Can. J. Math. Vol. **45** (3), 1993 pp. 554–575

SUR LES OPÉRATIONS PARTIELLES IMPLICITES ET LEUR RELATION AVEC LA SURJECTIVITÉ DES ÉPIMORPHISMES

MICHEL HÉBERT

RESUME Let K be a category of structures with all its homomorphisms, U^α $K \longrightarrow$ Set the α-th power of its forgetful functor U An α-ary implicit partial operation (O P I) in K is a diagram $U^\alpha \leftarrowtail V \longrightarrow U$ of natural transformations and functors We first study various properties which O P I 's can have, as maximality, definability and closure under products or equalizers Revisiting various concepts and results of Isbell, Linton, Bacsich and Herrera, we note, among other things, that the dominion (resp the stable dominion) of a subset of a structure K is its closure under O P I 's (resp under equalizer-closed O P I 's), and we show that in a variety, all epis are surjective (resp all monos are regular) iff all limit-closed (resp product-closed) O P I 's are restrictions of total implicit operations

1. **Introduction.** L'étude des structures partielles semble bénéficier aujourd'hui d'un regain d'intérêt, en particulier dans certains secteurs de l'informatique théorique ([24], [3], [22]). D'autre part, les opérations partielles se manifestent aussi de manière implicite dans des contextes "ordinaires": l'existence de liens entre les opérations partielles implicites (O. P. I.) et la présence d'épimorphismes non surjectifs dans les variétés d'algèbres (totales) est connue depuis longtemps ([15], [21]). Or, si les opérations totales implicites (O.T.I.) ont fait l'objet d'études nombreuses et variées ([18], [16], [10]), en particulier récemment pour les classes d'algèbres finies ([1]), il ne semble pas en être de même pour les O. P. I.

Le présent article veut d'abord établir quelques résultats de base sur les opérations partielles implicites dans les classes de structures. On y montrera en particulier que dans les classes axiomatiques (au sens finitaire) et fermées pour les produits directs, toute O. P. I. fermée pour ces produits s'étend à une O. P. I. définissable (et donc en particulier doit elle-même être essentiellement finitaire).

Dans la troisième et dernière section, nous nous intéressons aux problèmes de surjectivité des épimorphismes et de régularité des monomorphismes. Ces questions sont d'intérêt en topologie ([6]) aussi bien qu'en algèbre ([23], [20]) et en théorie des modèles ([2]). Nous précisons et généralisons des caractérisations connues des variétés dont les monomorphismes sont tous réguliers, ainsi que des variétés dont les épimorphismes sont surjectifs. En particulier, nous obtenons que la première propriété (respectivement la seconde) équivaut à ce que toutes les O. P. I. fermées pour les produits (respectivement fermées pour les produits et les égalisateurs) soient des restrictions d'O.T.I.

Reçu par les éditeurs le 30 september 1991

Classification (AMS) par sujet Primary 08A55, secondary 08A40, 18A20, 03C40

Je tiens à remercier Roger Villemaire ainsi que l'arbitre: leur lecture attentive de ce travail m'a permis d'y corriger plusieurs erreurs.

2. **Opérations partielles implicites.** Dans ce qui suit, un *type* τ est un ensemble de symboles d'opérations et de relations finitaires. Sauf mention contraire, une *formule* signifiera toujours une formule du langage finitaire du premier ordre $L_\omega(\tau)$. On écrira $At(\tau)$ (ou simplement At) pour l'ensemble des formules atomiques, $\wedge At$ pour l'ensemble des conjonctions (finies) de formules atomiques, $\exists\wedge At$ pour l'ensemble des formules de la forme $\exists\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big)$ où $\phi \in \wedge At$ et $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(i) \mid i \in I\}$ est un ensemble de variables, *etc.* (Si ϕ est une formule de $L_\omega(\tau)$, $\exists\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big)$ et $\forall\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big)$ désigneront aussi des formules de $L_\omega(\tau)$, et ce *même si* $\mathbf{x}$ *est infini*, étant entendu que seulement un sous-ensemble fini de $\mathbf{x}$ intervient réellement dans $\exists\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big)$ et $\forall\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big)$. On notera aussi $x, x_i, y, \ldots$ les variables individuelles. On utilisera les abréviations $\exists^{\leq 1}\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big)$ et $\exists^1\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big)$ pour $\forall\mathbf{xy}\Big(\phi(\mathbf{x}) \wedge \phi(\mathbf{y}) \longrightarrow \bigwedge_{i\in I}\big(\mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)\big)\Big)$ et $\exists\mathbf{x}\big(\phi(\mathbf{x})\big) \bigwedge \forall\mathbf{xy}\Big(\phi(\mathbf{x}) \wedge \phi(\mathbf{y}) \longrightarrow \bigwedge_{i\in I}\big(\mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)\big)\Big)$ respectivement; à noter que ces expressions ne sont des formules (finitaires) que si $\mathbf{x}$ est fini. La *cardinalité* de $L_\omega(\tau)$, notée $\|\tau\|$, est la cardinalité $|\tau| + \omega$ de l'ensemble des formules dans $L_\omega(\tau)$ ($|\tau|$ étant la cardinalité de τ).

Les cardinaux sont identifiés aux ordinaux initiaux. Si α est un cardinal et $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction, $f^\alpha\colon A^\alpha \longrightarrow B^\alpha$ est la fonction définie ponctuellement: si on voit un élément $\mathbf{a}$ de A^α comme une fonction $\mathbf{a}\colon \alpha \longrightarrow A$, $f^\alpha(\mathbf{a})\colon \alpha \longrightarrow B$ est le composé $f\mathbf{a}$. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ sont des τ-structures, on note $A, B, \ldots$ les ensembles sous-jaçents. Une fonction $f\colon A \longrightarrow B$ entre les ensembles sous-jaçents de (τ-)structures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *préserve* la formule $\phi(\mathbf{x})$ si $\mathfrak{A} \models \phi[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f^\alpha(\mathbf{a})]$. f est un *(τ-)homomorphisme* (resp. un *plongement*, resp. un *plongement élémentaire*) si elle préserve les formules atomiques (resp. les formules atomiques et leurs négations, resp. toutes les formules). Le préfixe "τ"-disparaîtra le plus souvent lorsque le contexte sera clair.

Si K est une classe de τ-structures, $\underline{K}$ désignera la classe K avec tous les τ-homomorphismes entre ses membres. La classe K sera toujours supposée fermée pour les τ-isomorphismes, et donc $\underline{K}$ est une sous-catégorie pleine et replète de la catégorie $\underline{M(\tau)}$ de toutes les τ-structures et τ-homomorphismes. Une catégorie $\underline{K}$ de τ-structures sera dite *axiomatique* si K est la classe $M(T)$ des modèles d'une théorie T de $L_\omega(\tau)$. Pour éviter des commentaires fastidieux et inintéressants, nous supposons l'existence d'une τ-structure vide lorsque τ n'a pas de symbole de constante. Le lecteur est renvoyé à [7] et [13] pour les concepts et résultats de base de la théorie des modèles et de la théorie des catégories respectivement.

DÉFINITION 2.1. Soit K une classe de (τ-)structures et α un cardinal.

(a) Une *relation implicite (R.I.) α-aire* R dans K est la donnée d'une classe $\{R^{\mathfrak{A}} \subset A^\alpha \mid \mathfrak{A} \in K\}$ de α-tuples telle que pour tout $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}$, on ait

(i) $f^\alpha(R^{\mathfrak{A}}) \subset R^{\mathfrak{B}}$. ($\mathbf{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ sera aussi noté $R^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$).

(b) Une *opération partielle implicite (O.P.I.) α-aire dans* $\underline{K}$ est un couple (V, σ) où V est une R. I. α-aire et $\{\sigma^{\mathfrak{A}}\colon V^{\mathfrak{A}} \longrightarrow A \mid \mathfrak{A} \in K\}$ est une classe de fonctions telles que pour chaque $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in K$ on ait:

(ii) $\sigma^{\mathfrak{B}}\big(f^\alpha(\mathbf{a})\big) = f\big(\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big)$ pour tout $\mathbf{a} \in V^{\mathfrak{A}}$. (Pour des raisons données plus bas, $V^{\mathfrak{A}}$ sera dorénavant noté $V\mathfrak{A}$).

(c) Une *opération totale implicite (O.T.I.)* est une O. P. I. (V,σ) telle que $V\mathfrak{A} = A^\alpha$ pour tout $\mathfrak{A} \in K$. (On la note simplement σ). ∎

2.2 REMARQUES ET EXEMPLES. (1) Une O. P. I. α-aire (V,σ) n'est évidemment qu'une R. I. $(\alpha+1)$-aire d'un genre particulier (où $(V,\sigma)^{\mathfrak{A}} = \{(\mathbf{a},a) \in A^{\alpha+1} \mid \mathbf{a} \in V\mathfrak{A}$ et $\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = a\}$). L'aspect opérationel des O. P. I. est fondamental pour la motivation de cet article, mais leur aspect relationel sera parfois d'une grande utilité, aussi bien dans les preuves que dans l'énoncé des définitions.

(2) Tout *terme* ([4]) $t(x)$ de type τ détermine une O. T. I. dans $\underline{K}$ pour toute classe K de τ-structures (définie par $\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = t^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$).

(3) Notons AC la variété des anneaux commutatifs unitaires par rapport au type $\{+,\times,-,1,0\}$. La désignation de l'inverse multiplicatif (lorsqu'il existe) définit une O. P. I. 1-aire (V,σ) dans AC : $V\mathfrak{A} = \{a \in A \mid$ il existe $a^{-1} \in A$ tel que $a \times a^{-1} = 1\}$ et $\sigma^{\mathfrak{A}}(a) = a^{-1}$.

(4) Soit I un ensemble,

$$\tau = \{R_i \mid i \in I, R_i \text{ une relation binaire}\} \text{ et}$$
$$T = \Big\{\exists^{\leq 1} y\Big(\exists z\big(R_i(y,z) \wedge R_j(y,z)\big)\Big) \mid i,j \in I\Big\}.$$

Alors chaque $i \in I$ définit une O. P. I. O-aire (V_i,σ_i) dans $M(T)$ (où $V_i\mathfrak{A}$ est $\emptyset$ ou $\{*\}$ selon que $R_i^{\mathfrak{A}}$ est vide ou non, et dans le second cas, $\sigma_i^{\mathfrak{A}}$ est l'unique $a \in A$ tel que $\mathfrak{A} \models \exists z R_i[a,z]$). Egalement, (V,σ), où $V\mathfrak{A} = \bigcup_{i\in I}(V_i\mathfrak{A})$ et $\sigma^{\mathfrak{A}} = a$ s'il existe $i \in I$ tel que $\sigma_i^{\mathfrak{A}} = a$, est aussi une O. P. I. O-aire dans $M(T)$. ∎

En termes catégoriques, si on note $U^\alpha : \underline{K} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ le foncteur défini par $U^\alpha(f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) = (f^\alpha : A^\alpha \longrightarrow B^\alpha)$ et $U = U^1$ (le foncteur d'oubli habituel), une R. I. α-aire R est précisément un *sous-foncteur* $R \overset{\cdot}{\rightarrowtail} U^\alpha$, *i.e.* une transformation naturelle dont les composantes sont des inclusions. Ainsi une O. P. I. α-aire (V,σ) est un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U^\alpha & & \\ \uparrow\!\cdot & & \\ V & \xrightarrow[\sigma]{\cdot} & U \end{array}$$

de foncteurs et de transformations naturelles, et une O. T. I. est simplement une transformation naturelle $U^\alpha \overset{\cdot}{\longrightarrow} U$. L'identification de V à un foncteur explique qu'on préfère la notation $V\mathfrak{A}$ à $V^{\mathfrak{A}}$.

Une définition qui tiendrait compte de types multi-sortes est facile à imaginer: chaque sorte s donne lieu à un foncteur d'"évaluation" évident $U_s : \underline{K} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$, et une O. P. I. est alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \prod_S U_{s'} & & \\ \uparrow\!\cdot & & \\ V & \xrightarrow[\sigma]{\cdot} & U_s \end{array}$$

où S est un *multi-ensemble* de sortes (*i.e.* les sortes peuvent s'y répéter) et $\prod_S U_{s'}(f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) = \prod_S\big(U_{s'}(f)\big) : \prod_S\big(U_{s'}(\mathfrak{A})\big) \longrightarrow \prod_S\big(U_{s'}(\mathfrak{B})\big)$. Le lecteur pourra se rendre facilement compte que tous les résultats de cet article peuvent s'étendre aux types multi-sortes. Ils ne seront pas formulés dans cette généralité dans le seul but d'éviter des lourdeurs inutiles.

Si (V,σ) et (V',σ') sont des O. P. I. α-aires dans $\underline{K}$, (V,σ) est une *restriction* de (V',σ') (ou encore (V',σ') est une *extension* de (V,σ)), si l'inclusion $(V,\sigma) \subset (V',\sigma)$ des relations $(\alpha+1)$-aires a lieu. En termes catégoriques, ceci équivaut à l'existence d'un sous-foncteur $V \rightarrowtail V'$ tel que les triangle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
U^\alpha & & \\
& V' \arrow[ul, tail, dotted] \arrow[dr, dotted, "\sigma'"] & \\
V \arrow[uu, tail] \arrow[ur, tail, dotted] \arrow[rr, "\sigma"'] & & U
\end{tikzcd}$$

commutent. En particulier, dire qu'une O. P. I. (V,σ) peut s'étendre à une O. T. I. signifie que le diagramme $U^\alpha \leftarrowtail V \longrightarrow U$ plus haut peut être complété:

$$\begin{tikzcd}
U^\alpha \arrow[dr, dotted] & \\
V \arrow[u, tail] \arrow[r, "\sigma"'] & U
\end{tikzcd}$$

Parmi les O. P. I., celles qui sont "essentiellement finitaires" et celles qui sont "définissables" seront d'un intérêt tout particulier:

DÉFINITION 2.3. Soit (V,σ) une O. P. I. α-aire et R une R. I. α-aire dans $\underline{K}$.

