DER HÖHENSATZ IN DER GEOMETRIE INVOLUTORISCHER GRUPPENELEMENTE

F. BACHMANN

H. S. M. Coxeter zum 60. Geburtstag gewidmet

In der ebenen absoluten Geometrie, die hier stets in der Allgemeinheit meines Buches *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (AGS) verstanden sei, hat man guten Grund, die Geraden vor den Punkten zu bevorzugen. Grundlegende Relationen in der Menge der Geraden sind das Senkrechtstehen von zwei Geraden und das Im-Büschel-Liegen—die Abhängigkeit—von drei Geraden, das man nach HJELMSLEV wie folgt definiert: Drei Geraden liegen im Büschel, wenn das Produkt der Spiegelungen an ihnen eine Geraden-Spiegelung ist.

In einem Dreiseit ist eine Höhe eine Gerade, die auf einer Seite senkrecht steht und mit den beiden anderen im Büschel liegt. Im folgenden wird ein Beweis für den Höhensatz gegeben, welcher besagt, dass zu den drei Seiten gehörige Höhen stets im Büschel liegen, sofern das Dreiseit nicht ein Polar-Dreiseit ist. Der Beweis nutzt die bereits von HJELMSLEV verwendete Tatsache aus, dass das Produkt der Spiegelungen an den Seiten des Dreiseits eine Gleitspiegelung ist, deren Achse Seite im Höhenfusspunkt-Dreieck ist.

Es zeigt sich nun hierbei, dass der Beweis keineswegs das volle Axiomensystem der ebenen absoluten Geometrie erfordert. Vielmehr genügt es, ausser der gruppentheoretischen Grundannahme aus AGS einfache Eigenschaften des Senkrechtstehens vorauszusetzen: Die Eindeutigkeit des Orthogonalenschnitts, die Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten und die Tatsache, dass drei Geraden mit gemeinsamem Lot im Büschel liegen. Die letzte Tatsache ist ein Spezialfall des Höhensatzes und daher der Sache nach unentbehrlich. Unser Beweis des Höhensatzes reduziert den allgemeinen Fall durch Betrachtung der erwähnten Gleitspiegelungs-Achse auf diesen Spezialfall.

Der Blick wird somit auf die genannten Eigenschaften des Senkrechtstehens gelenkt. Man erkennt, dass sie einen Bereich des Schliessens konstituieren, in dem bereits Aussagen von einigem Interesse beweisbar sind—unabhängig von weiteren Eigenschaften des Im-Büschel-Liegens und der Existenz oder Eindeutigkeit von Verbindungsgeraden.

BEMERKUNGEN zur Terminologie und Schreibweise. Es sei eine Gruppe gegeben, deren Elemente mit α, β, . . . bezeichnet seien. Für $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ schreiben wir γ^α. Eine Menge von Gruppenelementen nennen wir *invariant*, wenn sie gegen die inneren Automorphismen invariant ist, also mit einem Element γ alle Elemente γ^α enthält. *Involutorisch* nennen wir die Elemente der

Received May 1, 1967.

https://doi.org/10.4153/CJM-1967-083-6 Published online by Cambridge University Press

Ordnung 2. ρ, σ, ρ_i, σ_i mögen involutorische Elemente bezeichnen. Man beachte, dass ein involutorisches Produkt $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ gleich $\sigma_n \ldots \sigma_2 \sigma_1$ ist. Statt "$\rho\sigma$ ist involutorisch" schreiben wir $\rho|\sigma$. $\rho|\sigma$ ist äquivalent mit $\rho\sigma = \sigma\rho$ und $\rho \neq \sigma$. Die "Strichrelation" ist symmetrisch. Ausdrücke wie $\rho_1, \rho_2|\sigma$ oder $\rho_1, \rho_2|\sigma_1, \sigma_2$ oder $\rho_1, \rho_2|\sigma_1|\sigma_2$ sind Zusammenfassungen und bedeuten, dass zwei Elemente eines solchen Ausdrucks in der Strichrelation stehen, wenn sich zwischen ihnen wenigstens ein Strich befindet. Z.B. bedeutet $\sigma_1|\sigma_2|\sigma_3$, dass σ_1, σ_2, σ_3 paarweise in der Strichrelation stehen.

