.p. dans } \omega_n\,.$$

D'après la remarque 1, on a

$$Nf + cf \leqq Ng + cg + \frac{a}{c}(N\chi_n + c\chi_n) \ \xi\text{-p.p. sur } X\,.$$

Faisant $n \to +\infty$, on arrive à la conclusion que $Nf + cf \leqq Ng + cg$ ξ-p.p. sur X, d'où $N + c\varepsilon$ satisfait au M-principe de domination.

3° Si, quelle que soit c une constante positive, $N + c\varepsilon$ satisfait au M-principe de domination, alors N y satisfait aussi.

Supposons d'abord que, pour deux fonctions f et g de M_K^+, $Nf < Ng$ ξ-p.p. sus $k(f)$. On pose

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$f_n(x) = f(x) \text{ sur } \left\{x \in X\,;\, Ng(x) \geqq Nf(x) + \frac{1}{n}\right\}$$

et $f_n(x) = 0$ dans son complément. On choit ensuite une constante positive c_n telle que

$$c_n(\xi\text{-ess.}\sup_{x \in X} f(x)) \leqq \frac{1}{n}$$

et c_n converge d'une manière décroissante vers 0 avec $n \to +\infty$. Alors on a

$$Nf_n + c_n f_n \leqq Ng + c_n g \ \xi\text{-p.p. sur } k(f_n)\,,$$

et donc la même inégalité a lieu ξ-p.p. sur X. Faisant $n \to +\infty$, on a $Nf \leqq Ng$ ξ-p.p. sur X. Par conséquent, si, pour deux fonctions f, g de M_K^+, $Nf \leqq Ng$ et $Nf > 0$ ξ-p.p. sur $k(f)$, on a alors $Nf \leqq Ng$ ξ-p.p. sur X, car, quel que soit $0 < a < 1$,

$$aNf = N(af) < Ng \ \xi\text{-p.p. sur } k(f)\,,$$

et par suite $aNf \leqq Ng$ ξ-p.p. sur X. Il suffit de voir que, quelle que soit f de M_K^+, $Nf > 0$ ξ-p.p. sur $k(f)$ dès que $N \neq 0$. Supposer qu'il exists une fonction non-zéro f de M_K^+ telle que $Nf = 0$ ξ-p.p. sur $k(f)$. Dans ce cas, si l'on a, quelle que soit g de M_K^+, $Ng = 0$ ξ-p.p. sur $k(f)$, alors $\check{N}f = 0$ ξ-p.p. sur X, et donc $N = 0$. Par conséquent, si $N \neq 0$, il existe alors une fonction g de M_K^+ et une constante positive c telles que

$$\xi(\{x \in k(f)\,;\, Ng(x) \geqq c\}) > 0\,.$$

Posons

$$f'(x) = f(x) \text{ sur } \{x \in k(f)\,;\, Ng(x) \geqq c\}$$

et $f'(x) = 0$ dans son complément; alors, pour un nombre $\delta > 0$ quelconque, il existe une constante positive c_δ ($\leqq 1$) telle que

$$Nf' + c_\delta f' \leqq \delta(Ng + c_\delta g) \ \xi\text{-p.p. sur } k(f')\,,$$

et par suite, la même inégalité a lieu ξ-p.p. sur X. Faisant $\delta \to 0$, on a $Nf' = 0$ ξ-p.p. sur X, mais cela est en contradiction avec $N \neq 0$.

Par conséquent, on achève la démonstration de l'énoncé (1). L'énoncé (2) peut être montré de la même manière, et par suite la démonstration est ainsi complète.

Les deux sortes des principes de domination (resp. principes complets du maximum) étant équivalents, on dit simplement que N satisfait au principe domination (resp. au principe complet du maximum) s'il satisfait au C-principe de domination ou au M-principe de domination (resp. au C-principe complet du maximum ou au M-principe complet du maximum).

D'après la presénte démonstration, on a la remarque suivante:

Remarque 4. Pour qu'un noyau de convolution N sur X satisfasse au principe de domination (resp. au principe complet du maximum), il faut et il suffit que, quel soit $c > 0$, $N + c\varepsilon$ satisfasse au principe de domination (resp. au principe complet du maximum).

En général, cela n'a pas toujours lieu (cf. [8]).

3. La résolvante et le principe du balayage

Le lemme suivant jouera un grand rôle pour notre discussion sur le principe du balayage et la résolvante.

LEMME 1. *Soient N un noyau de convolution sur X satisfaisant au principe de domination, et f, g deux fonctions de L^+_{loc}; supposons que $N(f+g)$ a un sens. Si, pour une constante non-négative c, $Nf + cf \leqq Ng + cg$ ξ-p.p. sur $k(f)$, alors, quelle que soit c' une constante avec $0 \leqq c' \leqq c$, $Nf + c'f \leqq Ng + c'g$ ξ-p.p. sur X.*

Démonstration. D'après la remarque 4, $N + c'\varepsilon$ satisfait au principe de domination, et donc l'implication suivante déduit notre proposition:

$$Nf + cf \leqq Ng + cg \ \xi\text{-p.p. sur } k(f) \Rightarrow Nf \leqq Ng \ \xi\text{-p.p. sur } X .$$

De la même manière que dans la démonstration du théorème 1, on peut supposer $\xi(k(f) \cap k(g)) = 0$. Alors on a $Nf \leqq Ng$ ξ-p.p. sur $k(f)$. Si $N = 0$, la présente implication est évidente, et on suppose $N \neq 0$. Ayant, quelle que soit h de M^+_K, $Nh > 0$ ξ-p.p. sur $k(h)$, on a $Nf > 0$ ξ-p.p. sur $k(f)$. On choit une suite croissante $(K_n)_{n=1}^\infty$ de compacts de X telle que $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = X$; on pose $g_n(x) = \inf(g(x), n)$ sur K_n et $g_n(x) = 0$ dans $\mathscr{C}K_n$. Pour un entier $m > 0$, on pose ensuite

$$f_{mn}(x) = \frac{m-1}{m} f(x) \ \text{ sur } \left\{x \in X\,;\, Ng_n(x) \geqq \frac{m-1}{m} Ng(x)\right\}$$

et $f_{mn}(x) = 0$ dans son complément. D'après le principe de domination pour N, on a

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$Nf_{mn} \leqq Ng_n \leqq Ng \ \xi\text{-p.p. sur } X \, .$$

Faisant $n \to +\infty$, on a

$$\frac{m-1}{m} Nf \leqq Ng \ \xi\text{-p.p. sur } X \, ,$$

et ensuite faisant $m \to +\infty$, on a $Nf \leqq Ng$ ξ-p.p. sur X. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE. *Soit N le même que ci-dessus et c une constante positive. Si, pour une fonction f de L_{loc}, Nf a un sens et $Nf + cf = 0$ ξ-p.p. sur $k(f)$, alors $f = 0$.*

D'après le présent lemme, $Nf = 0$ ξ-p.p. sur X, d'où $f = 0$.