(a) Une *projection (β-aire) de* (V,σ) est une O. P. I. β-aire (V',σ') dans $\underline{K}$ telle qu'il existe une injection $h\colon \beta \rightarrowtail \alpha$ pour laquelle $V'\mathfrak{A} = \{(\mathbf{a}\circ h) \in A^\beta \mid \mathbf{a} \in V\mathfrak{A}\}$ et $(\sigma')^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}\circ h) = \sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$ pour tout $\mathfrak{A} \in K$.

(b) (V,σ) est *projectivement β-aire* (resp. *essentiellement β-aire*) si elle a une projection β-aire (V',σ') (resp. telle que $V\mathfrak{A} = \{\mathbf{a} \in A^\alpha \mid (\mathbf{a}\circ h) \in V'\mathfrak{A}\}$). *Projectivement* (resp. *essentiellement*) *finitaire* signifera *projectivement* (resp. *essentiellement*) *n-aire pour un* $n \in \mathbb{N}$.

(c) R est *définissable (par ϕ)* s'il existe une formule $\phi(\mathbf{x})$ de $L_\omega(\tau)$ telle que pour tout $\mathbf{a} \in A^\alpha$ et tout $\mathfrak{A} \in K$, on ait $\mathfrak{A} \models \phi[\mathbf{a}]$ ssi $R^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$. (V,σ) est *définissable* si elle l'est en tant que relation $(\alpha+1)$-aire. On notera cela, par abus de language, $K \models \forall \mathbf{x} y\big(\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x},y)\text{”} \leftrightarrow \phi(\mathbf{x},y)\big)$. Les guillemets soulignent que $(V,\sigma)(\mathbf{x},y)$ n'est pas une formule de $L_\omega(\tau)$, puisque ni V ni σ ne sont dans τ. ■

REMARQUES ET EXEMPLES 2.4. (1) Une injection $h\colon \beta \rightarrowtail \alpha$ induit la projection naturelle $h^*\colon U^\alpha \twoheadrightarrow U^\beta$, de sorte qu'une O. P. I. α-aire (V,σ) est projectivement β-aire ssi il existe un diagramme commutatif

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-029-3 Published online by Cambridge University Press

$$
\begin{tikzcd}
U^{\alpha} \arrow[rr, two heads, "h^{*}"] & & U^{\beta} \\
& V' \arrow[ur, tail, "\cdot"'] \arrow[dr, "\sigma'", "\cdot"'] & \\
V \arrow[uu, tail, "\cdot"'] \arrow[ur, two heads, "\cdot"] \arrow[rr, "\sigma"', "\cdot"] & & U
\end{tikzcd}
$$

pour une injection $h: \beta \rightarrowtail \alpha$.

(2) Les formules de $L_{\omega}(\tau)$ étant finitaires, toute O. P. I. définissable est essentiellement finitaire.

(3) Si $\underline{K}$ est axiomatique et R est définissable, alors R est $\exists \wedge \vee At$*-définissable*, *i.e.* définissable par une formule dans $\exists \wedge \vee At$. Ceci résulte d'un théorème de préservation classique (voir [7]). Ainsi, les O. P. I. (resp O. T. I.) définissables correspondent aux classes d'équivalences de formules ϕ dans $\exists \wedge \vee At$ telles que $K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} y\big(\phi(\mathbf{x}, y)\big)$ (resp. $K \models \forall \mathbf{x} \exists^{1} y\big(\phi(\mathbf{x}, y)\big)$).

(4) Dans 2.2, (2), (3) et les (V_i, σ_i) de (4) sont des O. P. I. définissables (par les formules $\big(t(\mathbf{x}) = y\big)$, $\big((x \times y) = 1\big)$ et $\Big(\exists z\big(R_i(y, z)\big)\Big)$ respectivement). Si I est infini, on voit que l'O. P. I. (V, σ) de (4) n'est pas définissable en considérant un ensemble $\{\mathfrak{A}_i \mid \mathfrak{A}_i \models T, |A_i| \geq \omega$ pour tout $i \in I$, et $V_j \mathfrak{A}_i$ est vide ssi $i \neq j\}$ et un ultrafiltre non-principal D sur I: en effet les $V\mathfrak{A}_i$ sont tous non-vides alors que $V(\prod_D \mathfrak{A}_i)$ (où $\prod_D \mathfrak{A}_i$ est l'ultraproduit des $\mathfrak{A}_i$) est vide (voir aussi 2.11). L'O. P. I. (V, σ) que définissent les inverses multiplicatifs dans AC (2.2(3)), peut s'étendre à (V', σ') où $V'\mathfrak{A} = V\mathfrak{A} \cup \{0^{\mathfrak{A}}\}$ et $(\sigma')^{\mathfrak{A}}(0^{\mathfrak{A}}) = 0^{\mathfrak{A}}$. Restreinte à la catégorie des corps, (V, σ) peut donc s'étendre à une O. T. I. Par contre, on ne peut étendre (V, σ) à une O. T. I. dans $\underline{\text{AC}}$: pour voir cela il suffit de considérer le plongement $\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Q}$ et constater qu'aucune définition de $(\sigma')^{\mathbb{Z}}(2)$ n'est possible si $(V', \sigma') \supset (V, \sigma)$. ∎

Quelques faits sur les O. T. I. peuvent ici être rappelés. Le lecteur se reportera à [10] et [11] pour les preuves et détails de ces résultats.

2.5 Faits et exemples sur les O.T.I. (1) Si, pour une classe K de τ-structures donnée, il n'existe qu'un ensemble d'O. T. I. α-aires (par exemple lorsque K est fermée pour les sous-structure élémentaires—par une application du théorème de Lowenheim-Skolem-Tarski vers le bas), alors cet ensemble a une τ-structure naturelle $\mathfrak{F}_{\alpha}(\underline{K})$: si G (resp. R) est un symbole d'opération (resp. de relation) n-aire dans τ, et $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathfrak{F}_{\alpha}(\underline{K})$ alors $G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ définit une O. T. I. α-aire dans $\underline{K}$ de la façon évidente: si $\mathfrak{A} \in K$ et $\mathbf{a} \in A^{\alpha}$, $G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = G^{\mathfrak{A}}\big(\sigma_1^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, \sigma_n^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big)$ (respectivement $\mathfrak{F}_{\alpha}(\underline{K}) \models R[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ ssi $R^{\mathfrak{A}}\big(\sigma_1^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, \sigma_n^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big)$ pour tout $\mathfrak{A} \in K$ et tout $\mathbf{a} \in A^{\alpha}$). Ceci fait de l'inclusion $\{x_{\beta} \mid \beta < \alpha\} \rightarrowtail F_{\alpha}(\underline{K})$ (où les x_{β} représentent l'opération projection sur la β-ième composante) le candidat à la *structure libre sur α pour $\underline{K}$* (par exemple, c'est l'habituelle "algèbre libre sur α générateurs" lorsque K est une variété).

(2) Soit K axiomatique. Alors, si $\underline{K}$ a une structure libre sur α (*i.e.* $\mathfrak{F}_{\alpha}(\underline{K}) \in K$), ou encore si K est fermée pour les produits directs, alors toute O. T. I. α-aire σ est $\exists \wedge At$-définissable. Sous ces hypothèses, toute O. T. I. α-aire est donc essentiellement finitaire.

(3) Si K est fermée pour les sous-structures et K a une structure libre sur α, alors toute O. T. I. α-aire σ est (définissable par) un τ-terme (et donc essentiellement finitaire).

(4) Contrairement à ce qui est affirmé au Lemme 3.6 de [10], le fait que K soit axiomatique n'assure pas la définissabilité des O. T. I. d'arité finie (L'erreur dans la preuve vient de ce qu'on a faussement déduit $P_u(K^\sigma) = K^\sigma$ de $P_u(K) = K$). Un contre-exemple est fourni par le cas de la catégorie des corps $\underline{C}$ (avec $\tau = \{+, \times, -, 1, 0\}$, comme en 2.2(3) par exemple), et $\sigma^{\mathfrak{A}}(x_1, x_2) = [x_1 + x_2$ ou $x_1 \times x_2$ selon que le corps $\mathfrak{A}$ est de caractéristique 0 ou non respectivement]. Si D est un ultrafiltre nonprincipal sur l'ensemble P des nombres premiers et $\mathbb{Z}_p$ est le corps à p éléments, alors l'ultraproduit $\prod_D \mathbb{Z}_p$ étant un corps de caractéristique 0, on voit aisément que σ n'est pas fermée pour les ultraproduits (voir l'exemple 2.4(4) ou 2.8-10 ci-dessous), et que donc elle ne peut être définissable. Notons par ailleurs que la catégorie des corps a des O. T. I. d'arités essentielles minimales α pour α aussi grand qu'on veut (*i.e.* α-aires et sans projection β-aire pour $\beta < \alpha$; voir [18]).

(5) Les groupes nilpotents ($\tau = \{1, \times, (\,)^{-1}\}$) forment une *variété généralisée* (*i.e.* une classe fermée pour les produits finis, les images homomorphes et les sous-structures), mais admet des O. T. I. d'arité essentielle minimale ω. ∎

Un premier point qui dérange lorsqu'on compare les O. P. I. aux O. T. I. est celui de l'abondance des O. P. I. En fait, une même O. P. I. (V, σ) peut donner lieu à une grande famille d'O. P. I. par simple restriction du domaine (une O. P. I. pour chaque sous-foncteur $V' \rightarrowtail V$). Cependant nous verrons que si K est axiomatique, il existe un ensemble d'O. P. I. α-aires tel que toute O. P. I. (α-aire) est une restriction de l'une d'entre elles. Le lemme suivant sera crucial pour démontrer ce fait et plusieurs autres par la suite.

LEMME 2.6. *Soit* (V, σ) *une* O. P. I. *α-aire dans $\underline{K}$, $\mathfrak{A} \in K$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}$. Si K est fermée pour les ultrapuissances (resp. K est axiomatique), alors il existe $\phi(\mathbf{x}, y) \in \exists \wedge At$ telle que*

(i) $\mathfrak{A} \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} y\big(\phi(\mathbf{x}, y)\big)$ *(resp.* $K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} y\big(\phi(\mathbf{x}, y)\big)$*), et*

(ii) $\mathfrak{A} \models \phi[\mathbf{a}, \sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})]$.

PREUVE. Notons que le lemme ne prétend pas que (V, σ) soit définissable (même lorsque K est axiomatique).

L'essentiel de la preuve repose sur le théorème 1 de [2]. Comme nous aurons besoin plus loin du concept de *dominion* (dû à Isbell: [15]) qu'elle fait intervenir, nous incluons sa définition (légèrement étendue) dans l'énoncé du théorème de [2]:

THÉORÈME 2.7. *Soit K une classe de structures, $\mathfrak{A}$ une structure et $h: X \longrightarrow A$ une fonction. On note $\mathfrak{Dom}_K(h)$ le (K-)dominion de h, i.e. la sous-structure de $\mathfrak{A}$ sur l'ensemble $C = \{a \in A \mid [f_1, f_2: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ des homomorphismes, $\mathfrak{B} \in K$ et $f_1 h = f_2 h] \Rightarrow [f_1(a) = f_2(a)]\}$. Si K est axiomatique, alors $C = \{a \in A \mid K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} y\big(\phi(\mathbf{x}, y)\big)$ et $\mathfrak{A} \models \phi[\mathbf{a}, a]$ pour des $\mathbf{a}(\beta)$ dans $h(X)$ et une formule ϕ dans $\exists \wedge At\}$.* ∎

Soit donc $\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}$. Il est clair que $\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \in \mathrm{Dom}_K(\mathbf{a})$, d'où le résultat si K est axiomatique. Si K est seulement fermée pour les ultrapuissances, on considère $K' = M\big(\mathrm{Th}(\mathfrak{A})\big)$ ($\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ la théorie de $\mathfrak{A}$). Pour tout $\mathfrak{B} \in K'$, il existe un ultrafiltre D et un isomorphisme $g: \prod_D \mathfrak{B} \longrightarrow \prod_D \mathfrak{A}$ entre les ultrapuissances (Théorème d'Isomorphisme de

Keisler-Shelah: voir [7]). Si $f_1, f_2\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ sont des homomorphismes tels que $f_1\mathbf{a} = f_2\mathbf{a}$, alors $gd_{\mathfrak{B}}f_1\mathbf{a} = gd_{\mathfrak{B}}f_2\mathbf{a}$, où $d_{\mathfrak{B}}\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \prod_D \mathfrak{B}$ est le plongement élémentaire canonique, et donc $gd_{\mathfrak{B}}f_1\big(\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big) = gd_{\mathfrak{B}}f_2\big(\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big)$, puisque $\prod_D \mathfrak{A} \in K$. Mais $gd_{\mathfrak{B}}$ est injectif, et donc $\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \in \mathrm{Dom}_{K'}(\mathbf{a})$, tel que requis. ∎

Quelques définitions seront encore nécessaires pour classifier les O. P. I.