1. GRUNDANNAHME. *Gegeben sei eine Gruppe G und ein invariantes, aus involutorischen Elementen bestehendes Erzeugendensystem S von G.*

Mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen wir die Elemente aus S, mit grossen lateinischen Buchstaben [ausser G, S] die involutorischen Elemente aus G, welche als Produkt von zwei Elementen aus S (also in der Form uv mit $u|v$) darstellbar sind. Für die Elemente $a, b, \ldots, A, B, \ldots$ fordern wir die Gültigkeit der folgenden AXIOME:

A0. *Aus $A, A'|b|c$ folgt $A = A'$.*
A1. *Zu A, b gibt es ein c mit $A, b|c$.*
A2. *Aus $A \neq b$ und $A, b|c, c'$ folgt $c = c'$.*

Dem Paar (G, S) ordnen wir eine geometrische Struktur, die *Gruppenebene von* (G, S), zu gemäss dem WÖRTERBUCH:

Geraden	$a, b, \ldots$ (Elemente aus S)
a senkrecht b	$a\|b$
Punkte	$A, B, \ldots$
A inzident b	$A\|b$
A polar b	$A = b$

Ein Punkt ist nach Definition ein Produkt von zwei zueinander senkrechten Geraden. Nach dieser Definition haben zwei zueinander senkrechte Geraden u, v einen Schnittpunkt, nämlich den Punkt uv (denn es gilt $uv|u, v$). Die Axiome besagen:

A0. *Zwei zueinander senkrechte Geraden haben höchstens einen Punkt gemein.*
A1. *Durch jeden Punkt gibt es zu jeder Geraden eine Senkrechte.*
A2. *Sind A, b nicht polar, so gibt es durch A höchstens eine Senkrechte zu b.*

Ist $A \neq b$, so gibt es nach A1 und A2 genau eine Senkrechte von A auf b; diese bezeichnen wir mit (A, b) oder auch mit (b, A). Nach Definition gilt also bei $A \neq b$:

$$A, b|(A, b), \text{ und: } \textit{Aus } A, b|c \textit{ folgt } (A, b) = c.$$

2 (Errichtete Senkrechte). Sind A, b inzident (gilt $A|b$), so nennen wir eine mit A inzidente, auf b senkrechte Gerade (eine Gerade c mit $A|b|c$) eine im Punkte A auf der Geraden b *errichtete Senkrechte*. Die Spezialfälle von A1 und A2, welche bei $A|b$ die Existenz und Eindeutigkeit einer in A auf b errichteten Senkrechten aussprechen, seien mit A1′ bzw. A2′ bezeichnet.

Satz 1. *Aus $A|b|c$ folgt $Ab = c$, also $Abc = 1$ (und umgekehrt).*

Beweis. Wegen $b|c$ ist bc ein Punkt. Es gilt $A, bc|b|c$. Mit A0 folgt $A = bc$.

Nach Satz 1 ist jede in A auf b errichtete Senkrechte gleich Ab. Und da im Beweis nur A0 benutzt wurde, folgt die Eindeutigkeit der errichteten Senkrechten (A2′) aus A0.