THÉORÈME 2. *Soit N un noyau de convolution sur X. Si N satisfait au principe de domination, alors, pour une mesure de Radon positive μ dans X à support compact, un ouvert relativement compact ω de X et pour un nombre $p > 0$, il existe une mesure de Radon positive $\mu'_{p,\omega}$ dans X portée par $\bar{\omega}$, et une seule telle que l'on ait:*

(a) $(N + (1/p)\varepsilon) * \mu'_{p,\omega} \leqq N * \mu$ *au sens des mesures dans X.*

(b) $(N + (1/p)\varepsilon) * \mu'_{p,\omega} = N * \mu$ *au sens des mesures dans ω.*

(c) *Quelle que soit ν une mesure de Radon positive dans X portée par $\bar{\omega}$, on a $(N + (1/p)\varepsilon) * \nu \geqq (N + (1/p)\varepsilon) * \mu'_{p,\omega}$ au sens des mesures dans X dès que $(N + (1/p)\varepsilon) * \nu \geqq N * \mu$ au sens des mesures dans ω.*

Démonstration. On montrera d'abord que, pour une fonction f de M_K^+ et pour un compact K de X, il existe une fonction $f'_{p,K}$ de M_K^+ portée par K, et une seule telle que l'on ait

$$Nf'_{p,K} + \frac{1}{p} f'_{p,K} \leqq Nf \ \xi\text{-p.p. sur } X \text{ et } Nf'_{p,K} + \frac{1}{p} f'_{p,K} = Nf \ \xi\text{-p.p. sur } K \, .$$

On note $L^2(K)$ le sous-espace de L^2 constitué par fonctions portées par K. Posons

$$P\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\,; K\right) = \left\{(Ng)_K + \frac{1}{p} g\,; g \in L^2(K)\right\},$$

où $(Ng)_K(x) = Ng(x)$ sur K et $(Ng)_K(x) = 0$ dans son complément. Alors, d'après la remarque 2, $P(N + (1/p)\varepsilon\,; K) \subset L^2(K)$. Pour une fonction h

de $L^2(K)$, si l'on a, quelle que soit g de $L^2(K)$, $\int h(Ng + (1/p)g)d\xi = 0$ alors $\check{N}h + (1/p)h = 0$ ξ-p.p. sur $K \supset s(h)$, et donc $N\check{h} + (1/p)\check{h} = 0$ sur $s(\check{h})$. D'après le corollaire ci-dessus, on $h = 0$, d'où $P(N + (1/p)\varepsilon\,; K)$ est dense dans $L^2(K)$. $(Nf)_K$ appartenant à $L^2(K)$, il existe une suite $((Ng_n)_K + (1/p)g_n)_{n=1}^{\infty}$ de $P(N + (1/p)\varepsilon\,; K)$ qui converge fortement vers $(Nf)_K$ dans $L^2(K)$ avec $n \to +\infty$. On a alors

$$\left|(Ng_n)_K + \frac{1}{p}g_n\right| \leqq p\left(N\left(\left|(Ng_n)_K + \frac{1}{p}g_n - (Nf)_K\right|\right)\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{p}\left(\left|(Ng_n)_K + \frac{1}{p}g_n - (Nf)_K\right|\right)\right) + Nf + \frac{1}{p}f$$

ξ-p.p. sur X. D'après le principe de domination pour $N + (1/p)\varepsilon$,

$$\left|Ng_n + \frac{1}{p}g_n\right| \leqq p\left(N\left(\left|(Ng_n)_K + \frac{1}{p}g_n - (Nf)_K\right|\right)\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{p}\left(\left|(Ng_n)_K + \frac{1}{p}g_n - (Nf)_K\right|\right)\right) + Nf + \frac{1}{p}f$$

ξ-p.p. sur X. D'après le lemme 1, on a

$$|Ng_n| \leqq pN\left(\left|(Ng_n)_K + \frac{1}{p}g_n - (Nf)_K\right|\right) + Nf$$

ξ-p.p. sur X, et par suite (g_n) est bornée dans $L^2(K)$. On peut supposer que cette suite converge faiblement vers une fonction $f'_{p,K}$ dans $L^2(K)$ avec $n \to +\infty$. Par conséquent, la suite $((Ng_n)_K + (1/p)g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi faiblement vers $(Nf'_{p,K})_K + (1/p)f'_{p,K}$ dans $L^2(K)$ avec $n \to +\infty$. D'autre part, elle converge fortment dans $L^2(K)$, et par suite, $((Ng_n)_K + (1/p)g_n)$ converge fortement vers $(Nf'_{p,K})_K + (1/p)f'_{p,K}$ dans $L^2(K)$ avec $n \to +\infty$. D'après le lemme 1, on a

$$Nf'_{p,K} + \frac{1}{p}f'_{p,K} \leqq Nf \text{ et } Nf'_{p,K} \leqq Nf \ \xi\text{-p.p. sur } X\,,$$

d'où $f'_{p,K} \geqq 0$. Nf étant bornée sur K, on a $f'_{p,K} \in M_K^+$. L'unicité de $f'_{p,K}$ résulte immédiatement du corollaire ci-dessus.

Soient μ une mesure de Radon positive dans X à support compact et ω un ouvert relativement compact de X; pour une suite $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de C_K^+ portées par un compact fixé de X et qui converge vaguement vers ε, il existe une fonction $f_{p,\omega}^{(n)}$ de M_K^+ portée par K, et une seule

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

telle que l'on ait

$$Nf_{p,\omega}^{(n)} + \frac{1}{p} f_{p,\omega}^{(n)} \leqq N(\mu * \varphi_n)\ \xi\text{-p.p. sur } X \text{ et } Nf_{p,\omega}^{(n)} + \frac{1}{p} f_{p,\omega}^{(n)} = N(\mu * \varphi_n)\ \xi\text{-p.p. sur } \varpi\,.$$

La suite $(f_{p,\omega}^{(n)}\xi)_{n=1}^{\infty}$ étant vaguement bornée, il existe une mesure de Radon positive $\mu''_{p,\omega}$ dans X portée par ϖ et telle que, au sens des mesures,

$$N * \mu''_{p,\omega} + \frac{1}{p}\mu''_{p,\omega} \leqq N * \mu \text{ dans } X \text{ et } N * \mu''_{p,\omega} + \frac{1}{p}\mu''_{p,\omega} = N * \mu \text{ dans } \omega\,.$$

Dans ce cas, $\mu''_{p,\omega}$ n'est pas toujours unique.

On choit une famille $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ filtrante à droite d'ouverts de X telle que l'on ait $\varpi_\alpha \subset \omega$, $\bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha = \omega$ et, quels que soient α, β de A avec $\alpha \lneqq \beta$, $\varpi_\alpha \subset \omega_\beta$. Soit μ''_{p,ω_α} une mesure de Radon positive dans X obtenue ci-dessus pour l'ouvert ω_α et μ. Alors, d'après la remarque 1, la famille $(N^*\mu''_{p,\omega_\alpha} + (1/p)\mu''_{p,\omega_\alpha})_{\alpha \in A}$, est fitrante à droite. D'autre part, $(\mu''_{p,\omega_\alpha})_{\alpha \in A}$ est vaguement bornée. On prend un point vaguement adhérent $\mu'_{p,\omega}$ de $(\mu''_{p,\omega_\alpha})_{\alpha \in A}$, et alors $\mu'_{p,\omega}$ vérifie évidemment les conditions (a) et (b). Soit ν une mesure de Radon positive dans X portée par ϖ telle que $N * \nu + (1/p)\nu \geqq N * \mu$ au sens des mesures dans ω; alors, quel que soit $\alpha \in A$,

$$N * \nu + \frac{1}{p}\nu \geqq N * \mu''_{p,\omega_\alpha} + \frac{1}{p}\mu''_{p,\omega_\alpha}, \text{ d'où } N * \nu + \frac{1}{p}\nu \geqq N * \mu'_{p,\omega} + \frac{1}{p}\mu'_{p,\omega}$$

au sens des mesures dans X. Donc $\mu'_{p,\omega}$ vérifie la condition (c).