DÉFINITIONS 2.8. Soit R une R. I. α-aire dans $\underline{K}$.

(a) R est *fermée pour les sous-structures élémentaires* si pour tout $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$ tels que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ (*i.e.* $\mathfrak{A}$ est sous-structure élémentaire de $\mathfrak{B}$), on a $R^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$ ssi $R^{\mathfrak{B}}(\mathbf{a})$ pout tout $\mathbf{a} \in A^{\alpha}$.

(b) *L'égalisateur* $\mathfrak{Eg}(f_1, f_2)$ d'une paire $f_1, f_2\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ dans $\underline{M(\tau)}$ est la sous-structure de $\mathfrak{A}$ sur l'ensemble $\{a \in A \mid f_1(a) = f_2(a)\}$. R est *fermée pour les égalisateurs* si pour toute paire $f_1, f_2\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ dans $\underline{K}$ dont l'égalisateur est dans K, on a $R^{\mathfrak{Eg}(f_1,f_2)}(\mathbf{e})$ ssi $R^{\mathfrak{A}}(\mathbf{e})$ pout tout $\mathbf{e} \in \mathrm{Eg}(f_1, f_2)^{\alpha}$.

(c) R est *fermée pour les produits* (resp. *les ultraproduits*) si pour tout sous-ensemble $\{\mathfrak{A}_i\}_I$ de K (resp. et tout ultrafiltre D sur I) tel que le produit direct $\prod_I \mathfrak{A}_i$ (resp. l'ultraproduit $\prod_D \mathfrak{A}_i$) est dans K, on a $[R^{\mathfrak{A}_i}(\mathbf{a_i})$ pour tout $i \in I] \Leftrightarrow [R^{\prod I^{\mathfrak{A}_i}}(\langle \mathbf{a_i}\rangle_I)]$ (resp $\{i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(\mathbf{a_i})\} \in D \Leftrightarrow \big[R^{\prod D^{\mathfrak{A}_i}}[\langle \mathbf{a_i}\rangle_I]_D)\big]$. (Ici, $\langle \mathbf{a_i}\rangle_I\colon \alpha \longrightarrow \prod_I A_i$ est la fonction induite par les $\mathbf{a_i}\colon \alpha \longrightarrow A_i$, *i.e.* définie sur $\beta < \alpha$ par $\langle \mathbf{a_i}\rangle_I(\beta) = \langle \mathbf{a_i}(\beta)\rangle_I$; $[\ ]_D$ est l'homomorphisme surjectif canonique $\prod_I \mathfrak{A}_i \twoheadrightarrow \prod_D \mathfrak{A}_i$, de sorte que $[\langle \mathbf{a_i}\rangle_I]_D$ est le composé $\alpha \longrightarrow \prod_I A_i \twoheadrightarrow \prod_D A_i$).

(d) R est *fermée pour les limites* si elle est fermée pour les produits et les égalisateurs.

(e) Une O. P. I. α-aire est *fermée pour les sous-structures élémentaires (les égalisateurs, etc.)* si elle l'est en tant que R. I. $(\alpha + 1)$-aire. ∎

REMARQUES 2.9. (1) Il est intéressant de noter que pour une O. P. I. (V, σ), toutes ces propriétés de fermeture, *sauf celle pour les ultraproduits*, sont équivalentes à des conditions sur V seulement. En fait, l'existence des homomorphismes $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $\mathfrak{Eg}(f_1, f_2) \rightarrowtail \mathfrak{B}$, et $\prod_I \mathfrak{A}_i \twoheadrightarrow \mathfrak{A}_i$ fait que les fermetures pour les sous-structures élémentaires, les égalisateurs et les produits sont respectivement équivalentes à

$$[\mathbf{a} \in A^{\alpha} \cap V\mathfrak{B}] \Rightarrow [\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}],$$
$$[\mathbf{e} \in \mathrm{Eg}(f_1, f_2)^{\alpha} \cap V\mathfrak{A}] \Rightarrow \Big[\mathbf{e} \in V\big(\mathfrak{Eg}(f_1, f_2)\big)\Big] \text{ et}$$
$$[\mathbf{a_i} \in V\mathfrak{A}_i \text{ pour tout } i \in I] \Rightarrow \Big[\langle \mathbf{a_i}\rangle_I \in V\Big(\prod_I \mathfrak{A}_i\Big)\Big].$$

Du fait que si $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, alors $\mathfrak{A}$ est l'égalisateur d'un certain couple d'homomorphismes de $\mathfrak{B}$ dans une ultrapuissance de $\mathfrak{A}$ (voir par exemple [25]), on déduit qu'une O. P. I. fermée pour les égalisateurs sera aussi fermée pour les sous-structures élémentaires.

Notons que $\mathfrak{Eg}(f_1, f_2)$ et $\prod_I \mathfrak{A}_i$ sont respectivement l'égalisateur et le produit dans $\underline{M(\tau)}$ au sens catégorique. Si $\underline{K}$ est *fermée* (comme sous-catégorie de $\underline{M(\tau)}$) pour les égalisateurs (resp. les produits), on a donc que (V, σ) est fermée pour les égalisateurs (resp. les produits) ssi le foncteur V les *préserve* au sens catégorique.

La condition de fermeture de (V,σ) pour les ultraproduits est équivalente à la satisfaction des deux conditions

(i) $[\{i \in I \mid \mathbf{a_i} \in V\mathfrak{A}_\iota\} \in D] \Rightarrow \left[[\langle \mathbf{a_i}\rangle_I]_D \in V\left(\prod_D \mathfrak{A}_\iota\right) \text{ et } \sigma^{\prod_D \mathfrak{A}_\iota}([\langle \mathbf{a_i}\rangle_I]_D) = [\langle \sigma^{\mathfrak{A}_\iota}(\mathbf{a_i})\rangle_I]_D\right]$

(ii) $\left[[\langle \mathbf{a_i}\rangle_I]_D \in V\left(\prod_D \mathfrak{A}_\iota\right)\right] \Rightarrow [\{i \in I \mid \mathbf{a_i} \in V\mathfrak{A}_\iota\} \in D]$.

L'existence, pour chaque $I' \in D$, d'une factorisation canonique

$$\prod_I \mathfrak{A}_\iota \twoheadrightarrow \prod_{I'} \mathfrak{A}_\iota \twoheadrightarrow \prod_D \mathfrak{A}_\iota$$

de $[\ ]_D$ permet de voir que lorsque $\underline{K}$ est fermée pour les produits, la fermeture de (V,σ) pour les produits entraîne (i) (mais non (ii) en général).

D'autre part, notons que si $\underline{K}$ est fermée pour les ultrapuissances, alors toute O. P. I. fermée pour les ultraproduits est aussi fermée pour les sous-structures élémentaires: ceci suit de (ii) et du fait que si $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ est dans K, alors il existe un ultrafiltre D tel que $\mathfrak{B} \prec \prod_D \mathfrak{A}$ et le composé $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \prec \prod_D \mathfrak{A}$ est le plongement canonique (Théorème de Frayne).

(2) Les exemples (2) et (3) de 2.2, comme toutes les O. P. I. définissables par des formules dans $\wedge At$, sont fermées pour toutes les limites. Les (V_ι, σ_ι) de (4) sont fermées pour les produits mais non les égalisateurs (essentiellement à cause de la présence de $\exists z$ sans que ce z soit forcé à l'unicité); notez que la classe K est ici fermée pour les produits et les sous-structures. La présence de disjonctions $\vee$ est ce qui peut empêcher la fermeture pour les produits. D'autre part la définissabilité implique les fermetures pour les sous-structures élémentaires et les ultraproduits (voir 2.10). L'O. P. I. (V,σ) de 2.2(4) n'est fermée ni pour les produits ni pour les égalisateurs. On a déjà remarqué que (V,σ), tout comme l'O. T. I. dans la catégorie $\underline{C}$ des corps en 2.5(4), n'est pas fermée pour les ultraproduits. Notons que $\underline{C}$ est fermée pour les égalisateurs, mais pas pour les sous-structures ou les produits.

(3) La proposition 9(1) et le théorème 14 de [25] peuvent se formuler de la façon suivante. Si T est une théorie, alors $\underline{M(T)}$ est fermée pour les égalisateurs (resp. les limites) ssi T est équivalent à un ensemble d'énoncés de la forme $\forall \mathbf{x}(\phi(x) \longrightarrow \exists y_1 \cdots y_n\left(\psi(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_n)\right)$, où $\phi, \psi \in \exists \wedge \vee At$ (resp. $\phi, \psi \in \exists \wedge At$), tels qu'il existe un ensemble d'O. P. I. $\{(V_{\iota,j}, \sigma_{\iota,j}) \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N}\}$ (resp. d'O. P. I. $\{(V_\iota, \sigma_\iota) \mid i = 1, \ldots, n\}$ fermées pour les produits) définissables dans $\underline{M(T)}$ tels que

$$M(T) \models \forall \mathbf{x}\Big(\phi(\mathbf{x}) \longrightarrow \bigvee_{j=1,\ \ ,m} \text{“}\psi\big(\mathbf{x}, \sigma_{1,j}(\mathbf{x}), \ldots, \sigma_{n,j}(x)\big)\text{”}\Big)$$

(resp. $M(T) \models \forall \mathbf{x}\Big(\phi(\mathbf{x}) \longrightarrow \text{“}\psi\big(\mathbf{x}, \sigma_1(\mathbf{x}), \ldots, \sigma_n(\mathbf{x})\big)\text{”}\Big)$). ∎

PROPOSITION 2.10. *Soit* (V,σ) *une* O. P. I. α*-aire dans* $\underline{K}$.

(a) Si K est fermée pour les ultraproduits et que pour tout sous-ensemble $\{\mathfrak{A}_\iota\}_I \subset K$*, tout ultrafiltre D sur I et tout* $\{\mathbf{a_i} \in (A_\iota)^\alpha \mid i \in I\}$*, on a* $[\{i \in I \mid \mathbf{a_i} \in V\mathfrak{A}_\iota\} \in D] \Rightarrow \left[[\langle \mathbf{a_i}\rangle_I]_D \in V(\prod_D \mathfrak{A}_\iota) \text{ et } \sigma^{\prod_D \mathfrak{A}_\iota}([\langle \mathbf{a_i}\rangle_I]_D) = [\langle \sigma^{\mathfrak{A}_\iota}(\mathbf{a_i})\rangle_I]_D\right]$ *alors* (V,σ) *est projectivement*

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-029-3 Published online by Cambridge University Press

finitaire. En particulier, si K est fermée pour les produits et les ultraproduits, alors toute O. P. I. *fermée pour les produits est projectivement finitaire.*

(b) Si K est axiomatique, alors (V, σ) est définissable ssi elle est fermée pour les ultraproduits.

PREUVE. (a) Que (V, σ) ne soit pas projectivement finitaire équivaut à l'existence, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque injection $h: n \rightarrowtail \alpha$, d'un $\mathfrak{A}_h \in K$ et de $\mathbf{a}_h, \mathbf{a}'_h \in V\mathfrak{A}_h$ tels que $\mathbf{a}_h \circ h = \mathbf{a}'_h \circ h$ et $\sigma^{\mathfrak{A}_h}(\mathbf{a}_h) \neq \sigma^{\mathfrak{A}_h}(\mathbf{a}'_h)$. Le procédé de preuve, qui consiste à considérer un certain ultrafiltre sur $H = \{h: n \rightarrowtail \alpha \mid n \in \mathbb{N}\}$, est trop classique pour être répété ici: voir par exemple la preuve du Lemme 3.1 de [10]. La dernière phrase suit de la Remarque 2.9(1).

(b) La direction ($\Rightarrow$) découle des résultats de base de la théorie des modèles. Pour l'implication inverse, soit (V, σ) fermée pour les ultraproduits. Par (a), il existe alors une projection n-aire (V', σ') de (V, σ) pour un $n \in \mathbb{N}$. On considère le type $\tau' = \tau \cup \{R\}$, où τ est le type de K et R est un symbole de relation $(n + 1)$-aire qui n'est pas dans τ. Notons K' la classe $\{\langle \mathfrak{A}, (V', \sigma')^{\mathfrak{A}} \rangle \mid \mathfrak{A} \in K\}$ de τ'-structures ($\langle \mathfrak{A}, (V', \sigma')^{\mathfrak{A}} \rangle$ a le même ensemble sous-jaçent et les mêmes interprétations des symboles de τ que $\mathfrak{A}$, et l'interprétation de R y est $(V', \sigma')^{\mathfrak{A}}$). On vérifie aisément que la fermeture de (V, σ) pour les sous-structures élémentaires et les ultraproduits est équivalente à celle de K' (dans $(M(\tau'))$. Donc K' est axiomatique, et on peut alors appliquer le Théorème de Beth: en effet $\langle \mathfrak{A}, (V', \sigma')^{\mathfrak{A}} \rangle \neq \langle \mathfrak{B}, (V', \sigma')^{\mathfrak{B}} \rangle$ implique trivialement $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, et donc il existe une formule ϕ de $L_\omega(\tau)$ telle que

$$K_R \models \forall x_1 \cdots x_n y\big(R(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n, y)\big)$$

(voir [7]). Or ceci signifie $K \models \forall \mathbf{x} y\big(\text{“}(V, \sigma)(\mathbf{x}, y)\text{”} \leftrightarrow \phi(\mathbf{x}, y)\big)$. ∎

THÉORÈME 2.11. *Soit $\underline{K}$ une catégorie de structures axiomatique. Alors toute* O. P. I. *(V, σ) dans $\underline{K}$ a une extension fermée pour les sous-structures élémentaires, et qui est fermée pour les produits (resp.les égalisateurs, les ultraproduits) si (V, σ) l'est.*

PREUVE. Pour chaque $\mathfrak{A} \in K$, on note $V'\mathfrak{A}$ l'ensemble $\{\mathbf{a} \in A^\alpha \mid$ il existe $\mathfrak{B}$ telle que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{B}\}$, et $(\sigma')^{\mathfrak{A}}$ la fonction définie sur $V'\mathfrak{A}$ par $(\sigma')^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = \sigma^{\mathfrak{B}}(\mathbf{a})$ pour un $\mathfrak{B}$ quelconque tel que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{B}$. On montre que:

(a) Chaque $(\sigma')^{\mathfrak{A}}$ est bien défini, et à valeurs dans A,
(b) (V', σ') est une O. P. I.,
(c) (V', σ') étend (V, σ),
(d) (V', σ') est fermée pour les sous-structures élémentaires, et
(e) (V', σ') est fermée pour les égalisateurs, les produits et les ultraproduits respectivement si (V, σ) l'est.