Nehmen wir die Existenz einer in A auf b errichteten Senkrechten (A1′) hinzu, so ist die Voraussetzung von Satz 1, also auch die conclusio durch ein c erfüllbar, d.h. es gilt $Ab \in S$:

Satz 2. *Aus $A|b$ folgt $Ab \in S$ (und umgekehrt).*

Für unser Symbol (A, b) gilt nach Satz 1 und 2: *Ist $A|b$, so ist $(A, b) = Ab$.*

Bemerkung. Auf Grund des *kleinen Axiomensystems* A0, A1′, A2′ gilt für die Relation

$$A|b|c,$$

dass zu je zwei von den Elementen A, b, c das dritte eindeutig existiert. Satz 1 ist ein Spezialfall von A0, aus dem A0 unmittelbar (axiomfrei) zurückgewonnen werden kann. Äquivalente des kleinen Axiomensystems sind 1) A0, A1′; 2) Satz 1, A1′; 3) Satz 2, A2′; 4) Satz 1, Satz 2. Für das Schliessen sind Satz 1 und 2 oft bequemer als die geometrischeren A0, A1′, A2′.

3. Drei paarweise zueinander senkrechte Geraden nennen wir ein *Polardreiseit.* Aus A0 folgt:

Satz 3 (vom Polardreiseit). *Aus $a|b|c$ folgt $abc = 1$ (und umgekehrt).*

Beweis. Da a, b, c kommutieren, ist $(abc)^2 = 1$. Wäre $abc \neq 1$, so würde für den Punkt ab gelten: $ab|c$, also $ab|b|c$; nach Satz 1 wäre $abb = c$, also $a = c$, im Widerspruch zu $a|c$.

[Bereits aus A0 und A1 lässt sich zeigen: Wenn es ein Polardreiseit gibt, so gibt es zu jedem Punkt A eine Polare (eine Gerade a mit $A = a$) und zu jeder Geraden a einen Pol (einen Punkt A mit $a = A$). Die Menge der Punkte ist also entweder elementfremd zu S oder gleich S. Vgl. Wolff **(9)**.]

4. Wir erweitern das Wörterbuch um die Definition: Drei Geraden a, b, c *liegen im Büschel*, wenn $abc \in S$ ist. Aus der Invarianz von S folgt, dass diese Relation reflexiv und symmetrisch ist (vgl. AGS, S. 33). Statt $abc \in S$ sagen wir auch: *abc ist ein Gerade*; ist dies der Fall, etwa $abc = d$, so wird d die *vierte Spiegelungsgerade zu a, b, c* genannt.

Beispiel. Sind a, b zwei zueinander senkrechte Geraden, welche mit einem Punkt P inzidieren, so sind die Geraden, welche mit a, b im Büschel liegen, genau die mit P inzidenten Geraden:

Gilt $a|b|P$, so gilt $P|c$ genau dann, wenn $abc \in S$ ist.

Die Voraussetzung $a|b|P$ ist nämlich nach Satz 1 äquivalent mit $ab = P$. Es folgt $abc = Pc$. Daher sind untereinander äquivalent: $abc \in S$, $Pc \in S$, $P|c$, letzteres nach Satz 2.

Wir fordern als weiteres Axiom, dass drei Geraden, welche ein gemeinsames Lot haben, im Büschel liegen:

A3. *Aus* $a, b, c|g$ *folgt* $abc \in S$.

Satz 4 (Ergänzung zu A3). *Aus* $a, b, c|g$ *und* $abc = d$ *folgt* $d|g$.

Beweis mit Hilfe des Satzes vom Polardreiseit wie in AGS, S. 39.

5 (Satz von der Achse). Wir betrachten nun Produkte

$$avb \quad \text{mit } a, b|v, \tag{1}$$

bestehend aus zwei Geraden a, b und einem gemeinsamen Lot v. In (1) sind av, vb Punkte A, B mit $A, B|v$. Das Produkt (1) könnte auch anders geschrieben werden: $avb = Ab = aB = AvB$. Ist $avb \neq 1$, so ist $(A, b) = v = (a, B)$.

Satz 5. *Aus*

$$avb = cwd \neq 1 \textit{ mit } a, b|v \textit{ und } c, d|w \tag{2}$$

folgt $v = w$.