Montrons fiinalement l'unicité de $\mu'_{p,\omega}$. Soit $\mu''_{p,\omega}$ une autre mesure de Radon positive dans X portée par ϖ et qui vérifie les tois condition ci-dessus; alors on a

$$N * \mu'_{p,\omega} + \frac{1}{p}\mu'_{p,\omega} = N * \mu''_{p,\omega} + \frac{1}{p}\mu''_{p,\omega}$$

au sens des mesures dans X. Donc, qulle que soit φ de C_K,

$$N * (\mu'_{p,\omega} * \varphi) + \frac{1}{p}(\mu'_{p,\omega} * \varphi) = N^*(\mu''_{p,\omega} * \varphi) + \frac{1}{p}(\mu''_{p,\omega} * \varphi)$$

dans X, et par suite, d'après le corollaire du lemme 1, $\mu'_{p,\omega} * \varphi = \mu''_{p,\omega} * \varphi$, d'où $\mu'_{p,\omega} = \mu''_{p,\omega}$. La démonstration est ainsi complète.

On dit que $\mu'_{p,\omega}$ est la mesure balayée de μ sur ω relativement à $(N + (1/p)\varepsilon, N)$.

COROLLAIRE. *Soient N et p les mêmes que ci-dessus. Pour une fonction φ de C_K^+, il existe une suite $(\varphi'_{p,n})_{n=1}^{\infty}$ de C_K^+ telle que la suite $(N*\varphi'_{p,n} + (1/p)\varphi'_{p,n})$ converge d'une manière croissante vers $N*\varphi$ avec $n \to +\infty$.*

On choit une suite croissante $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverte relativement compacts de X telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$. Soit $\varepsilon'_{p,n}$ la mesure balayée de ε sur ω_n relativement à $(N + (1/p)\varepsilon, N)$; alors $(N*\varepsilon'_{p,n} + (1/p)\varepsilon'_{p,n})$ converge d'une manière croissante vers N avec $n \to +\infty$. En posant $\varphi'_{p,n} = \varphi * \varepsilon'_{p,n}$, la suite $(\varphi'_{p,n})$ vérifie notre condition.

PROPOSITION 1. *Soient N, p et ω un noyau de convolution sur X satisfaisant au principe de domination, un nombre positif et un ouvert relativement compact, respectivement. On note $\varepsilon'_{x,p,\omega}$ la mesure balayée de ε_x sur ω relativement à $(N + (1/p)\varepsilon; N)$, où ε_x est la mesure d'unité à $x \in X$. Alors, quelle que soit φ de C_K^+, la fonction $x \to \int \varphi d\varepsilon'_{x,p,\omega}$ est une différence de deux fonctions semi-continues inférieurement. On a, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X à support compact,*

$$\mu'_{p,\omega} = \int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x) ,$$

où $\mu'_{p,\omega}$ est la mesure balayée de μ sur ω relativement à $(N + (1/p)\varepsilon; N)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que, quelle que soit φ de C_K^+, la fonction $x \to \int (\check{N}*\varphi + (1/p)\varphi) d\varepsilon'_{x,p,\omega}$ est semi-continue inférieurement dans X, car, d'après le présent corollaire, pour une fonction φ de C_K^+, il existe une suite (φ'_n) de C_K^+ telle que $(\check{N}*\varphi'_n + (1/p)\varphi'_n)$ converge d'une manière croissante vers $\check{N}*\varphi$. Pour un point x de X, il existe une famille filtrante $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ convergeant vers x et une mesure de Radon positive $\varepsilon''_{x,p,\omega}$ dans X telles que $(\varepsilon'_{y_\alpha,p,\omega})_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers $\varepsilon''_{x,p,\omega}$ et que l'on ait

$$\begin{aligned}\varliminf_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \int \left(\check{N}*\varphi + \frac{1}{p}\varphi\right) d\varepsilon'_{y,p,\omega} &= \lim_{\alpha} \int \left(\check{N}*\varphi + \frac{1}{p}\varphi\right) d\varepsilon'_{y_\alpha,p,\omega} \\ &= \int \left(\check{N}*\varphi + \frac{1}{p}\varphi\right) d\varepsilon''_{x,p,\omega} .\end{aligned}$$

Evidemment $\varepsilon''_{x,p,\omega}$ est portée par $\bar{\omega}$ et on a, au sens des mesures,

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \varepsilon''_{x,p,\omega} \leqq N * \varepsilon_x \text{ dans } X \text{ et } \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \varepsilon''_{x,p,\omega} = N^* \varepsilon_x \text{ dans } \omega .$$

On a, d'après la condition (c) dans le présent théorème,

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \varepsilon'_{x,p,\omega} \leqq \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \varepsilon''_{x,p,\omega}$$

au sens des mesures dans X. Donc

$$\begin{aligned}\int\left(\check{N} * \varphi + \frac{1}{p}\varphi\right) d\varepsilon''_{x,p,\omega} &= \int \varphi d\left(N * \varepsilon''_{x,p,\omega} + \frac{1}{p}\varepsilon''_{x,p,\omega}\right)\\ &\geqq \int \varphi d\left(N * \varepsilon'_{x,p,\omega} + \frac{1}{p}\varepsilon'_{x,p,\omega}\right)\\ &= \int\left(\check{N} * \varphi + \frac{1}{p}\varphi\right) d\varepsilon'_{x,p,\omega}\ ,\end{aligned}$$

d'où $x \to \int(\check{N} * \varphi + (1/p)\varphi) d\varepsilon'_{x,p,\omega}$ est semi-continue inférieurement. Pour une mesure de Radon positive μ dans X à support compact, l'intégrale $\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)$ est une mesure de Radon positive dans X portée par $\bar{\omega}$ et on a, au sens des mesures,

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)\right) \leqq N * \mu \text{ dans } X \text{ et } \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)\right) = N * \mu$$

dans ω. Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts de X telle que $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega$, $\bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha = \omega$; alors $\varepsilon'_{x,p,\omega_\alpha}$ converge vaguement vers $\varepsilon'_{x,p,\omega}$, et donc $\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)$ converge aussi vaguement vers $\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)$. D'après la remarque 1, au sens des mesures,

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega_\alpha} d\mu(x)\right) \leqq \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \mu'_{p,\omega}$$

dans X, d'où

$$\left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \left(\int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)\right) \leqq \left(N + \frac{1}{p}\varepsilon\right) * \mu'_{p,\omega}\ .$$

D'après la définition de $\mu'_{p,\omega}$, on a

$$\mu'_{p,\omega} = \int \varepsilon'_{x,p,\omega} d\mu(x)\ .$$

La démonstration est ainisi complète.

COROLLAIRE. *Soient N, p et ω les mêmes que ci-dessus. Pour un point x de X,*

$$N*\varepsilon_x = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n)}$$

au sens des mesures dans ω, *où* $\varepsilon_{x,p,\omega}^{(1)} = \varepsilon'_{x,p\ \omega}$ *et* $\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n)} = \int \varepsilon_{y,p,\omega}^{(n-1)} d\varepsilon'_{x,p,\omega}(y)$ $(n \geqq 2)$.