Pour (a), on doit montrer que pour tout $\mathfrak{A} \in K$, si $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}'$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{B} \cap V\mathfrak{B}' \cap A^\alpha$, alors $\sigma^{\mathfrak{B}}(\mathbf{a})$ et $\sigma^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{a})$ sont une même élément de A. Par le Lemme 2.6, il est aisé de vérifier que $\sigma^{\mathfrak{B}}(\mathbf{a})$ et $\sigma^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{a})$ sont bien dans A (On peut aussi démontrer cela algébriquement, en utilisant le fait, mentionné en 2.9(1), qu'un plongement élémentaire est un égalisateur). Mentionnons ensuite la propriété d'amalgamation suivante qui nous servira aussi en (b): Pour tout couple $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, $f'\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ dans $\underline{M(\tau)}$ tels que f est un homomorphisme (resp. un plongement) et f' est un plongement élémentaire, il existe $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ et $g'\colon \mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{C}$ (dans une même structure $\mathfrak{C}$) tels que g est un plongement élémentaire, g' est un homomorphisme (resp. un plongement), et $gf = g'f'$. Ceci se démontre aisément à l'aide du Théorème de Frayne ou encore du Théorème d'Isomorphisme en utilisant le fait que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ est équivalent à $\langle \mathfrak{A}, A\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, A\rangle$ (voir [7]). Si, comme ici, f et f' sont des inclusions (élémentaires), et $\mathfrak{C}$ étant alors dans K on doit avoir $g\big(\sigma^{\mathfrak{B}}(\mathbf{a})\big) = \sigma^{\mathfrak{C}}\big(g^{\alpha}(\mathbf{a})\big)$ et $g'\big(\sigma^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{a})\big) = \sigma^{\mathfrak{C}}\big((g')^{\alpha}(\mathbf{a})\big)$. Mais alors $g^{\alpha}(\mathbf{a}) = (g')^{\alpha}(\mathbf{a})$ implique $g\big(\sigma^{\mathfrak{B}}(\mathbf{a})\big) = g'\big(\sigma^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{a})\big)$, et donc $\sigma^{\mathfrak{B}}(\mathbf{a}) = \sigma^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{a})$ puisque les restrictions de g et g' à A sont une même fonction injective.

Pour montrer (b), on considère $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}$ et on vérifie d'abord que $f^{\alpha}(V'\mathfrak{A}) \subset V'\mathfrak{B}$. Soit donc $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}' \cap A^{\alpha}$; il faut voir que $f^{\alpha}(\mathbf{a}) \in V\mathfrak{B}'$ pour une extension élémentaire $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$. Par la propriété d'amalgamation ci-dessus, il existe $g\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ et $g'\colon \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{C}$ tels que g est un plongement élémentaire, g' est un homomorphisme, et gf est la restriction de g' à A. Or $(g')^{\alpha}(\mathbf{a}) \in V\mathfrak{C}$ (car $\mathfrak{C} \in K$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}'$), et le résultat suit de ce que $(gf)^{\alpha}(\mathbf{a}) = (g')^{\alpha}(\mathbf{a})$ puisque $\mathfrak{C}$ est isomorphe à une extension élémentaire $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ telle que $f^{\alpha}(\mathbf{a}) \in (B')^{\alpha}$. La vérification de 2.1(ii), *i.e.* ici $[\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}'$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}' \cap A^{\alpha}] \Rightarrow \big[(\sigma')^{\mathfrak{B}}\big(f^{\alpha}(\mathbf{a})\big) = f\big((\sigma')^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big)\big]$, utilise la même propriété d'amalgamation (avec $f'\colon \mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$, et f vu comme homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}'$) et est sans suprises.

(c) est (d) sont immédiats. Pour (e), on utilisera les résultats de 2.9(1). Le cas des égalisateurs est trivial puisque $(V', \sigma') = (V, \sigma)$ si (V, σ) préserve les égalisateurs. Pour les produits, on utilise la propriété suivante: si $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{B}_i$ pour tout i dans un ensemble I, alors $\prod_F \mathfrak{A}_i \prec \prod_F \mathfrak{B}_i$(les produits réduits) pour tout filtre F sur I. Ce fait remarquable (dû originellement à R. Vaught) est une conséquence immédiate de la proposition 6.3.2 de [7]. Les produits directs et les ultraproduits étant des cas particuliers de produits réduits, le résultat n'est plus qu'un exercice facile. ∎

REMARQUE 2.12. On a en fait montré un peu plus que l'énoncé du théorème 2.11, en l'occurence que tout sous-foncteur $V \rightarrowtail U^{\alpha}$ a une extension $V \rightarrowtail V' \rightarrowtail U^{\alpha}$ telle que

(i) $[\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ et $\mathbf{a} \in B^{\alpha} \cap V'\mathfrak{A}] \Rightarrow [\mathbf{a} \in V'\mathfrak{B}]$,

(ii) le foncteur V' préserve les produits et les égalisateurs dans $\underline{M(\tau)}$ que préserve V, et

(iii) toute transformation naturelle $\sigma\colon V \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} U$ a une extension $\sigma'\colon V' \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} U$ telle que (V', σ') préserve les ultraproduits que préserve (V, σ). ∎

Un des intérêts du théorème 2.11 vient de ce qu'il n'y a qu'un ensemble d'O. P. I. α-aires fermées pour les sous-structures élémentaires dans une catégorie axiomatique $\underline{K}$. En effet, une telle O. P. I. (V, σ) est entièrement déterminée par sa restriction à $K(\alpha) = \{\mathfrak{A} \in K \mid |A| \leq \|\tau\| + \alpha\}$, puisque par le Théorème de Lowenheim-Skolem-Tarski vers le bas (version améliorée = théorème 3.1.6 de [7]), $\mathfrak{B} \in K$ et $\mathbf{b} \in B^{\alpha} \Rightarrow$ il existe $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ tel que $\mathbf{b} \in A^{\alpha}$; or il n'y a qu'un ensemble de $(\alpha{+}1)$-uples d'élements $\{(\mathbf{a}, a) \mid \mathfrak{A} \in K(\alpha), \mathbf{a} \in A^{\alpha}$ et $a \in A\}$. Le théorème 2.11 assure donc l'existence (pour K axiomatique) d'un ensemble

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-029-3 Published online by Cambridge University Press

d'O. P. I. α-aires tel que toute O. P. I. (α-aire) est une restriction de l'une d'entre elles. On peut en fait choisir un ensemble plus restreint, celui des O. P. I. α-aires *maximales* (par rapport à l'inclusion en tant que relations ($\alpha + 1$)-aires):

COROLLAIRE 2.13. *Soit $\underline{K}$ une catégorie axiomatique de structures. Alors toute* O. P. I. *α-aire peut s'étendre à une* O. P. I. *α-aire maximale. De plus, les* O. P. I. *α-aires maximales forment un ensemble.*

PREUVE. Par 2.11, toute O. P. I. α-aire maximale est fermée pour les sous-structures élémentaires, et donc il ne peut *y* en avoir une classe propre (par le paragraphe ci-dessus).

Si (V, σ) est une O. P. I. α-aire, alors la classe P_V des O. P. I. α-aires fermées pour les sous-structures élémentaires et qui sont des extensions de (V, σ) est un ensemble (paragraphe ci-dessus) non-vide (par 2.11). Soit $\{(V_\delta, \sigma_\delta) \subset (V_\gamma, \sigma_\gamma) \mid \delta < \gamma\}$ une chaîne dans P_V. On vérifie aisément que $V_\gamma \mathfrak{A} = \bigcup_{\delta<\gamma}(V_\delta \mathfrak{A})$ définit une O. P. I. $(V_\gamma, \sigma_\gamma)$ fermée pour les sous-structures élémentaires, laquelle est évidemment une borne supérieure de la chaîne. Le lemme de Zorn assure l'existence d'une O. P. I. maximale dans P_V, laquelle est maximale comme O. P. I. (tout court), par 2.11 encore une fois. ∎

On peut caractériser les O. P. I. maximales de la façon suivante. Pour une O. P. I. α-aire (V, σ) dans $\underline{K}$, $\mathfrak{A} \in K$ et $\mathbf{a} \in A^\alpha$, il existe une extension (V', σ') de (V, σ) telle que $\mathbf{a} \in V'\mathfrak{A}$ et $(\sigma')^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = a$ ssi les conditions

$(\mathrm{i})_{\mathrm{a}}$ $a \in \mathrm{Dom}_K(\mathbf{a})$ et

$(\mathrm{ii})_{\mathrm{a}}$ $[(f \colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K} \text{ et } f^\alpha(\mathbf{a}) \in V\mathfrak{B}] \Rightarrow \big[f(a) = \sigma^{\mathfrak{B}}\big(f^\alpha(\mathbf{a})\big)\big]$

sont vérifiées (La preuve de ce fait est un exercise sans surprise). Donc (V, σ) est maximale ssi pour tout $\mathfrak{A} \in K$ et $\mathbf{a} \in A^\alpha$, on a

$$[\text{il existe } a \in A \text{ tel que } (\mathrm{i})_{\mathrm{a}} \text{ et } (\mathrm{ii})_{\mathrm{a}}] \Rightarrow [\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}].$$

Notons cependant que $(\mathrm{i})_{\mathrm{a}}$ et $(\mathrm{ii})_{\mathrm{a}}$ n'impliquent pas $\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = a$.

L'ensemble des O. P. I. α-aires définissables (resp. fermées pour les sous-structures élémentaires) dans une catégorie axiomatique de τ-structures peut être munie d'une τ-structure naturelle $\mathfrak{P}_\alpha(\underline{K})$, définie de telle sorte que la τ-structure $\mathfrak{F}_\alpha(\underline{K})$ sur les O. T. I. α-aires (2.5(1)) en soit une sous-structure: une τ-opération n-aire G et des O. P. I. $s_1 = (V_1, \sigma_1), \ldots, s_n = (V_n, \sigma_n)$ déterminent une O. P. I. $(V, \sigma) = \Big(V\big(G(s_1, \ldots, s_n)\big), \sigma\big(G(s_1, \ldots, s_n)\big)\Big)$ où V est définie par $V\mathfrak{A} = \bigcap\{V_i\mathfrak{A} \mid i = 1, \ldots, n\}$ et $\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = G^{\mathfrak{A}}\big(\sigma_1^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, \sigma_n^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big)$ (Il est facile de vérifier que si les (V_i, σ_i) sont définissables (resp. fermées pour les sous-structures élementaires), alors (V, σ) le sera aussi); pour un symbole de relation R de τ, on pose $\mathfrak{P}_\alpha(\underline{K}) \models R[s_1, \ldots, s_n]$ ssi $R^{\mathfrak{A}}\big(\sigma_1^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, \sigma_n^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})\big)$ pour tout $\mathfrak{A} \in K$ et tout $\mathbf{a} \in \bigcap\{V_i\mathfrak{A} \mid i = 1, \ldots, n\}$. La structure $\mathfrak{P}_\alpha(\underline{K})$ ne possède pas les belles propriétés de $\mathfrak{F}_\alpha(\underline{K})$ (en particulier l'existence d'homomorphismes "évaluateurs" dans les structures de K), et il n'est pas certain qu'elle puisse être très utile.

Cette procédure ne semble pas pouvoir s'appliquer à l'ensemble des O. P. I. α-aires maximales: les (V_i, σ_i) peuvent être maximales sans que (V, σ) (tel que défini ci-dessus) ne le soit, et il n'est pas clair qu'on puisse choisir de façon cohérente et naturelle une extension maximale de (V,σ) pour représenter $\Big(V\big(G(s_1,\ldots,s_n)\big),\sigma\big(G(s_1,\ldots,s_n)\big)\Big)$.