Wir beweisen zunächst einen Spezialfall, in dem eine zusätzliche Inzidenz vorausgesetzt ist:

a) *Aus* (2) *und* $a|cw$ *folgt* $v = w$ (*und sogar* $a = c, b = d$).

Beweis. Wegen $a|cw$ ist $a \cdot cw$ eine Gerade u (Satz 2), mit a, $cw|u$. Aus (2) folgt $a \cdot cw = vb \cdot d$; es gilt also auch $vb \cdot d = u$, also vb, $d|u$. Somit gilt $a, vb, cw, d|u$. Da andererseits $a, vb|v$ und $a \cdot vb \neq 1$ gilt, ist nach A2 $u = v$. Mit $cw, d|w$ ergibt sich entsprechend $u = w$. Also ist $v = w$. Indem man die Gleichungen $u = v, u = w$ als $vbd = v, acw = w$ schreibt, erhält man noch $b = d, a = c$.

A3 und seine Ergänzung lehren:

b) *Zu* (1) *und gegebenem* a' *mit* $a'|v$ *gibt es ein* b', *so dass* $avb = a'vb'$ *und* $b'|v$ *gilt.*

Beweis. Wegen $a', a, b|v$ gibt es nach A3 ein b' mit $a'ab = b'$, und nach Satz 4 gilt $b'|v$. Aus $a'ab = b'$ folgt $ab = a'b'$ und hieraus durch Multiplikation mit v: $avb = a'vb'$.

Mit b) lässt sich Satz 5 auf den Spezialfall a) zurückführen:

Beweis von Satz 5. Es gelte (2). Nach A1 gibt es ein a' mit $a'|cw, v$. Nach b) gilt $avb = a'vb'$ für ein b' mit $b'|v$. Es ist dann

$$a'vb' = cwd \neq 1 \quad \text{mit } a', b'|v \text{ und } c, d|w \text{ und } a'|cw.$$

Nach a) folgt $v = w$.

Sei $\alpha \neq 1$ ein Element aus G, welches als ein Produkt (1) geschrieben werden kann. Satz 5 lehrt, dass in jeder Darstellung von α durch ein Produkt (1) die mittlere Gerade die gleiche und daher dem Element α eindeutig zugeordnet ist. Diese Gerade nennen wir die *Achse* von α.

Jedes Produkt Ab lässt sich als ein Produkt (1) schreiben: Ist v ein Lot von A auf b, so ist Av die in A auf v errichtete Senkrechte (Satz 2) und $Ab = Av \cdot v \cdot b$ eine Darstellung (1); ist dabei $Ab \neq 1$, so ist $v = (A, b)$. Jedes Produkt $Ab \neq 1$ besitzt also eine Achse, und dies ist die Gerade (A, b).

Analog lässt sich jedes Produkt aB als ein Produkt (1) schreiben. Jedes Produkt $aB \neq 1$ besitzt eine Achse, die Gerade (a, B).

Daher ergibt sich aus Satz 5:

SATZ 6. *Aus* $Ab = cD \neq 1$ *folgt* $(A, b) = (c, D)$.

6 (Spiegelpunkt). P^a *ist stets ein Punkt.* Dies folgt unmittelbar (axiomfrei) aus der Invarianz von S, die bisher nicht benutzt wurde, lässt sich aber auch ohne die Invarianz von S aus unseren Axiomen folgern (vgl. WOLFF **(9)**, Satz 1.3). P^a wird der *Spiegelpunkt von* P *bezüglich der Geraden* a *genannt.*

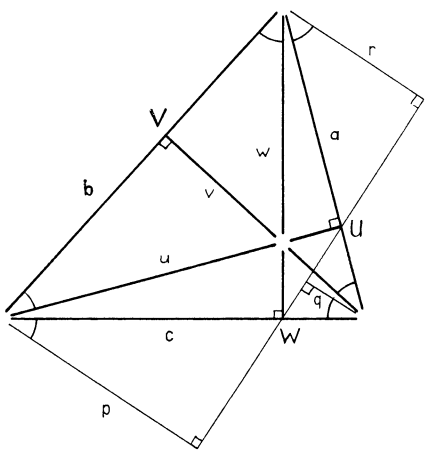
7. Sei a, b, c ein Dreiseit (ein ungeordnetes Geraden-Tripel). Wir nennen u eine *Höhe auf* a, wenn u zu a senkrecht (also au ein Punkt) ist und mit b, c im Büschel liegt.