On a d'abord, quel que soit n un entier positif,

$$N*\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n+1)} + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{x,p,\omega}^{(k)} = N*\varepsilon_x$$

au sens des mesures dans ω. Donc $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n)}$ a un sens, et par suite $\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n)}$ converge vaguement vers 0 avec $n \to +\infty$. Ayant $s(\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n)}) \subset \bar{\omega}$, $N*\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n)}$ converge aussi vaguement vers 0 avec $n \to +\infty$, d'où, au sens des mesures,

$$N*\varepsilon_x = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{x,p,\omega}^{(n)} \text{ dans } \omega\ .$$

Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts relativement compacts de X telle que $\bar{\omega}_n \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n = X$. On note $\varepsilon'_{p,\omega_n}$ la mesure balayée de ε sur ω_n relativement à $(N + (1/p)\varepsilon, N)$; on a alors $\varepsilon_{p,\omega_n} \geqq \varepsilon'_{p,\omega_{n+1}}$ au sens des mesures dans ω_n. Donc $(\varepsilon'_{p,\omega_n})$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive pN_p dans X avec $n \to +\infty$. Alors, quel que soit x de X, $(\varepsilon'_{x,p,\omega_p})$ converge vaguement vers $pN_p*\varepsilon_x$ avec $n \to +\infty$, et $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante, c'est-à-dire, quel que soit $p > 0$ et $q > 0$,

$$N_p - N_q = (q-p)N_p*N_q\ .$$

On dit que $(N_p)_{p>0}$ est la résolvante associée au noyau N.

DÉFINITION 3. On dit qu'un noyau de convolution N sur X satisfait au principe du balayage si, pour une mesure de Radon positive μ dans X à support compact et pour un ouvert relativement compact ω de X, il existe une mesure de Radon positive μ'_ω dans X portée par $\bar{\omega}$ telle que, au sens des mesures, $N*\mu \geqq N*\mu'_\omega$ dans X et $N*\mu = N*\mu'_\omega$ dans ω.

La proposition suivante est déjà connue dans [3]. Elle sera immédiatement obtenue du théorème 2.

PROPOSITION 2. *Soit N un noyau de convolution sur X. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *N satisfait au principe de domination.*

(2) *N satisfait au principe du balayage.*

(3) *$\check{N}$ satisfait au principe de domination.*

(4) *$\check{N}$ satisfait au principe du balayage.*

Démonstration. Il suffit de voir (1) $\Rightarrow$ (2) et (2) $\Rightarrow$ (3). Supposer que (1) a lieu. Pour une mesure de Radon positive μ dans X à support compact et pour un ouvert relativement compact ω de X, on note $\mu'_{p,\omega}$ la mesure balayée de μ sur ω relativement à $(N+(1/p)\varepsilon, N)$. Alors $(\mu'_{p,\omega})_{p>0}$ est vagument bornée, et donc on peut supposer qu'il existe une mesure de Radon Positive μ'_ω dans X portée par $\bar{\omega}$ et telle que $\mu'_{p,\omega}$ converge vaguement vers μ'_ω avec $p \to +\infty$. On a alors, au sens des mesures, $N*\mu'_\omega \leqq N*\mu$ dans X et $N*\mu'_\omega = N*\mu$ dans ω, d'où (1) $\Rightarrow$ (2).

Supposer que (2) a lieu et que, pour deux fonction φ, ψ de C_K^+, $N*\varphi \leqq N*\psi$ on $s(\varphi)$. Pour un point x de X, il existe une mesure de Radon positive ε'_x portée par $\overline{\{x \in X\,;\varphi(x) > 0\}}$ et telle que, au sens des mesures, $N*\varepsilon'_x \leqq N*\varepsilon_x$ dans X et $N*\varepsilon'_x = N*\varepsilon_x$ dans $\{x \in X\,;\varphi(x) > 0\}$. On a alors

$$\check{N}*\varphi(x) = \int \varphi d(N*\varepsilon_x) = \int \varphi d(N*\varepsilon'_x) = \int \check{N}*\varphi d\varepsilon'_x \leqq \int \check{N}*\psi d\varepsilon'_x$$
$$= \int \psi d(N*\varepsilon'_x) \leqq \int \psi d(N*\varepsilon_x) = N*\psi(x)\ ,$$

d'où (2) $\Rightarrow$ (3). La démonstration est ainsi complète.

Par conséquent, si N satisfait au principe du balayage, alors, pour une mesure de Radon positive μ dans X et pour un ouvert relativement compact ω de X, il existe une mesure de Radon positive μ'_ω dans X portée par $\bar{\omega}$ et telle que l'on ait:

(1) $N*\mu'_\omega \leqq N*\mu$ au sens des mesures dans X.

(2) $N*\mu'_\omega = N*\mu$ au sens des mesures dans ω.

(3) Quelle que soit ν une mesure de Radon positive dans X portée par $\bar{\omega}$, $N*\nu \geqq N*\mu'_\omega$ dans X dès que $N*\nu \geqq N*\mu$ dans ω.

Dans ce cas, $N*\mu'_\omega$ est déterminé uniquement, qui s'appelle le potientel balayé de $N*\mu$. Mais μ'_ω n'est pas toujours unique. Si cela est uniquement déterminé, elle s'appelle la mesure balayée de μ sur ω relativement au noyau N.

COROLLAIRE. *Soint N, p et ω respectivement un noyau de convolution sur X satisfaisant au principe de domination, un nombre positif et un ouvert relativement compact de X; pour un point x de X, on note $\check{\varepsilon}'_{x,p,\omega}$ la mesure balayée de ε_x relativement à $(\check{N}+(1/p)\varepsilon\,;\check{N})$. Alors $\check{\varepsilon}'_{x,p,\omega} = \varepsilon'_{-x,p,-\omega}$.*

En effet, on a, au sens des mesures,

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$N * \varepsilon_{-x} = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{(n)}_{-x,p,-\omega}$$

dans $-\omega$, et donc

$$\check{N} * \varepsilon_x = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \check{\varepsilon}^{(n)}_{-x,p,-\omega}$$

dans ω, d'où $\tilde{\varepsilon}'_{x,p,\omega} = \check{\varepsilon}'_{-x,p,-\omega}$.

4. Le principe complet du maximum et le type positif

On commencera d'abord avec le lemme suivant:

LEMME 2. *Soit N un noyau de convolution sur X satisfaisant au principe de domination; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *N satisfait au principe complet du maximum.*

(2) *Quels que soient p, ω* et *μ un nombre positif, un ouvert relativement compact de X et une mesure de Radon positive dans X* à *support compact, respectivement; on a alors $\int d\mu'_{p,\omega} \leqq \int d\mu$.*

On montrera d'abord l'implication (1) ⇨ (2). Pour cela, il suffit que, quel que soit x de X, $\int d\varepsilon'_{x,p,\omega} \leqq 1$. D'après le corollaire ci-dessus, il suffit de voir que, quelle que soit f de M^+_K, $\int \tilde{f}'_{p,\omega} d\xi \leqq \int f d\xi$, où $\tilde{f}'_{p,\omega}\xi$ est la mesure balayée de $f\xi$ sur ω relativement à $(\check{N} + (1/p)\varepsilon\,; \check{N})$. De la même manière que dans le théorème 2 et d'après le principe complet du maximum pour N, il existe uniquement une fonction g_ω de M^+_K portée par $\bar{\omega}$ telle que $Ng_\omega + (1/p)g_\omega \leqq 1$ ξ-p.p. sur X et $Ng_\omega + (1/p)g_\omega = 1$ ξ-p.p. sur $\bar{\omega}$. Donc

$$\int \tilde{f}'_{p,\omega} d\xi = \int \Big(Ng_\omega + \frac{1}{p} g_\omega\Big) \tilde{f}'_{p,\omega} d\xi = \int \Big(\check{N}\tilde{f}'_{p,\omega} + \frac{1}{p}\tilde{f}'_{p,\omega}\Big) g_\omega d\xi$$
$$\leqq \int \check{N} f(x) g_\omega(x) d\xi(x) = \int N g_\omega(x) f(x) d\xi(x) \leqq \int f d\xi\ ,$$

d'où (1) ⇨ (2).