Le dernier résultat de cette section concerne la définissabilité des O. P. I. dans les catégories axiomatiques:

THÉORÈME 2.14. *Soit K une classe axiomatique de structures. Alors,*

(a) Toute O. P. I. *s'étend à une réunion d'*O. P. I. *définissables.*

(b) Si K est fermée pour les produits, alors toute O. P. I. *fermée pour les produits s'étend à une* O. P. I. *définissable et fermée pour les produits.*

PREUVE. (a) L'expression "s'étend" doit ici être prise au sens des R. I.: l'extension n'est pas en général une O. P. I. Plus précisément, on va montrer que si K est axiomatique et (V,σ) est une O. P. I. α-aire dans $\underline{K}$, alors il existe $\{\phi_\iota(\mathbf{x},y)\}_{\iota\in I}\supset\exists\wedge At$ tel que $K\models\forall\mathbf{x}\exists^{\leq 1}y\big(\phi_\iota(\mathbf{x},y)\big)$ pour chaque $i\in I$ et $K\models\forall\mathbf{x}y\big(\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x},y)\text{”}\longrightarrow\bigvee_{\iota\in I}\phi_\iota(\mathbf{x},y)\big)$. Notons que les formules $\forall\mathbf{x}\exists^{\leq 1}y\big(\phi_\iota(\mathbf{x},y)\big)$ sont bien dans $L_\omega(\tau)$, mais que si I est infini, $\bigvee_{\iota\in I}\phi_\iota(\mathbf{x},y)$ ne l'est pas.

Par 2.11, il existe une O. P. I. (V',σ') (de même arité α que (V,σ)) fermée pour les sous-structures élémentaires qui étend (V,σ). Choisissons un ensemble $\{\langle\mathfrak{A}_\iota,\mathbf{a_i}\rangle\}_{\iota\in I}$ représentatif des classes d'isomorphismes de $\{\langle\mathfrak{A},\mathbf{a}\rangle\mid\mathfrak{A}\in K,\mathbf{a}\in V'\mathfrak{A}\text{ et }|A|\leq\|\tau\|+\alpha\}$. Pour chaque $\mathbf{a_i}\in V'\mathfrak{A}_\iota$, il existe, par le Lemme 2.6, $\phi_\iota\in\exists\wedge At$ tel que $K\models\forall\mathbf{x}\exists^{\leq 1}y\big(\phi_\iota(\mathbf{x},y)\big)$ et $\mathfrak{A}_\iota\models\phi_\iota[\mathbf{a_i},\sigma^{\mathfrak{A}_\iota}(\mathbf{a_i}))]$. Si $\mathfrak{B}\in K$ et $\mathbf{b}\in V'\mathfrak{B}$, il existe, par le Théorème de Lowenheim-Skolem-Tarski, $i\in I$ tel que $\mathfrak{A}_\iota\prec\mathfrak{B}$ et $\mathbf{a_i}=\mathbf{b}$, d'où l'on tire que $\mathfrak{B}\models\phi_\iota[\mathbf{b},(\sigma')^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b})]$. On a donc $K\models\forall\mathbf{x}y\big(\text{“}(V',\sigma')(\mathbf{x},y)\text{”}\longrightarrow\bigvee_{\iota\in I}\phi_\iota(\mathbf{x},y)\big)$, ce qui implique en particulier $K\models\forall\mathbf{x}y\big(\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x},y)\text{”}\longrightarrow\bigvee_{\iota\in I}\phi_\iota(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)$.

(b) (V,σ) étant fermée pour les produits, on peut choisir l'extension (V',σ') en (a) fermée pour les produits. Ainsi l'élément $\mathbf{a}=\Big\langle\langle\mathbf{a_i}(\beta)\rangle_{\iota\in I}\Big\rangle_{\beta<\alpha}$ est dans $V'(\prod_I\mathfrak{A}_\iota)$ (où les $\mathfrak{A}_\iota$ et $\mathbf{a_i}$ sont ceux en (a)) et $(\sigma')^{\prod_I\mathfrak{A}_\iota}(\mathbf{a})=\langle(\sigma')^{\mathfrak{A}_\iota}(\mathbf{a_i})\rangle_{\iota\in I}$. Par (a) il existe donc $j\in I$ tel que $\prod_I\mathfrak{A}_\iota\models\phi_j[\mathbf{a},\langle(\sigma')^{\mathfrak{A}_\iota}(\mathbf{a_i})\rangle_{\iota\in I}]$, d'où il suit que $\mathfrak{A}_\iota\models\phi_j[\mathbf{a_i},(\sigma')^{\mathfrak{A}_\iota}(\mathbf{a_i})]$ pour tout $i\in I$. Par la représentativité de $\{\langle\mathfrak{A}_\iota,\mathbf{a_i}\rangle\}_{\iota\in I}$, on déduit $K\models\forall\mathbf{x}y\big(\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x},y)\text{”}\longrightarrow\phi_j(\mathbf{x},y)\big)$, tel que requis. ∎

EXEMPLES ET REMARQUES 2.15. (1) L'exemple suivant montre qu'on ne peut remplacer "fermée pour les produits" dans l'énoncé de (b), par "fermée pour les limites" (Ce fait aura son importance dans la section 3). Soit $\tau=\{O,P\}$, des opérations nullaire et unaire respectivement, et $T=\Big\{\forall y_1y_2\Big(P\big(P(y_1)\big)=P\big(P(y_2)\big)\longrightarrow P(y_1)=P(y_2)\Big)\Big\}$. On définit l'O. P. I. nullaire (V,σ) par $\sigma^{\mathfrak{A}}=a_1$ ssi $P^{\mathfrak{A}}(a_1)=0$ et que pour tout $n>1$ il existe $a_n\in A$ tel que $P^{\mathfrak{A}}(a_n)=a_{n-1}$. $M(T)$ et (V,σ) sont fermés pour les limites. Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $\mathfrak{A}_n$ par $A_n=\{0,1,\ldots,n-1,n,\infty\}$, $P^{\mathfrak{A}_n}(m)=m-1$ si $m\leq n$, $P^{\mathfrak{A}_n}(0)=0$ et $P^{\mathfrak{A}_n}(\infty)=n-1$. Alors $V\mathfrak{A}_n=\emptyset$, mais si D est un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, on a $\sigma^{\prod_D\mathfrak{A}_n}=[\mathbf{1}]_D$ (où $\mathbf{1}(n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). Si (V',σ') est une extension de (V,σ) fermée pour les ultraproduits, alors $(\sigma')^{\prod_D\mathfrak{A}_n}=[\mathbf{1}]_D$ implique que $\{n\in\mathbb{N}\mid(\sigma')^{\mathfrak{A}_n}=1\}\in D$, et donc est non-vide. Soit n tel que $(\sigma')^{\mathfrak{A}_n}=1$. Si (V',σ') est fermée pour les égalisateurs, on considère $f_n,g_n\colon\mathfrak{A}_n\longrightarrow\mathfrak{A}_n$ où f_n et g_n sont

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-029-3 Published online by Cambridge University Press

l'identité sauf pour $g_n(\infty) = n$ et $g_n(n) = \infty$. Alors $\mathfrak{B}_{n-1} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{g}}(f_n, g_n)$ est dans $M(T)$ ($B_{n-1} = \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$), et $(\sigma')^{\mathfrak{B}_{n-1}} = 1$. Les fonctions $f_{n-1}, g_{n-1}: B_{n-1} \longrightarrow A_{n-1}$ définies comme f_n et g_n (*i.e.* $x \longmapsto x$, sauf pour $g_{n-1}(n-1) = \infty$) sont des homomorphismes, $\mathfrak{B}_{n-2} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{g}}(f_{n-1}, g_{n-1})$ est dans $M(T)$, *etc.* Alors $(\sigma')^{\mathfrak{B}_1} = 1$, mais l'existence des homomorphismes $f_1, g_1: \mathfrak{B}_1 \longrightarrow \mathfrak{A}_1$ implique $(\sigma')^{\mathfrak{A}_1} = 1 = \infty$, une absurdité.

(2) On peut voir aisément que l'O. P. I. (V, σ) de l'exemple 2.2(4) ne peut s'étendre à une O. P. I. définissable. Mais on a un exemple direct en 2.5(4), puisque l'opération (binaire, dans les corps) qui y est considérée est totale et non-définissable.

Donc une O. P. I. (V, σ) (même finitaire et dans une "belle" catégorie comme celle de l'exemple 2.2(4)) ne peut s'étendre en général à une O. P. I. définissable. Les contre-exemples que nous venons de donner suggèrent la question suivante (à laquelle l'auteur n'a pas de réponse):

PROBLÈME. Dans une catégorie axiomatique, peut-on étendre une O. P. I. quelconque (resp. finitaire) à une O. P. I. "définissable dans $L_{\infty,\omega}(\tau)$"?

Plus précisément, existe-*t*-il, dans la preuve de 2.14(a), un sous-ensemble I' de I tel que $K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} y \big(\bigvee_{i \in I'} \phi_i(\mathbf{x}, y) \big)$? ■

3. **Epimorphismes, monomorphismes et** O. P. I.. Dans cette section, nous nous intéressons aux classes qui ont peu d'O. P. I. "propres", *i.e.* qui ne sont pas des restrictions d'O. T. I. En particulier nous voulons préciser les liens entre cette rareté et celle des épimorphismes non surjectifs et des plongements non réguliers:

DÉFINITION 3.1. Soit K une classe de structures et $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un homomorphisme avec $\mathfrak{B} \in K$.

(a) f est *K-épi* si pour toute paire $g_1, g_2: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dans $\underline{K}$, on a $[g_1 f = g_2 f] \Rightarrow [g_1 = g_2]$.

(b) f est *K-régulier* si pour tout $b \in B \setminus f(A)$, il existe $g_1, g_2: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dans $\underline{K}$, tels que $g_1 f = g_2 f$ et $g_1(b) \neq g_2(b)$. ■

Note aux catégoriciens: si K est fermée (dans $\underline{M(\tau)}$) pour les égalisateurs, alors un morphisme dans $\underline{K}$ est un plongement K-régulier ssi c'est un mono régulier au sens de [17] (lequel sens coincide avec le sens de [13] si K a les produits).

COROLLAIRE 3.2. *Soit* $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *un homomorphisme avec* $\mathfrak{B} \in K$. *Alors,*

(a) f est K-épi ssi $\mathrm{Dom}_K(f) = B$.

(b) f est K-régulier ssi $\mathrm{Dom}_K(f) = f(A)$. ■

EXEMPLES 3.3. Clairement les homomorphismes surjectifs à codomaine dans K sont K-épis. On vérifie aussi que les plongements K-réguliers sont précisément les intersections d'égalisateurs de paires d'homomorphismes dans $\underline{K}$. En particulier le plongement $\mathfrak{Dom}_K(h) \rightarrowtail \mathfrak{A}$ est K-régulier pour toute fonction $h: X \longrightarrow A$, $\mathfrak{A} \in K$. Si $K = \mathrm{AC}$ (2.2(3)), l'inclusion $\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Q}$ est K-épi et l'inclusion $\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{C}$ est K-régulière. Une étude récent des homomorphismes de $\underline{\mathrm{AC}}$ se trouve dans [23]: on y remarque par exemple que si $(f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}$, alors $\mathrm{Dom}_K(f) = \{b \in B \mid b \otimes 1 = 1 \otimes b \text{ dans } \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}\}$, ce qui implique que f est K-épi ssi $\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}$. ■

Les deux résultats qui suivent relient les notions de 3.1 à celles de la Section 2. Une *variété* est ici une classe fermée pour les sous-structures, les produits et les images homomorphes; de façon équivalente, c'est une classe axiomatique définie par un ensemble de formules dans $\forall \wedge At$.

THÉORÈME 3.4. *Soit K une variété.*

(a) ([2]) *Les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) Les plongements dans $\underline{K}$ sont tous K-réguliers.

(ii) Pour tout $\phi \in \exists \wedge At$, on a que $\big[K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} y\big(\phi(\mathbf{x}, y)\big)\big] \Rightarrow \big[$il existe un τ-terme t tel que $K \models \forall \mathbf{x} y\big(\phi(\mathbf{x}, y) \longrightarrow t(\mathbf{x}) = y\big)\big]$.

(b) ([12]) *Les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) Les K-épis dans $\underline{K}$ sont tous surjectifs.

(ii) Pour tout $\{\phi_\iota\}_I \subset \exists \wedge At$ avec $|I| \leq \|\tau\|$, on a que $\big[K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} \mathbf{y}\big(\bigwedge_{\iota \in I} \phi_\iota(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)\big] \Rightarrow \big[$ il existe un ensemble $\{t_y \mid y \in \mathbf{y}\}$ de τ-termes tel que $K \models \forall \mathbf{x} \mathbf{y}\big(\bigwedge_{\iota \in I} \phi_\iota(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} t_y(\mathbf{x}) = y\big)\big]$. ■

EXEMPLES 3.5. (1) Il est facile de voir que dans une variété K (a)(i) entraîne (b)(i): en effet, tout $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ dans $\underline{K}$ se factorise $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow f(\mathfrak{A}) \rightarrowtail \mathfrak{Dom}_K(f) \rightarrowtail \mathfrak{B}$ dans K (où $f(\mathfrak{A})$ est la sous-structure de $\mathfrak{B}$ sur $f(A)$), et (a)(i) implique $f(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Dom}_K(f)$, alors que $\mathfrak{Dom}_K(f) = \mathfrak{B}$ si f est K-épi. (Plus généralement, [tous les monos sont réguliers] $\Rightarrow$ [tous les épis sont réguliers] dans toute catégorie avec limites finies dont les morphismes se factorisent en un épi régulier suivi d'un mono). La variété des groupes a la propriété (a)(i), et on a vu en 3.3 que celle des anneaux commutatifs unitaires n'a pas la propriété (b)(i). Les seuls exemples connus de variétés qui satisfont (b)(i) mais non (a)(i) sont des constructions *ad hoc*. L'article [19] contient une telle construction ainsi que de très nombreux autres exemples. Parmi eux, notons la classe des groupes nilpotents, qui vérifie (b)(i) mais non (a)(i), celle des corps, qui ne vérifie ni (a)(i) ni (b)(i), à contraster avec celle des anneaux de division qui vérifie les deux propriétés.