SATZ 7 (Höhensatz). *Ist* $abc \neq 1$ *und sind*

(3) $$au,\ bv,\ cw\ \textit{Punkte},$$

(4) $$ubc,\ avc,\ abw\ \textit{Geraden},$$

so ist uvw *eine Gerade.*



https://doi.org/10.4153/CJM-1967-083-6 Published online by Cambridge University Press

Beweis. Die Punkte (3) seien mit U, V, W und die Geraden (4) mit p, q, r bezeichnet. Dann gelten die Identitäten

$$(5)\quad Up = abc, \qquad (6)\quad Up = qV^c, \qquad (7)\quad Up = rW, \qquad (8)\quad pqr = uvw.$$

Wegen $abc \neq 1$ ist nach (5) $Up \neq 1$, also (U, p) definiert. Aus (6), (7) folgt nach Satz 6 $(U, p)|q, r$. Wegen $(U, p)|p, q, r$ ist pqr nach A3 eine Gerade, also wegen (8) auch uvw.

Aus (7) folgt nach Satz 6 auch $(U, p)|W$. Es gilt also $(U, p)|U, W$, d.h. (U, p) ist "Seite im Höhenfusspunkt-Dreieck." Man bestätigt

$$(U, p)|p, q, r, uvw, U, W, V^c, V^a, V^w, V^u,$$

und hieraus ergeben sich weitere geometrische Aussagen.

Der Höhensatz enthält A3 als Spezialfall (man setze $a = b = c$). *Unter Voraussetzung der Grundannahme und der Axiome* A0–A2 *sind* A3 *und der Höhensatz untereinander äquivalent.*

H. Kinder verdanke ich die zusätzliche Bemerkung: *Unter Voraussetzung der Grundannahme und der kleinen Axiome* A0, A1′ *folgt aus dem Höhensatz auch die Eindeutigkeit der Senkrechten* (A2).

Beweis. Gegeben seien ein Punkt V und drei Geraden u, v, w, welche die Voraussetzungen von A2 erfüllen: Es gelte $V \neq u$ und $V, u|v, w$. Aus $V|v, w$ folgt nach Satz 2 (einer Folgerung von A0, A1′) $Vv, Vw \in S$; wegen $u|v, w$ sind uv, uw Punkte. Setze $a = v$, $b = Vv$, $c = u$. Dann erfüllen die Geraden a, b, c, u, v, w die Voraussetzungen des Höhensatzes, und nach dem Höhensatz ist $uvw \in S$. Somit gilt $uv, uw|u|w$, also nach A0 $uv = uw$, also $v = w$.

Daher lässt sich das letzte Ergebnis verschärfen: *Unter Voraussetzung der Grundannahme, der Eindeutigkeit des Orthogonalenschnitts* (A0) *und der Existenz der Senkrechten* (A1) *gilt der Höhensatz dann und nur dann, wenn das Lotfällen von einem Punkt auf eine nicht zu ihm polare Gerade eindeutig ist* (A2) *und Geraden mit gemeinsamem Lot im Büschel liegen* (A3).

8. In unserer Beweis-Figur des Höhensatzes (Satz 7) erkennt man mehrere Lotensatz-Figuren. In der Tat sind die wichtige Regel

Satz 8. *$AbC \in S$ gilt genau dann, wenn es ein v mit $A, b, C|v$ gibt*

und als Konsequenz der Lotensatz (AGS, S. 42), Hjelmslev's "Fundamentalsatz," Beispiele weiterer Tatsachen der ebenen absoluten Geometrie, die bereits aus unseren axiomatischen Voraussetzungen (Grundannahme und A0–A3) beweisbar sind.