L'implication (2) ⇨ (1) peut être montrée de la même manière que dans la proposition 2.

On obtient, en même temps, que le principe complet du maximum pour N est équivalent au principe complet du maximum pour $\check{N}$.

DÉFINITION 4. Soit N un noyau de convolution sur X. On dit que N est borné (resp. s'annule à l'infini) si, quelle que soit φ de C_K, $N*\varphi$ est borné sur X (resp. $N*\varphi$ s'annule à l'infini). On dit, d'autre part, que N est de type positif si, quelle que soit φ de C_K, $\int N*\varphi(x)\varphi(x)d\xi(x) \geqq 0$.

On remarque que "le type positif" n'implique pas toujours "symétrique" (c'est-à-dire, $N \neq \check{N}$). Si N est de type pisitif (à notre sens), alors $N + \check{N}$ est de type positif au sens usuel, et donc il est borné.

LEMME 3. *Soit σ une mesure de Radon positive dans X; supposons que $\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma)^n$ a un sens, où $(\sigma)^0$ et $(\sigma)^n = (\sigma)^{n-1}*\sigma$ $(n \geqq 2)$. Si $N = \sum_{n=0}^{\infty}(\sigma)^n$ est borné, alors $\int d\sigma \leqq 1$.*

Il suffit de montrer notre lemme dans le cas où σ est a support compact. On a, quel que soit c un nombre positif avec $c\int d\sigma < 1$, $\int d(\sum_{n=0}^{\infty}(c\check{\sigma})^n)$ $< +\infty$. N étant borné, la convolution $N*\sum_{n=0}^{\infty}(c\check{\sigma})^n$ a un sens, et cela est aussi borné. On a ensuite

$$N*\sum_{n=0}^{\infty}(c\check{\sigma})^n \geqq \sum_{n=0}^{\infty}(c(\sigma*\check{\sigma}))^n .$$

Le noyau de convolution $\sum_{n=0}^{\infty}(c(\sigma*\check{\sigma}))^n$ sur X est symétrique et de type positif, et on a

$$(\varepsilon - c(\sigma*\check{\sigma}))*\sum_{n=0}^{\infty}(c(\sigma*\check{\sigma}))^n = \varepsilon .$$

Donc $\varepsilon - c(\sigma*\check{\sigma})$ est aussi symétrique et de type positif, et par suite,

$$c\int d(\sigma*\check{\sigma}) = c\left(\int d\sigma\right)^2 \leqq 1 ,$$

d'où $\int d\sigma \leqq 1$.

On remarque que, dans le cas où N est symétrique par rapport à l'origine, on a $\int d\sigma \leqq 1$ sans la condition que N est borné, car $\sum_{n=0}^{\infty}((\sigma)^2)^n$ est toujours de type positif. Mais, en général, la condition que N est borné est inévitable. Par exemple, $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\varepsilon_n$ $(a \geqq 0)$ satisfait toujours au principe de domination. Il est borné si et seulement si $0 \leqq a \leqq 1$.

THÉORÈME 3. *Soit N su noyau de convolution sur X satisfaisant au principe de domination; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

(1) *N satisfait au principe complet du maximum.*
(2) *N est de type positif.*
(3) *N est borné.*

Démonstration. Montrons d'abord que (1) implique (2). Soit ω un ouvert relativement compact de X; on désigne respectivement par $\varepsilon'_{x,p,\omega}$ et par $\tilde{\varepsilon}'_{x,p,\omega}$ les mesures balayées de ε_x sur ω relativement à $(N+(1/p)\varepsilon\,;N)$ et à $(\check{N}+(1/p)\varepsilon\,;\check{N})$. On a, quelle que soit φ de C_K avec $s(\varphi)\subset\omega$,

$$p\int\Big((\check{N}*\varphi)_\omega(y)+\frac{1}{p}\varphi(y)\Big)d(\varepsilon_x-\varepsilon'_{x,p,\omega})(y)$$
$$=p\iint\varphi(z)d\Big(N*\varepsilon_y+\frac{1}{p}\varepsilon_y\Big)(z)d(\varepsilon_x-\varepsilon'_{x,p,\omega})(y)$$
$$=\iint\varphi(z)d\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{(n)}_{y,p,\omega}+\varepsilon_y\Big)(z)d(\varepsilon_x-\varepsilon'_{x,p,\omega})(y)=\varphi(x)$$

et

$$p\int\Big((N*\varphi)_\omega(y)+\frac{1}{p}\varphi(y)\Big)d(\varepsilon_x-\tilde{\varepsilon}'_{x,p,\omega})(y)=\varphi(x)\ ,$$

où $(N*\varphi)_\omega(y)=N*\varphi(y)$ dans ω et $(N*\varphi)_\omega(y)=0$ sur son complément. On a, quelle que soit ψ de C_K avec $s(\psi)\subset\omega$.

$$\int(N*\varphi)_\omega\psi d\xi=\int(\check{N}*\psi)_\omega\varphi d\xi\ ,$$

et donc, d'après le corollaire précédent,

$$\iint\Big((N*\varphi)_\omega(x)+\frac{1}{p}\varphi(x)\Big)\Big((N*\psi)_\omega(y)+\frac{1}{p}\psi(y)\Big)d\varepsilon'_{x,p,\omega}(y)d\xi(x)$$
$$=\iint\Big((N*\varphi)_\omega(y)+\frac{1}{p}\varphi(y)\Big)\Big((N*\psi)_\omega(x)+\frac{1}{p}\psi(x)\Big)d\tilde{\varepsilon}'_{x,p,\omega}(y)d\xi(x)\ .$$

Par conséquent, on a, d'après le fait que $P(N+(1/p)\varepsilon\,;\bar{\omega})$ est dense dans $L^2(\bar{\omega})$,

$$\iint\varphi(x)\psi(y)d\varepsilon'_{x,p,\omega}(y)d\xi(x)=\iint\varphi(y)\psi(x)d\tilde{\varepsilon}'_{x,p,\omega}(y)d\xi(x)\ .$$

On a

$$\int N*\varphi(x)\varphi(x)d\xi(x)+\frac{1}{p}\int|\varphi(x)|^2d\xi(x)=\int(\check{N}*\varphi)_\omega(x)\varphi(x)d\xi(x)+\frac{1}{p}\int|\varphi(x|^2d\xi(x)$$
$$=p\iint\Big((\check{N}*\varphi)_\omega(x)+\frac{1}{p}\varphi(x)\Big)\Big((\check{N}*\varphi)_\omega(y)+\frac{1}{p}\varphi(y)\Big)d(\varepsilon_x-\varepsilon'_{x,p,\omega})(y)d\xi(x)$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$= p\int\Big((\check{N}*\varphi)_\omega(x) + \frac{1}{p}\varphi(x)\Big)^2\Big(1 - \frac{1}{2}\int d\varepsilon'_{x,p,\omega} - \frac{1}{2}\int d\tilde{\varepsilon}'_{x,p,\omega}\Big)d\xi(x)$$
$$+ \frac{1}{2}p\iint\Big((\check{N}*\varphi)_\omega(x) + \frac{1}{p}\varphi(x) - (\check{N}*\varphi)_\omega(y) - \frac{1}{p}\varphi(y)\Big)^2 d\varepsilon'_{x,p,\omega}(y)d\xi(x)$$
$$\geqq 0\,.$$

ω et φ étant quelconques, $N+(1/p)\varepsilon$ est de type positif. Faisant $p\to+\infty$, on obtient que N est de type positif.