(2) Quoique ces questions intéressent aussi les topologistes (voir par exemple [6]), la motiviation de départ des résultats de 3.4 se trouve dans un problème (toujours ouvert) de F. W. Lawvere: caractériser les catégories "théories algébriques" qui engendrent des variétés $\underline{K}$ dont les K-épis sont surjectifs (*i.e.* la caractérisation ne doit parler que des homomorphismes entre les structures libres sur des cardinaux finis). ■

Dans une variété, toutes les O. T. I. sont des termes (2.5). De plus, une O. P. I. définie par une formule de $\exists \wedge At$ doit préserver les produits, de sorte que par le théorème 2.11, l'énoncé (a)(ii) est équivalent à (a)(ii)$'$: toute O. P. I. fermée pour les produits s'étend à une O. T. I.

Une formulation de (b)(ii) en ces termes est moins évidente. D'abord $K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} \mathbf{y}\big(\bigwedge_{\iota \in I} \phi_\iota(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$ définit bien un ensemble d'O. P. I.: pour chaque $y \in \mathbf{y}$, on a $K \models \forall \mathbf{x} \exists^{\leq 1} y\big(\exists(\mathbf{y} \setminus y) \bigwedge_{\iota \in I} \phi_\iota(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$, et donc $(V_y, \sigma_y)^{\mathfrak{A}} = \{(\mathbf{a}, a) \in A^\alpha \times A \mid \mathfrak{A} \models \exists(\mathbf{y} \setminus y) \bigwedge_{\iota \in I} \phi_\iota(\mathbf{a}, a, \mathbf{y} \setminus y)\}$ définit une O. P. I. α-aire. Mais c'est un ensemble imbriqué d'une façon très particulière: c'est ce que Linton appelle une constellation ("cluster" en anglais) d'opérations; la proposition 7 de [21] est d'ailleurs très proche de (b). Nous voulons une condition (b)(ii)$'$ du genre de (a)(ii)$'$, *i.e.* sur les O. P. I. individuelles, et qui permette une comparaison plus claire entre (a) et (b). Nous obtiendrons la version suivante de 3.4 comme conséquence de résultats plus généraux:

THÉORÈME 3.4$'$. *Soit K une variété*

(a) Les énoncés suivants sont équivalents:

(i) Les plongements dans $\underline{K}$ sont tous K-réguliers.

(ii)$'$ Toute O. P. I. *dans $\underline{K}$ fermée pour les produits s'étend à une* O. T. I.

(b) Les énoncés suivants sont équivalents:

(i) Les K-épis dans $\underline{K}$ sont tous surjectifs.

(ii)$'$ Toute O. P. I. *dans $\underline{K}$ fermée pour les limites s'étend à une* O. T. I.

Avant d'aborder les considérations qui aboutiront à une version plus générale des équivalences ci-dessus, nous allons esquisser une preuve purement catégorique de (b). Le détail des justifications ne sera pas donné puisque le reste du texte les contiendra (quoique sous une forme différente).

Notons pour commencer qu'un foncteur $V: \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ (où K est axiomatique et fermée pour les limites dans $\underline{M(\tau)}$) qui préserve les limites et qui est sous-foncteur d'un U^α doit vérifier la "condition de l'ensemble-solution de Freyd" (Pour un ensemble X, $\{X \longrightarrow V\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \in K, |B| \leq \text{Max}(\|\tau\|, |X|^\alpha)\}$ est un ensemble-solution: si $f: X \longrightarrow V\mathfrak{A}$, il existe $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}$ tel que $|A'| \leq \text{Max}(\|\tau\|, |X|^\alpha)$ et contenant toutes les coordonnées de chacun des $f(x)$, $x \in X$; le fait que V soit fermé pour les sous-structures élémentaires (puisqu'il préserve les égalisateurs: 2.9(1)) implique que $f(X) \subset V\mathfrak{A}'$). Un tel V a donc un adjoint à gauche, et est en conséquence représentable: $V \cong \underline{K}(\mathfrak{A}, -)$ pour un $\mathfrak{A} \in K$. De plus, dans la correspondance de Yoneda entre les transformations naturelles $\underline{K}(\mathfrak{A}, -) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \underline{K}(\mathfrak{B}, -)$ et les homomorphismes $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$, les sous-foncteurs correspondent aux K-épis (dans $\underline{K}$). On a donc une correspondance entre les diagrammes

$$\begin{tikzcd} U^\alpha \arrow[dr, dotted] & \\ V \arrow[u, tail, "\cdot"'] \arrow[r, dotted, "\sigma"'] & U \end{tikzcd} \quad \cong \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{F}_\alpha(\underline{K}) \arrow[d, "(\text{épi})"'] & \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{F}_1(\underline{K}) \arrow[l] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

qui donne facilement le résultat (utilisant le fait que pour tout $\mathfrak{B} \in K$ il existe un cardinal β et un homomorphisme $\mathfrak{F}_\beta(\underline{K}) \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$ surjectif, et le fait qu'un diagramme $\mathfrak{F}_\beta(\underline{K}) \twoheadrightarrow \mathfrak{A} \longleftarrow \mathfrak{F}_1(\underline{K})$ avec $\mathfrak{F}_\beta(\underline{K}) \twoheadrightarrow \mathfrak{A}$ surjectif peut toujours être complété $\mathfrak{F}_\beta(\underline{K}) \leftarrow\cdots \mathfrak{F}_1(\underline{K})$).

Une conséquence facile de 2.7 et 2.14(b) est que si K est axiomatique et fermée pour les produits, alors pour un sous-ensemble X de $\mathfrak{A} \in K$, $\mathfrak{Dom}_K(X, \mathfrak{A})$ (*i.e.* $\mathfrak{Dom}_K(h)$ où h est l'inclusion $X \rightarrowtail A$) est la sous-structure de $\mathfrak{A}$ engendrée par X sous les O. P. I. fermées pour les produits (*i.e.* $\text{Dom}_K(X, \mathfrak{A}) = \{\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in V\mathfrak{A} \cap X^\alpha$ et (V, σ) est une O. P. I. fermée pour les produits$\}$). Nous voulons, d'une part, montrer que cela est vrai pour tout $\underline{K}$, et d'autre part obtenir un résultat analogue pour les O. P. I. fermées pour les limites et le "dominion stable", que nous devons maintenant définir: si on note $h_1: X \longrightarrow \text{Dom}_K(h)$ la fonction induite par $h: X \longrightarrow A$, $h_2: X \longrightarrow \text{Dom}_K(h_1)$ la fonction induite par h_1, *etc.*, et $h_\alpha: X \longrightarrow \bigcap\{\text{Dom}_K(h_\beta) \mid \beta < \alpha\}$ lorsque α est un ordinal limite (notez que $\mathfrak{Dom}_K(h_\alpha) \in K$), alors le fait que $\mathrm{Dom}_K(h_\beta) \subset \mathrm{Dom}_K(h_\gamma)$ si $\beta > \gamma$ implique l'existence d'un γ tel que $\mathrm{Dom}_K(h_\beta) = \mathrm{Dom}_K(h_\gamma)$ pour tout $\beta > \gamma$. On a alors:

DÉFINITION 3.6. Soit K une classe de structures, $\mathfrak{A} \in K$ et $h: X \longrightarrow A$ une fonction. Le *$(K-)$ dominion stable de h*, noté $\mathfrak{Dom}_K^\infty(h)$, est la sous-structure de $\mathfrak{A}$ sur $\bigcap\{\mathrm{Dom}_K(h_\alpha) \mid \alpha \text{ un ordinal}\}$. ■

Dans ce qui suit, on dira que K est *fermée pour les intersections d'égalisateurs*, si la condition:

$$[(f_i, g_i\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i) \subset \underline{K} \text{ pour } i \in I] \Rightarrow \left[\bigcap\{\mathfrak{Eg}(f_i, g_i) \mid i \in I\} \in K\right]$$

est vérifiée (I un ensemble). Notons que c'est le cas en particulier des classes fermées pour les limites.

THÉORÈME 3.7. *Soit K une classe de structures, $\mathfrak{A} \in K$ et $h: X \longrightarrow A$ une fonction. Alors*

(a) $\mathfrak{Dom}_K(h)$ est la fermeture de $h(X)$ dans $\mathfrak{A}$ par rapport aux O. P. I. *dans $\underline{K}$.*

(b) Si K est fermée pour les intersections d'égalisateurs, $\mathfrak{Dom}_K^\infty(h)$ est la fermeture de $h(X)$ dans $\mathfrak{A}$ par rapport aux O. P. I. *dans $\underline{K}$ qui sont fermées pour les égalisateurs.*

PREUVE. On doit montrer que $\mathrm{Dom}_K(h)$ (resp. $\mathrm{Dom}_K^\infty(h)) = \{\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \mid (\mathbf{a} = hk\colon \alpha \longrightarrow X \longrightarrow A) \in V\mathfrak{A}$ et (V, σ) est une O. P. I. (resp. une O. P. I. fermée pour les égalisateurs)$\}$. Les inclusions $\supset$ sont aisées à vérifier. La démonstration des inclusions inverses repose sur le lemme suivant, qui sera réutilisé plus loin:

LEMME 3.8. *Soit K une classe de structures, $\mathfrak{A} \in K$ et $h: X \longrightarrow A$ une fonction.*

(a) $\left\{V_h^{\mathfrak{B}} = \{fh\colon X \longrightarrow A \longrightarrow B \mid (f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}\} \mid \mathfrak{B} \in K\right\}$ induit une R. I. *$|X|$-aire V_h dans $\underline{K}$ qui est fermée pour les produits.*

(b) Si $\mathfrak{Dom}_K(h) = \mathfrak{A}$, alors V_h est fermée pour les limites.

(c) Pour tout $a \in \mathrm{Dom}_K(h)$, $\{\sigma_{h,a}^{\mathfrak{B}}(fh\colon X \longrightarrow A \longrightarrow B) = f(a) \mid (f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}\}$ définit une O. P. I. *$(V_h, \sigma_{h,a})$.*

PREUVE. Nous donnons la preuve de (b) pour illustration, le reste étant encore plus facile. On utilise les caractérisations de 2.9(1).

Soit $f_1, f_2\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dans $\underline{K}$ tel que $\mathfrak{Eg}(f_1, f_2) \in K$, et $\mathbf{e} \in \mathrm{Eg}(f_1, f_2)^X \cap V_h\mathfrak{B}$. Alors il existe $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}$ tel que $\mathbf{e} = fh$, et donc $f_1fh = f_1\mathbf{e} = f_2\mathbf{e} = f_2fh$. Ceci implique que $f_1f = f_2f$, puisque $\mathfrak{Dom}_K(h) = \mathfrak{A}$, et donc il existe un homomorphisme $g\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{Eg}(f_1, f_2)$ tel que $g(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$. En particulier $gh(x) = fh(x) = \mathbf{e}(x)$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire $gh = \mathbf{e}$. Donc $\mathbf{e} \in V_h\big(\mathfrak{Eg}(f_1, f_2)\big)$. ■

Soit $a \in \mathrm{Dom}_K(h)$. Alors pour $1_{\mathfrak{A}}\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ l'homomorphisme identité, on a $\sigma_{h,a}^{\mathfrak{A}}(h) = \sigma_{h,a}^{\mathfrak{A}}(1_{\mathfrak{A}}h) = 1_{\mathfrak{A}}(a) = a$, et donc l'inclusion $\subset$ requise dans le premier cas. Si $a \in \mathrm{Dom}_K^\infty(h)$, on considère la factorisation $h''h'\colon X \longrightarrow \mathrm{Dom}_K^\infty(h) \rightarrowtail A$ de h et on applique 3.8 à h': on voit facilement que $\mathfrak{Dom}_K(h') = \mathfrak{Dom}_K^\infty(h)$, d'où $V_{h'}$ est fermée pour les limites, et donc $(V_{h'}, \sigma_{h',a})$ aussi; $\sigma_{h',a}^{\mathfrak{A}}(h) = \sigma_{h',a}^{\mathfrak{A}}(h''h') = h''(a) = a$ donne le résultat. ■

La preuve de 3.7 montre que $\mathfrak{Dom}_K(h)$ (resp. $\mathfrak{Dom}_K^\infty(h)$) est aussi la fermeture de $h(X)$ dans $\mathfrak{A}$ par rapport aux O. P. I. fermées pour les produits (resp. fermées pour les limites). Notons que ceci n'implique pas que tout O. P. I. s'étende à une O. P. I. fermée pour les produits: l'O. P. I. (V,σ) de 2.2(4) fournit un contre-exemple.