Beweis von Satz 8. Aus $AbC \in S$ folgt

(9) Es gibt ein v mit $A, b, C|v$

im Falle $A \neq b$ mit Satz 6, und im Falle $A = b$ ist (9) nach A1 allgemein gültig. Gilt umgekehrt (9) und sind a, c die in A, C auf v errichteten Senkrech-

https://doi.org/10.4153/CJM-1967-083-6 Published online by Cambridge University Press

ten: $Av = a$, $vC = c$ (Satz 2), so ist $AbC = avbvc = abc$ (denn v kommutiert mit b) und nach A3 $abc \in S$.

SATZ 9 (Lotensatz). *Ist* $aa' = A$, $cc' = C$ *und* $abc = d$, *so gilt:* a', b, c' *liegen im Büschel genau dann, wenn es ein* v *mit* $A, d, C|v$ *gibt.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt axiomfrei $a'bc' = AdC$. Daher liefert Satz 8 die Behauptung.

9. Wir schliessen mit einigen axiomatischen Bemerkungen, die die Allgemeinheit des bisher benutzten Axiomensystems

$$\mathfrak{A}\text{: A0, A1, A2, A3}$$

beleuchten mögen. Die Grundannahme sei stets, ohne besondere Erwähnung, unverändert vorausgesetzt.

Natürliche, in der ebenen absoluten Geometrie gültige Eigenschaften des Im-Büschel-Liegens, die aus dem Axiomensystem $\mathfrak{A}$ nicht beweisbar sind, sind z.B. das Axiom

A4. *Aus* $a, b, c| P$ *folgt* $abc \in S$,

welches besagt, dass drei Geraden, die mit einem Punkt inzidieren, im Büschel liegen, und die sogenannten *Umkehrungen* von A3 und A4:

UA3. *Aus* $abc \in S$ *und* $a, b|g$ *und* $a \neq b$ *folgt* $c|g$,

UA4. *Aus* $abc \in S$ *und* $a, b| P$ *und* $a \neq b$ *folgt* $c| P$.

Etwa UA4 sagt: Liegen drei Geraden im Büschel und gehen zwei verschiedene von ihnen durch einen Punkt, so geht auch die dritte durch diesen Punkt.

A4 enthält Satz 2 als Spezialfall. Die Aussagen UA3, UA4 implizieren unter geringen Voraussetzungen Eindeutigkeiten: Unter Voraussetzung der kleinen Axiome A0, A1′ folgt sowohl aus UA3 als aus UA4 die Eindeutigkeit einer Verbindungsgeraden, d.h. das Axiom

A2*. *Aus* $A, B| c, d$ *folgt* $A = B$ *oder* $c = d$.

A2* enthält die Eindeutigkeit des Orthogonalenschnitts (A0) als Spezialfall und impliziert auch die Eindeutigkeit der Senkrechten (A2). Was die Möglichkeit angeht, von A2* auf UA3 bzw. UA4 zurückzuschliessen, so gilt: Aus A1, A2*, A3 folgt UA3; aus A1, A2*, A4 folgt UA4. Insbesondere gilt somit: Unter Voraussetzung des Axiomensystems $\mathfrak{A}$ sind UA3 and A2* äquivalent.

Das Axiomensystem $\mathfrak{A}$ kann in mannigfacher Weise durch Zusatzaxiome spezialisiert werden. Besonders naheliegend ist es, A4 oder die Umkehrung von A3 (UA3), die wir allerdings lieber durch die bezüglich $\mathfrak{A}$ äquivalente Eindeutigkeit einer Verbindungsgeraden (A2*) ersetzen, oder beide Forderungen hinzuzunehmen. So entstehen die Axiomensysteme:

(10) $\mathfrak{A}$, A4, formulierbar als: A1, A2, A3, A4.