L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) étant déjà marquée, et on montrera finalement (3) $\Rightarrow$ (1). D'après le lemme 2 et N étant un noyau de convolution, il suffit de voir que, quels que soient ω un ouvert relativement compact de X et p un nombre positif, $\int d\varepsilon'_{p,\omega}\leqq 1$. On a, quel que soit k un entier positif,

$$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{k}(\varepsilon'_{p,\omega})^n \leqq \Big(N+\frac{1}{p}\varepsilon\Big)*(\varepsilon-\varepsilon'_{p,\omega})*\sum_{n=0}^{k}(\varepsilon'_{p,\omega})^n \leqq N+\frac{1}{p}\varepsilon\,,$$

et donc, $\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon'_{p,\omega})^n$ a un sens et $N+(1/p)\varepsilon\geqq(1/p)\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon'_{p\ \omega})^n$. On obtient ainsi que $\sum(\varepsilon'_{p,\omega})^n$ est borné, et donc, d'après le lemme 3, $\int d\varepsilon'_{p,\omega}\leqq 1$.

Corollaire 1. (Principe d'équilibre) *Soit N un noyau de convolution borné sur X satisfaisant au principe de domination. Si $N\neq 0$, alors, pour un ouvert relativement compact ω de X, il existe une mesure de Radon positive ν_ω dans X portée par $\bar{\omega}$ telle que $N\nu_\omega$ ait au sens et que l'on ait $N\nu_\omega\leqq 1$ ξ-p.p. sur X et $N\nu_\omega=1$ ξ-p.p. dans ω.*

En effect, d'après le principe complet du maximum pour N, pour un nombre positif p, il existe une fonction $g_{p,\omega}$ de M_K^+ portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait $Ng_{p,\omega}+(1/p)g_{p,\omega}\leqq 1$ ξ-p.p. sur X et $Ng_{p,\omega}+(1/p)g_{p,\omega}=1$ ξ-p.p. sur $\bar{\omega}$. Voir la démonstration du théorème 2. D'après $N\neq 0$, $(g_{p,\omega}\xi)_{p>0}$ est vaguement bornée. Soit ν_ω un point vaguement adhérent de $(g_{p,\omega}\xi)$; alors on a, au sens des mesures, $N*\nu_\omega\leqq\xi$ sur X et $N*\nu_\omega=\xi$ dans ω, d'où notre corollaire.

Corollaire 2. *Soit N un noyau de convolution borné sur X satisfaisant au principe domination ; alors il existe l'espace fonctionnel invariant par translations sur X, et un seul tel que son noyau soit égal à $N+\check{N}$.*

Cela résulte immediatement du fait que $N+\check{N}$ est symétrique et de type positif.

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

Un espace fonctionnel $H = H(X; \xi)$ invariant par translations sur X est un espace hilbertien $\subset L_{\mathrm{loc}}$ et qui vérifie les deux conditions suivantes: (a) A un compact K de X, on peut associer une constante $A(K) > 0$ telle que, quelle que soit u de H, $\int_K |u| d\xi \leqq A(K) \|u\|$; (b) Quels que soient x de X et u de H, la fonction $\tau_x u$ obtenue de u par la translation de x appartient à H et $\|\tau_x u\| = \|u\|$ (cf. [1]).

On note ici $\|\cdot\|$ et $(\cdot, \cdot)$ la norme dans H et le produit scalaire associé. D'après la condition (a), à une fonction f de M_K, on peut associer uniquement une fonction u_f de H telle que, quelle que soit u de H, $(u_f, u) = \int u(x) f(x) d\xi(x)$. S'il existe un noyau de convolution N sur X tel que, quelle que soit f de M_K, $u_f = Nf$, alors il est uniquement déterminé et s'appelle le noyau de H. On dit aussi que H est engendré par N et on écrit précisément $H = H(N)$. Dans ce cas, N est évidemment symétrique.

5. Les noyau de Dirichlet généralisés

On dit qu'un espace fonctionnel H invariant par translations sur X est régulier si $C_K \cap H$ est dense dans C_K et dans H.

LEMME 4. *Soient N un noyau de convolution sur X et de type positif et H l'espace fonctionnel invariant par translations sur X dont le noyau est $(1/2)(N + \check{N})$ (noté N_s). Si H est régulier, alors N s'annul à l'infini.*

En effet, pour une fonction φ de C_K^+ et pour un nombre $\sigma > 0$ quelconque, il exist une fonction u_σ de $C_K \cap H$ telle que $\|N_s \varphi - u_\sigma\| < \sigma$, où $\|\cdot\|$ est la norme dans H. On a, quelle que soit ψ de C_K^+,

$$\begin{aligned} N_s * \varphi * \psi(x) &= (N_s(\tau_x \psi), N_s \varphi) \leqq |(N_s(\tau_x \psi), u_\sigma)| + |(N_s(\tau_x \psi), N_s \varphi - u_\sigma)| \\ &\leqq |u_\sigma * \psi(x)| + \|N_s \psi\| \sigma , \end{aligned}$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans H. Donc

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} N_s * \varphi * \psi(x) \leqq \|N_s \psi\| \sigma ,$$

d'où $N_s * \varphi * \psi$ tend vers 0 à l'infini. Il en résulte donc que N a'snnule à l'infini.

LEMME 5. *Soient N un noyau de convolution sur X satisfaisant au principe de domination et $(N_p)_{p>0}$ la résolvante associée à N; supposer qu'il existe l'espace fonctionnel régulier et invariant par translations sur*

X dont le noyau est N_s. Alors N_p converge d'une manière croissante vers N avec $p \downarrow 0$.

En effet, pour une suite croissante $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de X avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$, $\varepsilon'_{p,\omega_n}$ converge vaguement vers pN_p avec $n \to +\infty$, où $\varepsilon'_{p,\omega_n}$ est la mesure balayée de ε sur ω_n relativement à $(N + (1/p)\varepsilon, N)$. D'après le fait que N satisfait au principe complet du maximum, on a $\int d\varepsilon'_{p,\omega_n} \leqq 1$. N s'annulant à l'infini, on obtient que $N * \varepsilon'_{p,\omega_n}$ converge vaguement vers $pN * N_p$ avec $n \to +\infty$, d'où

$$N - N_p = pN * N_p .$$

Il est évident que, lorsque $p > 0$, $(N_p)_{p>0}$ est croissante. Ayant $p\int dN_p \leqq 1$, $N_p \leqq N$ et N s'annulant à l'infini, on obtient facilement que $pN * N_p$ converge vaguement vers 0 avec $p \to 0$, d'où notre lemme.