Tout $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ dans un catégorie $\underline{K}$ de structures se factorise $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow f(\mathfrak{A}) \rightarrowtail \mathfrak{Dom}_K^\infty(f) \rightarrowtail \mathfrak{Dom}_K(f) \rightarrowtail \mathfrak{B}$ dans $\underline{M(\tau)}$. Supposons K fermée pour les intersections d'égalisateurs. Alors K est aussi fermée pour les dominions et les dominions stables (*i.e.* $[\mathfrak{A} \in K$ et $h\colon X \longrightarrow A] \Rightarrow [\mathfrak{Dom}_K(h), \mathfrak{Dom}_K^\infty(h) \in K]$). $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{Dom}_K^\infty(f)$ est K-épi et $\mathfrak{Dom}_K(f) \rightarrowtail \mathfrak{B}$ est K-régulier, et on a alors, par 3.2, que les plongements dans $\underline{K}$ sont tous K-réguliers (resp. les K-épis dans $\underline{K}$ sont tous surjectifs) ssi $f(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Dom}_K(f)$ (resp. $f(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Dom}_K^\infty(f)$) pour tout $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}$. Par 3.7, il suffit pour cela que les O. P. I. (resp. les O. P. I. fermées pour les égalisateurs) dans $\underline{K}$ s'étendent à des O. T. I. Le reste de cette section a pour but de raffiner suffisamment cette observation pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes.

La proposition suivante, qui consiste en des variantes de résultats dus à H. Volger ([25] et [26]), nous sera utile.

PROPOSITION 3.9. *Soit K une classe axiomatique de structures fermée pour les égalisateurs.*

(a) Alors K est fermée pour les intersections d'égalisateurs (et donc aussi pour les dominions et les dominions stables).

(b) Soit R une R. I. *α-aire dans $\underline{K}$ fermée pour les intersections d'égalisateurs, $\tau_\alpha = \tau \cup \{c_\beta\}_{\beta<\alpha}$ (les c_β étant des symboles de constante), et $K_R = \{\langle \mathfrak{A}, \{\mathbf{a}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle \mid \mathfrak{A} \in K$ et $\mathbf{a} \in R^{\mathfrak{A}}\}$ $(\subset M(\tau_\alpha))$. Alors $K_R = \bigcup_{j\in J} K_j$, où $K_j = K_R \cap M(Q_j)$ pour des $Q_j \subset \exists\wedge At(\tau_\alpha)$ et chaque $\underline{K}_j$ a une structure initiale (i.e. un $\mathfrak{A} \in K_j$ tel que pour tout $\mathfrak{B} \in K_j$ il existe exactement un $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}_j$)).*

PREUVE. (a) Dans [25], la proposition 2 implique qu'une classe axiomatique fermée pour les égalisateurs est aussi fermée pour les intersections de chaînes de plongements $\cdots \rightarrowtail \mathfrak{A}_\beta \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \mathfrak{A}_2 \rightarrowtail \mathfrak{A}_1$ dans K (en fait pour toutes les "colimites filtrées" et "limites cofiltrées"); la preuve de la Proposition 10 montre ensuite comment représenter toute intersection d'égalisateurs comme l'intersection d'une telle chaîne.

(b) Par 2.9(1), R est fermée pour les sous-structures élémentaires. Par le Théorème de Lowenheim-Skolem-Tarski, il existe donc un sous-ensemble $\{\mathfrak{A}_j \mid j \in J\}$ de K_R tel que pour tout $\mathfrak{B} \in K_R$, il existe $j \in J$ tel que $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{B}$. La fermeture de K_R pour les intersections d'égalisateurs signifie que $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{Dom}_{K_R}^\infty(h_j)$, où $h_j\colon \emptyset \longrightarrow A_j$, est dans K_R. On pose $K_j = \{\mathfrak{B} \in K_R \mid$ il existe $f\colon \mathfrak{D}_j \longrightarrow \mathfrak{B}\}$. Que $K_R = \bigcup_{j\in J} K_j$ suit du choix des $\mathfrak{A}_j$. $\mathfrak{D}_j$ est une structure initiale de $\underline{K}_j$, puisque si $f_1,f_2\colon \mathfrak{D}_j \longrightarrow \mathfrak{B}$ sont dans $\underline{K}_R$, alors $\mathfrak{Eg}(f_1,f_2) = \mathfrak{D}_j$, *i.e.* $f_1 = f_2$.

On montre que $K_j = K_R \cap M(Q_j)$, où $Q_j = \{\phi \mid \phi$ un énoncé de $\exists\wedge At(\tau_\alpha)$ et $\mathfrak{D}_j \models \phi\}$. D'après un résultat classique de théorie des modèles, une τ_α-structure est un modèle de Q_j ssi il existe un homomorphisme de $\mathfrak{D}_j$ dans une de ses extensions élémentaires. Ceci implique clairement $K_j \subset M(Q_j)$. A l'inverse, si $(f\colon \mathfrak{D}_j \longrightarrow \mathfrak{C})$ et $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ sont dans $\underline{K}_R$,

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-029-3 Published online by Cambridge University Press

alors $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{g}}(f_1,f_2)$ pour des f_1,f_2 de $\mathfrak{C}$ dans une de ses ultrapuissances (2.9); mais $f_1f = f_2f$ (par initialité de $\mathfrak{D}_j$), et donc f se factorise $f\colon \mathfrak{D}_j \longrightarrow \mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, ce qui prouve $K_j \supset K_R \cap M(Q_j)$. ■

REMARQUES 3.10. (1) Notons qu'une classe axiomatique de structures fermée pour les égalisateurs n'est pas nécessairement fermée pour les intersections quelconques (de sous-structures dans K).

(2) Une structure initiale dans une catégorie $\underline{K}$ n'est bien sûr rien d'autre qu'une structure libre sur 0 pour $\underline{K}$ au sens de 2.5(1).

(3) Si R est définissable, il est clair que les K_j dans (b) seront axiomatiques. Ceci s'applique en particulier au cas $K_R = \left\{\langle \mathfrak{A}, \{\mathbf{a}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle \mid \mathfrak{A} \in K \text{ et } \mathbf{a} \in A^{\alpha}\right\}$ (noté K_α).

(4) Une version catégorique générale de (b) s'obtient aisément. Elle affirmera que si un foncteur $V\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ vérifie les conditions

(i) $\underline{C}$ est localement petite pour les monos extrémaux (en anglais: "extremally well-powered"),

(ii) $\underline{C}$ a et V préserve les égalisateurs et les intersections de chaînes de monos réguliers, et

(iii) V vérifie la condition des ensembles-solutions,

alors V a un "quasi-adjoint" (*i.e.* les catégories $(c \downarrow V)$, $c \in \underline{C}$, admettent une famille "quasi-initiale" au sens de [26]). Si on remplace (ii) par "C a et V préserve les égalisateurs et les pullbacks (resp. les limites)", on obtient un multi-adjoint (resp. un adjoint) pour V ([8], [13]), ce qui revient à dire qu'on peut trouver des K_j disjoints (resp. trouver J avec un seul élément).

Nous avons besoin d'une dernière définition avant les théorèmes principaux.

DÉFINITION 3.11. Une classe de structures K est *fermée pour les factorisations (-images)* si $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K} \Rightarrow f(\mathfrak{A}) \in K$. ■

On peut montrer qu'une catégorie axiomatique $\underline{K}$ de structures fermée pour les égalisateurs est (Epi, Mono extremal) au sense de [13] (la factorisation de $(f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}) \in \underline{K}$ étant donnée par $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{Dom}_K^\infty(f) \rightarrowtail \mathfrak{B}$). Si K est aussi fermée pour les pullbacks, alors (Plongements$^\uparrow$, Plongements) et (Epi extrémal, Mono = Homomorphismes injectifs) sont aussi des systèmes de factorisations (Lemme 3.1 de [5]).

Soit $\underline{K}$ une catégorie axiomatique de structures fermée pour les égalisateurs. Si les K-épis dans $\underline{K}$ sont surjectifs, alors clairement $\underline{K}$ est fermée pour les factorisations (puisqu'alors $\mathfrak{Dom}_K^\infty(f) = f(\mathfrak{A})$). En fait on vérifie aisément que les K-épis dans $\underline{K}$ sont surjectifs ssi K est fermée pour les factorisations et que les plongements dans $\underline{K}$ sont exactement les monos extrémaux de $\underline{K}$. Ceci, ajouté au fait que régulier $\Rightarrow$ extrémal, rend plus transparente l'implication (a)(i) $\Rightarrow$ (b)(i) de 3.4.

THÉORÈME 3.12. *Soit $\underline{K}$ un catégorie axiomatique de structures fermée pour les factorisations.*

(a) Si K est fermée pour les égalisateurs, alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) Les plongements dans $\underline{K}$ sont tous K-réguliers.

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-029-3 Published online by Cambridge University Press

(ii) Pour toute O. P. I. (V, σ) *dans* $\underline{K}$*, il existe des ensembles* $\{\psi_l(\mathbf{x}) \mid l \in L(j), j \in J\}$ *et* $\{\phi_i(\mathbf{x}, y) \mid i \in I(j), j \in J\}$ *de formules dans* $\exists \wedge At$ *tels que*

$$K \models \forall \mathbf{x}\Big(\bigvee_{j\in J}\Big(\bigwedge_{l\in L(j)} \psi_l(\mathbf{x})\Big)\Big)$$

et tels que pour chaque $j \in J$,

$$K \models \forall \mathbf{x}\Big(\Big(\bigwedge_{l\in L(j)} \psi_l(\mathbf{x})\Big) \longrightarrow \bigwedge_{i\in I(j)} \exists^1 y\big(\phi_i(\mathbf{x}, y)\big)\Big), \text{ et}$$

$$K \models \forall \mathbf{x}y\Big(\Big(\bigwedge_{l\in L(j)} \psi_l(\mathbf{x})\Big) \wedge \big((\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x},y)\text{”}\big) \longrightarrow \bigvee_{i\in I(j)} \phi_i(\mathbf{x}, y)\Big).$$

(b) Si K est fermée pour les sous-structures, alors (a)(i) est équivalent à:

(ii)′ Pour toute O. P. I. (V, σ) *dans* $\underline{K}$*, il existe un ensemble* $\{t_i(\mathbf{x}) \mid i \in I\}$ *de termes tel que*

$$K \models \forall \mathbf{x}\big(\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x},y)\text{”}\big) \longrightarrow \bigvee_{i\in I}\big(t_i(\mathbf{x}) = y\big).$$

(c) Si K est fermée pour les limites, alors (a)(i) est équivalent à chacun des énoncés suivants:

(ii)″ Pour toute O. P. I. (V, σ) *dans* $\underline{K}$*, il existe un ensemble* $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ *d'*O. T. I. *(définissables) tel que*

$$K \models \forall \mathbf{x}\big(\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x},y)\text{”}\big) \longrightarrow \bigvee_{i\in I}\big(\sigma_i(\mathbf{x}) = y\big).$$

(iii)″ Toute O. P. I. *dans* $\underline{K}$ *fermée pour les produits s'étend à une* O. T. I.

De plus, dans (a), (b) et (c), on peut se limiter aux O. P. I. *définissables et finitaires.*

PREUVE. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit (V, σ) une O. P. I. α-aire, $\mathfrak{A} \in K$ et $\mathbf{a} \in V\mathfrak{A}$. On utilise 3.9 avec $K_R = K_\alpha$ (3.10(3)). Si $\langle \mathfrak{D}_j, \{\mathbf{d}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle$ est la structure initiale d'une composante K_j de K_α à laquelle appartient $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, \{\mathbf{a}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle$, alors il existe un (unique) τ_α-homomorphisme $f\colon \langle \mathfrak{D}_j, \{\mathbf{d}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle \longrightarrow \langle \mathfrak{A}, \{\mathbf{a}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle$, lequel a sa factorisation-image $\langle \mathfrak{D}_j, \{\mathbf{d}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle \twoheadrightarrow \langle f(\mathfrak{D}_j), \{\mathbf{a}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle \rightarrowtail \langle \mathfrak{A}, \{\mathbf{a}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle$ dans K_j. Comme le τ-homomorphisme $f(\mathfrak{D}_j) \rightarrowtail \mathfrak{A}$ est K-régulier (par hypothèse), on a $\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = f(d)$ pour un $d \in D_j$ (3.2 et 3.7). Mais l'initialité de $\langle \mathfrak{D}_j, \{\mathbf{d}(\beta)\}_{\beta<\alpha}\rangle$ implique que chaque élément de D_j détermine une O. T. I. (o-aire) σ' dans K_j telle que $f(d) = (\sigma')^{\mathfrak{A}'}$ (2.5(1)). De plus, σ' est définissable par une formule $\phi_i'(y)$ de $\exists \wedge At(\tau_\alpha)$ car K_α est axiomatique (2.5(2)). Chaque $d \in D_j$ donne lieu à une telle formule, et si $Q_j = \{\psi_l' \mid l \in L(j)\}$ (où $K_j = K_R \cap M(Q_j)$), le résultat est obtenu en prenant $I(j) = D_j$ et pour $\phi_i(\mathbf{x}, y)$ (resp. $\psi_l(\mathbf{x})$) la formule de $L_\omega(\tau)$ obtenue de $\phi_i'(y)$ (resp. ψ_l') en remplaçent les occurences des c_β par $\mathbf{x}(\beta)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $f\colon \mathfrak{A} \rightarrowtail \mathfrak{B}$ un plongement dans $\underline{K}$. S'il n'est pas K-régulier, il existe $b \in \mathrm{Dom}_K(f) \setminus f(A)$, et donc une O. P. I. (V, σ) dans $\underline{K}$ (qu'on peut choisir définissable) telle que $\mathbf{a} \in V\mathfrak{B} \cap A^\alpha$ et $\sigma^{\mathfrak{B}}\big(f^\alpha(\mathbf{a})\big) = b$. Soit $j \in J$ tel que $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{l \in L(j)} \psi_l[\mathbf{a}]$. Alors $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{l \in L(j)} \psi_l[f^\alpha(\mathbf{a})]$, et donc $\mathfrak{B} \models \phi_\iota[f^\alpha(\mathbf{a}), b]$ pour un $i \in I(j)$. Mais $\mathfrak{A} \models \exists^1(\phi_\iota[\mathbf{a}, y])$, et donc $\mathfrak{A} \models \phi_\iota[\mathbf{a}, a]$ pour un $a \in A$, d'où $\mathfrak{B} \models \phi_\iota[f^\alpha(\mathbf{a}), f(a)]$. Ceci implique $b = f(a)$, par unicité, contredisant l'hypothèse.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii)$'$. Par 2.5(3), chaque $\phi_\iota'(y)$ peut être remplacée par un τ_α-terme t_ι' 0-aire, et donc chaque $\phi_\iota(\mathbf{x}, y)$ par un τ-terme $t_\iota(\mathbf{x})$ α-aire. Mais t_ι' est une O. T. I. dans tout $\underline{K}_\alpha$, et non seulement dans la composante correspondante $\underline{K}_j$ telle que $i \in I(j)$. Le résultat suit en prenant alors $I = \bigcup_{j \in J} I(j)$.