(11) $\mathfrak{A}$, A2*, formulierbar als: A1, A2*, A3.

(12) $\mathfrak{A}$, A2*, A4, formulierbar als: A1, A2*, A3, A4.

Das Axiomensystem (10) führt in die von HJELMSLEV eingeschlagene Richtung, die dadurch gekennzeichnet ist, dass die Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten und die beiden Sätze von den drei Spiegelungen (bei uns A3, A4) gefordert werden, aber die Existenz unverbindbarer oder mehrfach verbindbarer Punkte zugelassen wird.

Das Axiomensystem (11) ist als Basis grundlegender Schlüsse aus der Geometrie involutorischer Gruppenelemente von Bedeutung; vgl. WOLFF **(9)**. In dem Axiomensystem (12) ist nach dem Gesagten nicht nur UA3, sondern auch UA4 beweisbar; wenn es wenigstens einen Punkt gibt (anderenfalls sind alle Axiome trivial), kann man wie in WOLFF **(9**, §1**)** auch die Transitivität des Im-Büschel-Liegens beweisen und die Theorie der Geradenbüschel entwickeln.

Die Existenz einer Verbindungsgeraden, d.h. das Axiom

A1*. *Zu* A, B *gibt es ein* c *mit* $A, B | c$

ist auch von dem Axiomensystem (12) noch unabhängig. Wird A1* hinzugefügt, so wird die Existenz der Senkrechten (A1) beweisbar. Das entstehende Axiomensystem

$\mathfrak{A}$, A1*, A2*, A4, formulierbar als: A1*, A2*, A3, A4

ist, bei Hinzunahme einer Reichhaltigkeitsforderung, das Axiomensystem der ebenen absoluten Geometrie aus AGS.

Axiomatische Theorien, in denen alle Aussagen des Axiomensystems $\mathfrak{A}$ und von den drei Zusatzaxiomen A1*, A2*, A4 jeweils zwei gelten, während das dritte nicht beweisbar ist, haben WOLFF, KLINGENBERG, SCHÜTTE entwickelt.

Kleine Axiome	Axiome dieser Arbeit	Zusatzaxiome
A0	A0: Eindeutigkeit des Orthogonalenschnitts	
A1′: Existenz der errichteten Senkrechten	A1: Existenz der Senkrechten	A1*: Existenz der Verbindungsgeraden
A2′: Eindeutigkeit der errichteten Senkrechten	A2: Eindeutigkeit der Senkrechten	A2*: Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden
	A3: $a, b, c \mid g \rightarrow abc \in S$	
		A4: $a, b, c \mid P \rightarrow abc \in S$

Literatur

1. F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (Berlin usw., 1959); zitiert als AGS.

2. J. Hjelmslev, *Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre*, Danske Vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd., *8*, Nr. 11 (1929); *10*, Nr. 1 (1929); *19*, Nr. 12 (1942).

3. W. Klingenberg, *Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen*, Math. Z., *61* (1954), 1–25.

4. P. O. Neerup, *The axiomatic foundation of geometry by F. Bachmann* (Danish), Nordisk Mat. Tidskr., *7* (1959), 97–110, 145–156.

5. K. Schütte, *Gruppentheoretisches Axiomensystem einer verallgemeinerten euklidischen Geometrie*, Math. Ann., *132* (1956), 43–62.

6. G. Thomsen, *Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung*, Hamburger Math. Einzelschriften, *15* (1933).

7. H. Toepken, *Über den Höhensatz in der absoluten Geometrie*, Deutsche Math., *5* (1940), 395–401.

8. H. Wolff, *Metrische Ebenen mit unverbindbaren Punkten*, Diss. Kiel (1960).

9. ——— *Minkowskische und absolute Geometrie*, Math. Ann., *171* (1967), 144–193.

Universität Kiel,
Deutschland