PROPOSITION 3. *Soit N un noyau de convolution sur X satisfaisant au principe de domination; supposer qu'il existe l'espace fonctionnel régulier $H = H(N_s)$ invariant par translations sur X. Alors il existe un semi-groupe vaguement continu $(\mu_t)_{t>0}$ des mesures de Radon positives et sous-markoviennes dans X, et un seul tel que $N = \int \mu_t dt$; c'est-à-dire, N est un noyau de Hunt.*

On remarque que N satisfait au principe complet du maximum et que, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X de masse totale finie, $\mu = \nu$ dès que $N * \mu = N * \nu$. Donc cette proposition résultera immédiatement du lemme 5 et de la théorie générale de [5]. On dit ici que μ_t est sous-markovienne si l'on a $\int d\mu_t \leqq 1$.

DÉFINITION 5. On dit qu'un noyau de convolution N sur X est un noyau de Dirichlet généralisé sur X s'il existe un espace fonctionnel régulier H invariant par translations sur X et une forme de Dirichlet généralisée $\alpha(u, v)$ sur H tels que, quelle que soit f de M_K, $Nf \in H$ et, quelle que soit u de H,

$$\alpha(Nf, \mu) = \int u(x) f(x) d\xi(x) .$$

On dit qu'une forme $\alpha(u, v)$ bi-linéaire et bornée sur $H \times H$ est une forme de Dirichlet généralisée sur H si l'on a, quelle que soit u de H, $T_I \cdot u \in H$, $\alpha(u, u) = \|u\|^2$,

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$\alpha(u - T_I\cdot u, u + T_I\cdot u) \geqq 0 \text{ et } \alpha(u + T_I\cdot u, u - T_I\cdot u) \geqq 0 ,$$

où T_I est la projection de la droite réelle à l'intervalle fermé $I = [0, 1]$ (cf. [2] et [6]). Dans ce cas, H est un espace de Dirichlet spécial sur X.

Remarque 5. Un noyau de Dirichlet générlisé N sur X est un noyau de Hunt.

En effect, d'après le résultat de [2] et [6], N satisfait au principe complet du maximum, et donc il est un noyau de Hunt.

Remarque 6. Soit $\alpha(u, v)$ une forme bi-linéaire et bornée sur $H \times H$ invariante par translations. Pour que $\alpha(u, v)$ soit une forme de Dirichlet généralisée sur H, il faut et il suffit que, quelle que soit u de H, u^+ et u^- appartiennent à H et que l'on ait $\alpha(u^+, u^-) \leqq 0$.

En effet, d'après le résultat de [2] et [6], si $\alpha(u, v)$ vérifie l'une des deux présents conditions, il existe un noyau de convolution N sur X, et un seul tel que, quelles que soient f de M_K et u de H, $Nf \in H$ et

$$\alpha(Nf, u) = \int u(x)f(x)d\xi(x) .$$

On connaît aussi que N satisfait au principe complet du maximum si et seulement si $\alpha(u, v)$ est une forme de Dirichlet généralisée sur H, et que N satisfait au principe de domination si et seulement si, quelle que soit u de H, $|u| \in H$, $(u - |u|,\ u + |u|) \geqq 0$ (cf. [2] et [6]). N étant de type positif, les présentes deux conditions sont équivalentes, d'après le théorème 3.

THÉORÈME 4. *Soit N un noyau de convolution sur X. Si les trois conditions suivantes sont vérifiées, alors N est un noyau de Dirichlet généralisé sur X:*

(i) *N satisfait au principe de domination.*

(ii) *$H(N_s)$ a un sens et il est régulier.*

(iii) *Il existe une constante $A(N) > 0$ telle que, quelle que soit f de M_K, $Nf \in H(N_s)$ et $\|Nf\| \leqq A(N)\left(\int Nf(x)f(x)d\xi(x)\right)^{1/2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme dans $H(N_s)$.*

Démonstration. D'après (i) et (ii), N s'annule à l'infini et satisfait au principe complet du maximum. De la condition que $H(N_s)$ est régulier, on a, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X de masse totale finie, $\mu = \nu$ dès que $N * \mu = N * \nu$. Soit K un voisinage compact de l'origine 0 ; on choit une suit croissante $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de X avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = \mathscr{C}K$. D'après la présente remarque concernant l'unicité, il existe la mesure balayée ε'_n de ε sur ω_n relativement au noyau N. Ayant $\int d\varepsilon'_n \leqq 1$ et la suite $(\varepsilon'_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeant vaguement avec $n \to +\infty$, on obtient qu'il existe une mesure de Radon positive ε'_K portée par $\overline{\mathscr{C}K}$, et une seule telle que, au sens des mesures, $N \geqq N * \varepsilon'_K$ dans X et $N = N * \varepsilon'_K$ dans $\mathscr{C}K$, et que, quelle que soit ν une mesure de Radon positive dans X portée par $\overline{\mathscr{C}K}$, $N * \nu \geqq N * \varepsilon'_K$ dans X dès que $N * \nu \geqq N$ dans $\mathscr{C}K$. On a $N \neq N * \varepsilon'_K$. Poser

$$H'_D = \{N * \varphi - N * \varepsilon'_K * \varphi\,;\ K\colon \text{voisinage compact de } 0,\ \varphi \in C_K\}$$

et, quelles que soient f, g de M_K,

$$(Nf, Ng)_D = \int N_s f(x) g(x) d\xi(x)\,;$$

alors $(\cdot, \cdot)_D$ est un produit scalaire. On a, quel que soit K un compact de X,

$$\int_K |Nf(x)|\, d\xi(x) \leqq C(K) \|Nf\| = C(K) A(N) \|Nf\|_D\ ,$$

où $C(K)$ est une constant positive dépendant seulement de K. On peut poser, par exemple,

$$C(K) = 2\left(\int_K N\chi_K(x) d\xi(x)\right)^{1/2},$$

où χ_K désigne la fonction caractéristique de K. Donc la complète H_D de $\{Nf\,; f \in M_K\}$ par la norme $\|\cdot\|_D$ est un espace fonctionnel invariant par translations sur X. On a $H_D \supset H'_D$, et donc $H_D \cap C_K$ est dense dans C_K. Soit $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de voisinages compacts de 0 telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$; alors, quelle que soit φ de C_K, la suite $(N * \varepsilon'_{K_n} * \varphi)$ converge fortement vers 0 avec $n \to +\infty$, car N_s s'annule à l'infini et on a $\int d\varepsilon_{K_n} \leqq 1$, et donc $C_K \cap H_D$ est aussi dense dans H_D, d'où H_D est régulier. On pose, quelle que soient f, g de M_K,

$$\alpha(Nf, Ng) = \int Ng(x) f(x) d\xi(x)\ .$$

Alors on a

$$|\alpha(Nf, Ng)| = |(N_s f, Ng)| \leqq \|N_s f\| \cdot \|Ng\| \leqq A(N)\|Nf\|_D \cdot \|Ng\|_D .$$

Donc $\alpha(\cdot, \cdot)$ peut être prolongée sur $H_D \times H_D$, et ce prolongement est une forme bi-linéaire et bornée. On note aussi $\alpha(u, v)$ ce prolongement. On a, quelle que soit u de H_D, $\alpha(u, u) = \|u\|_D^2$ et, quelle que soit f de M_K,

$$\alpha(Nf, u) = \int u(x)f(x)d\xi(x) .$$

D'après le fait que N et $\check{N}$ satisfont au principe complet du maximum, on obtient que $\alpha(u, v)$ est une forme de Dirichlet généralisée sur H_D (cf. [2] et [6]). La démonstration est ainsi complète.

Remarque 7. Dans le présent théorème, si $N^*\check{N}$ a un sens, on a

$$N_s * N_D = N * \check{N} ,$$

où N_D est le noyau de H_D.