(ii)$'$ $\Rightarrow$ (i). Comme pour (ii) $\Rightarrow$ (i), en plus aisé.

(c) Pour (ii)$''$, le résultat suit aisément de ce que si K est fermée pour les produits, alors il en est de même pour K_α, et on peut alors choisir J avec un seul élément. Pour (iii)$''$, si I est minimal tel que $K \models \forall \mathbf{x}\big(\text{“}(V,\sigma)(\mathbf{x}, y)\text{”}\big) \longrightarrow \bigvee_{\iota \in I}\big(\sigma_\iota(\mathbf{x}) = y\big)$, c'est qu'il existe $\{\langle \mathfrak{A}_\iota, \mathbf{a_i}, a_\iota \rangle\}_{\iota \in I}$ tel que pour chaque $i \in I$, $\mathbf{a_i} \in V\mathfrak{A}_\iota$ et $\sigma_{\iota'}^{\mathfrak{A}_{\iota'}}(\mathbf{a_i}) \neq a_\iota$ pour tout $i' \neq i$; comme $\prod_I \mathfrak{A}_\iota \models \text{“}(V,\sigma)[\langle \mathbf{a_i} \rangle_I, \langle a_\iota \rangle_I]\text{”}$, et que donc $\sigma_{\iota'}^{\prod_I \mathfrak{A}_\iota}(\langle \mathbf{a_i} \rangle_I) = \langle a_\iota \rangle_I$ pour un $i' \in I$, on doit avoir $|I| = 1$. ■

THÉORÈME 3.13. *Soit $\underline{K}$ une catégorie axiomatique de structures.*

Alors les énoncés (a), (b)* et (c)*, obtenus respectivement des énoncés (a), (b) et (c) du théorème 3.12 en remplaçant*

- *(i) par “Les K-épis dans $\underline{K}$ sont tous surjectifs”,*
- *“toute* O. P. I. (V,σ) *dans $\underline{K}$” par “toute* O. P. I. (V,σ) *dans $\underline{K}$ qui est fermée pour les intersections d'égalisateurs”, et*
- *“toute* O. P. I. (V,σ) *dans $\underline{K}$ qui est fermée pour les produits” par “toute* O. P. I. (V,σ) *dans $\underline{K}$ qui est fermée pour les limites”,*

sont vérifiés.

De plus, si K est fermée pour les factorisations, on peut se limiter, dans (a)*, (b)* et (c)*, aux O. P. I. d'arité $\leq \|\tau\|$.

PREUVE. (i) $\Rightarrow$ (ii). On utilise 3.9 avec K_α aussi bien qu'avec K_V (*i.e.* V vue comme R. I.). Ici, K_V a une décomposition $K_V = \bigcup_{j \in J} K_j$, et pour chaque τ_α-structure $\langle \mathfrak{A}_j, \{\mathbf{a_j}(\beta)\}_{\beta<\alpha} \rangle$ qui est initiale dans sa composante, on considère l'unique τ_α-homomorphisme $f\colon \langle \mathfrak{D}, \{\mathbf{d}(\beta)\}_{\beta<\alpha} \rangle \longrightarrow \langle \mathfrak{A}_j, \{\mathbf{a_j}(\beta)\}_{\beta<\alpha} \rangle$, où $\langle \mathfrak{D}, \{\mathbf{d}(\beta)\}_{\beta<\alpha} \rangle$ est la structure initiale d'une des composantes de K_α où se trouve $\langle \mathfrak{A}_j, \{\mathbf{a_j}(\beta)\}_{\beta<\alpha} \rangle$. Alors la τ-restriction $f\colon \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{A}_j$ est un K-épi: en effet, on voit aisément que toute paire $f_1, f_2\colon \mathfrak{A}_j \longrightarrow \mathfrak{B}$ dans $\underline{K}$ telle que $f_1 f = f_2 f$ donne lieu à une paire $f_1, f_2\colon \langle \mathfrak{A}_j, \{\mathbf{a_j}(\beta)\}_{\beta<\alpha} \rangle \longrightarrow \Big\langle \mathfrak{B}, \big\{f_1 f\big(\mathbf{d}(\beta)\big)\big\}_{\beta<\alpha} \Big\rangle$ dans K_V, d'où $f_1 = f_2$ par initialité de $\langle \mathfrak{A}_j, \{\mathbf{a_j}(\beta\}_{\beta<\alpha} \rangle$ dans $\underline{K}_j$. Donc f est surjectif, et $\sigma^{\mathfrak{A}_j}(\mathbf{a_j}) = f(d)$ pour un $d \in D$. Le reste de la preuve est identique à celle de 3.12(a).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un K-épi dans $\underline{K}$. Supposons l'existence d'un $b \in B \setminus f(A)$. Puisque $\mathfrak{Dom}_K(f) = \mathfrak{B}$, l'O. P. I. $(V_f, \sigma_{f,b})$, définie comme au lemme 3.8, est fermée pour les limites (et donc pour les intersections d'égalisateurs). On a $1_{\mathfrak{B}} f \in V_f \mathfrak{B}$, et $\sigma_{f,b}^{\mathfrak{A}}(1_{\mathfrak{B}} f) = 1_{\mathfrak{B}}(b) = b$. Soit $j \in J$ tel que $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{l \in L(j)} \psi_l[1_A]$. Alors $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{l \in L(j)} \psi_l[f]$, et donc $\mathfrak{B} \models \phi_\iota[1_{\mathfrak{B}} f, b]$ pour un $i \in I(j)$ (car $\mathfrak{B} \models \text{“}(V,\sigma)[1_{\mathfrak{B}} f, b]\text{”}$). Comme

$K \models \forall \mathbf{x}\big((\bigwedge_{l\in L(j)} \psi_l(\mathbf{x})\big) \longrightarrow \bigwedge_{\iota\in I(j)} \exists^1 y\big(\phi_\iota(\mathbf{x},y)\big)$, il doit exister $a \in A$ tel que $\mathfrak{A} \models \phi_\iota[1_A, a]$, d'où $\mathfrak{B} \models \phi_\iota[1_{\mathfrak{B}}f, f(a)]$, et donc $f(a) = b$. Ceci contredit le choix de b. Donc f est surjectif.

Le reste de la preuve suit le même schéma qu'en 3.12, sauf pour la dernière phrase, qui est une conséquence immédiate du lemme suivant, essentiellement contenu dans [2]. ∎

LEMME 3.14. *Soit K une classe de structures fermée pour les sous-structures élémentaires et les factorisations. Alors les K-épis dans $\underline{K}$ sont tous surjectifs ssi les K-épis dans $\underline{K}$ entre structures de cardinalité $\leq \|\tau\|$ sont surjectifs.*

PREUVE. Ce qui est en fait montré dans [2], c'est que pour tout $f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ dans $\underline{K}$, il existe $\mathfrak{A}' \prec f(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{B}$ et $f'\colon \mathfrak{A}' \rightarrowtail \mathfrak{B}'$ tels que $|\mathfrak{A}'|, |\mathfrak{B}'| \leq \|\tau\|$, f' est K-épi si f l'est, et f' est surjectif ssi f l'est. Ceci suffit clairement pour prouver le lemme. ∎

REMARQUES 3.15. (1) Une catégorie axiomatique de τ-structures fermée pour les limites et les factorisations est en fait, à une redéfinition du type près, une "quasivariété": on montre en effet dans [9] que si τ^* est l'expansion de τ obtenue en ajoutant les O. T. I. dans $\underline{K}$ comme nouveaux symboles d'opération, alors la classe $K^* = \big\{\langle \mathfrak{A}, \{\sigma^{\mathfrak{A}} \mid \sigma \text{ une O. T. I.}\}\rangle \mid \mathfrak{A} \in K\big\}$ est axiomatique, fermée pour les sous-structures et les produits, et les catégories $\underline{K}$ et $\underline{K}^*$ sont isomorphes.

(2) Quoique nous n'ayons aucune preuve de cela, il semble peu probable qu'on puisse se limiter, dans 3.13, aux O. P. I. finitaires. Notons que par le Théorème de Compacité, chaque (V_y, σ_y) dans la constellation définie par la condition (b)(ii) du théorème 3.4 (voir le paragraphe précédant 3.4$'$) a une projection finitaire (V'_y, σ'_y) définie par $\exists \mathbf{y}'\big(\bigwedge_{\iota\in I'} \phi_\iota(\mathbf{x}', \mathbf{y}')\big)$ pour des sous-ensembles (finis) $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, et I' de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et I respectivement; il est facile de vérifier que (V_y, σ_y) est fermée pour les limites, mais que (V'_y, σ'_y) ne l'est pas en général. ∎

RÉFÉRENCES

1. J Almeida, *Equations for pseudovarieties*, LITP **88**, LNCS **386**, (1989)

2. P D Bacsich, *Model theory of epimorphisms*, Canad Math Bull **17**(1974), 471–477

3. P Burmeister and H Reichel, *Introduction to theory and applications of partial algebras*, Akademie-Verlag, Berlin, 1984

4. S Burris and H P Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981

5. C Cassidy, M Hébert and G M Kelly, *Reflexive subcategories, localizations and factorization systems*, J Austr Math Soc **38**(1985), 287–329

6. G Castellini, *Compact objects, surjectivity of epimorphisms and compactifications*, Cah Top Geom Diff Cat (1) **31**(1990)

7. C C Chang and H J Keisler, *Model Theory*, Springer-Verlag, Amsterdam, 1973

8. Y Diers, *Familles universelles de morphismes*, Ann Soc Math Bruxelles **93**(1979), 175–195

9. M Hébert, *Characterizations of axiomatic categories of models canonically isomorphic to (quasi-) varieties*, Canad Math Bull **31**(1988), 287–300

10. ———, *Sur le rang et la définissabilité des opérations implicites dans les classes d'algebres*, Coll Math **58**(1990), 175–188

11. ———, *Sur les algèbres libres pour les classes axiomatiques*, Ann Sci Math Qué **13**(1989), 39–47

12. J Herrera, *Les théories convexes de Horn*, C R Acad Sc Paris (A) **287**(1978), 593–594

13. H Herrlich and G E Strecker, *Category Theory*, Helderman-Verlag, Berlin, 1979

14. W Hodges, *Functorial implicit reducibility*, Fund Math **108**(1980), 77–81
15. J R Isbell, *Epimorphisms and dominions* In Proc Conf Categ Alg , La Jolla, (1965), Springer-Verlag, New York, (1966), 232–246
16. ———, *Functorial implicit operations*, Israel J Math **15**(1973), 185–187
17. G M Kelly, *Monomorphisms epimorphisms and pull backs*, J Austr Math Soc **9**(1969), 124–142
18. J F Kennison and D Guldenhuys, *Equational completion model induced triples and pro objects*, J Pure Appl Alg **1**(1971), 317–346
19. E W Kiss, L Marki, P Prohle and W Tholen, *Categorical algebraic properties A compendium* , Studia Sc Math Hung **18**(1983), 79–141
20. F W Lawvere, *Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories*, LNM **61**(1968), 41–61
21. F E J Linton, *Some aspects of equational categories* In Proc Conf Categ Alg , La Jolla, (1965), Springer-Verlag, New York, (1966), 84–94
22. V Manca, A Salibra and G Scollo, *Equational type logic*, Theor Comp Sc **77**(1990), 131–159
23. G Picavet, *Purete rigidite et morphismes entiers*, Trans Amer Math Soc **323**(1991), 283–313
24. A Tarlecki, *On the existence of free models in abstract algebraic institutions*, Theor Comp Sc **37**(1985), 269–304
25. H Volger, *Preservation theorems for limits of structures and global sections of structures*, Math Z **166** (1979), 27–53
26. ———, *The model theory of disjunctive logic programs*, Comp Sci Logic **89**, LNCS **440**(1990)

Departement de mathematiques et de statistique
Universite Laval
Quebec Quebec
G1K 7P4
email mhebert@mat ulaval ca

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-029-3 Published online by Cambridge University Press