On dit qu'une fonction complexe et continue ψ sur le group dual $\hat{X}$ de X est définie-négative si l'on a $\psi(\hat{0}) \geqq 0$, $\psi(\hat{x}) = \overline{\psi(-\hat{x})}$ et, quels que soient n un entier positif, $(\hat{x}_i)_{i=1}^n$ de points de $\hat{X}$ et $(\rho_i)_{i=1}^n$ un système de nombres complexes avec $\sum_{i=1}^n \rho_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(x_i - x_j)\rho_i\overline{\rho_j} \leqq 0$$

(cf. [1]). Il est connu que si $1/|\psi|$ est localement $\hat{\xi}$-sommable, où $\hat{\xi}$ est la mesure de Haar sur $\hat{X}$, alors il existe un noyau de convolution de Hunt borné N sur X dont la transformation de Fourier $\hat{N}$ de N est égale à $1/\psi$. Cela résulte du fait que, quel que soit $t > 0$, $\exp(-t\psi)$ est de type positif. On remarque ensuite que si ψ est définie-négative, alors $\mathrm{Re}\,\psi$ est aussi définie-négative.

COROLLAIRE. *Soit ψ une fonction définie-négative sur $\hat{X}$. Si $1/\mathrm{Re}\,\psi$ est localement $\hat{\xi}$-sommable et si l'on a*

$$\hat{\xi}\text{-ess.}\sup_{x \in X}\left(\frac{|\mathrm{Im}\,\psi|}{\mathrm{Re}\,\psi}\right) < +\infty ,$$

alors il exist un noyau de Dirichlet généralisé N sur X, et un seul tel que $\hat{N} = 1/\psi$.

Cela résulte immédiatement du théorème 4 et du fait que

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{1}{\hat{N}+\bar{\hat{N}}} = \frac{(\mathrm{Re}\,\psi)^2 + (\mathrm{Im}\,\psi)^2}{\mathrm{Re}\,\psi}$$

$\hat{\xi}$-p.p. sur $\hat{X}$, où C est une constant positive.

Par conséquent, quels que soient N un noyau de convolution de Hunt sur X de masse totale finie et c une constante positive, $N + c\varepsilon$ est un noyau de Dirichlet généralisé sur X. Donc la totalité des noyaux de Dirichlet généralisés sur X est dense dans la totalité des noyaux de convolution de Hunt bornés sur X par la topologie vague, car pour un noyau de convolution de Hunt borné N sur X, tout l'élément de la résolvante associée au noyau N est de masse totale finie.

On remarque finalement que, pour un noyau de Dirichlet généralisé N sur X, $\check{N}$ est aussi un noyau de Dirichlet génériisé sur X. Mais N_s n'est pas toujours un noyau de Dirichlet sur X. Un noyau de Dirichlet sur X signifie un noyau d'espace de Dirichlet spécial sur X. On peut fournir facilement son exemple sur la droite réelle.

Si un noyau de convolution N satisfait au principe de domination et si N_s y satisfait aussi, alors $\check{N}$ satisfait au principe complet du maximum, car N_s est de type positif, et donc N l'est aussi. Mais, en général, pour un noyau de covolution N sur X satisfaisant au principe de domination, nous ne connaissons pas de bonnes conditions pour que N_s satisfasse au principe de domination.

PROPOSITION 4. *Soit N un noyau de convolution sur X; supposons qu'il existe la résolvante $(N_p)_{p>0}$ telle que $\lim_{p\to 0} N_p = N$. Si l'on a, quel que soit $p > 0$, $N_p + \check{N}_p \geqq 2pN_p * \check{N}_p$, alors $N_s = \frac{1}{2}(N + \check{N})$ satisfait au principe complet du maximum.*

Démonstration. On a, quels que soient $p > 0$ et $q > 0$ avec $q < p$,

$$N_q + \frac{1}{p-q}\varepsilon = \frac{1}{p-q}\sum_{n=0}^{\infty}((p-q)N_p)^n .$$

La convolution $N_q * \check{N}_q$ a un sens, et on a

$$((p - q)N_q + \varepsilon) * ((p-q)\check{N}_q + \varepsilon) \geqq \sum_{n=0}^{\infty}((p-q)^2 N_p * \check{N}_p)^n .$$

Donc on a

$$(p-q)^2\left(\int dN_p\right)^2 = (p-q)^2\int d(N_p * \check{N}_p) \leqq 1 ,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000015610 Published online by Cambridge University Press

et faisant $q \to 0$, $p\int dN_p \leqq 1$. Ayant, quel que soit $p > 0$,

$$N_s + \frac{1}{p}\varepsilon = \frac{1}{2p}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(pN_p)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(p\check{N}_p)^n\right),$$

donc, pour notre proposition, il suffit de voir que, quel que soit $0 < c < 1$,

$$\bar{N}_{(c,p)} = \sum_{n=0}^{\infty}(cpN_p)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(cp\check{N}_p)^n$$

satisfait au principe complet du maximum. Remarquer $\int d\sum_{n=0}^{\infty}(cpN_p)^n < +\infty$; on a alors

$$\frac{1}{2}\bar{N}_{(c,p)} * \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}cp(N_p + \check{N}_p)\right)^n * (\varepsilon - cpN_p) * (\varepsilon - cp\check{N}_p) = \varepsilon ,$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}&\left(\frac{1}{2}cp(N_p + \check{N}_p)\right)^n * (\varepsilon - cpN_p) * (\varepsilon - cp\check{N}_p)\\ &= \varepsilon - \frac{1}{2}cp(N_p + \check{N}_p - 2cpN_p * \check{N}_p) * \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}cp(N_p + \check{N}_p)\right)^n,\end{aligned}$$

D'après notre condition,

$$(N_p + \check{N}_p - 2cpN_p * \check{N}_p) * \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}cp(N_p + \check{N}_p)\right)^n \geqq 0$$

et sa masse totale est <1. Donc $\bar{N}_{(c,p)}$ satisfait au principe complet du maximum. La démonstration est ainsi complète.

Par conséquent, s'il n'existe aucun sous-groupe compact de X excepté $\{0\}$, le noyau de convolution N dans notre proposition est un noyau de convolution de Hunt sur X ou 0, car, quel que soit $p > 0$, $N_p + \check{N}_p$ est un noyau de convolution de Dirichlet sur X ou 0 (cf. [7]).

BIBLIOGAPHIE

[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., **45**, 1959, pp. 208–215.
[2] J. Bliedtner: Dirichlet formes on regular functional spaces, Yale Univ., 1970.
[3] G. Choquet et J. Deny: Aspects linéaires de la théorie du potentiel, théorèmes de dualité, C. R. Acad. Sc. Paris, **243**, 1956, pp. 764–766.
[4] ——: Aspects linéaires de la théorie du potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, **250**, 1960, pp. 4260–4262.

[5] J. Deny: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier, **12**, 1962, pp. 643–667.
[6] M. Itô: A note on extended regular functional spaces, Proc. Japan Acad., **43**, 1967, pp. 133–164.
[7] ——: Noyaux de convolution réguliers et noyaux de convolution singuliers, Nagoya Math. J., **44**, 1971, pp. 61–78.
[8] ——: Sur les principes des divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., **44**, 1971, pp. 133–164.
[9] ——: Noyaux réguliers et noyaux singuliers, Nagoya Math. J., **50**, 1973, pp. 117–148.

Institut Mathématique
d'Université de Nagoya