

ment that in the *Théorie Analytique des Probabilités* (Livre II., chap. ii., § 4) a closely approximate formula is given for their easy calculation. No doubt the process by which this formula is obtained is somewhat difficult as well as troublesome, but the existence of the formula itself should be generally known.

When it is applied to the above problem, it gives the answer in the somewhat startling form of "about 40,000 years."

*P.S.*—April 4, 1887.—Finding that Laplace's formula ceases to give approximate results, for very large values of  $m$  and  $n$  when these numbers are of the same order of magnitude, I applied to Prof. Cayley on the subject. He has supplied the requisite modification of the formula, and his paper has been to-night communicated to the *Royal Society of Edinburgh*.

---

Sur les cordes communes à une conique et à un cercle de  
rayon nul ;

Application à la théorie géométrique des foyers dans les  
coniques.

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Etant donnés une conique  $K$ , dont l'équation est  $K = 0$ , et un point  $P(a, \beta)$ , l'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection de la conique  $K$  et du cercle  $P$  de rayon nul, qui a le point  $(a, \beta)$  pour centre, est

$$(1) \quad K + \lambda[(x - a)^2 + (y - \beta)^2] = 0.$$

Comme les quatre points d'intersection du cercle  $P$  et de la conique  $K$  sont imaginaires, le système (1) comprend un seul couple de droites réelles  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Ces droites seront dites, par analogie avec une expression proposée par Chasles,\* les *conjointes du point  $P$  et de la conique  $K$* .

Parmi les couples de cordes imaginaires communes au cercle  $P$  et à la conique  $K$  se trouvent les *droites isotropes* passant au point  $P$

$$\begin{aligned} (x - a) + i(y - \beta) &= 0 \\ (x - a) - i(y - \beta) &= 0, \end{aligned}$$

---

\* *Journal de Liouville*, T. III., p. 385.

c'est-à-dire, les droites qui unissent le point P aux ombilics I et J du plan (expression de Laguerre), points imaginaires situés sur la droite de l'infini et par où passent tous les cercles du plan.

Une première conséquence de cette remarque est que *le point P a même polaire relativement à la conique K et aux conjointes  $\Delta$  et  $\Delta'$* . Les conjointes passent en effet, d'après ce qui précède, par les points communs à la conique K et aux droites PI et PJ.

Par conséquent, le point de rencontre des conjointes  $\Delta$  et  $\Delta'$  se trouve sur la polaire du point P relativement à la conique K. On peut observer, aussi, qu'en vertu d'une propriété générale des coniques passant par l'intersection d'une conique et d'un cercle, *les conjointes  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont également inclinées sur les axes de la conique K*.

Une deuxième conséquence de la remarque faite plus haut est que parmi les conjointes d'un point et d'un cercle se trouve toujours la droite à l'infini du plan. L'autre conjointe, située à distance finie, est *l'axe radical du point et du cercle*, dont les propriétés sont bien connues.

On voit tout de suite que les conjointes du centre d'une ellipse

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (a > b)$$

et de cette courbe sont données par

$$y = \pm ab/c;$$

et celles du centre d'une hyperbole

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$

par

$$x = \pm ab/c$$

Dans le cas de l'ellipse, *les tangentes menées des extrémités du grand axe au cercle qui a pour diamètre le petit axe, coupent ce petit axe aux points par où passent les conjointes du centre, qui sont, d'ailleurs, parallèles au grand axe*. C'est la traduction de la formule

$$y = \pm ab/c.$$

2. L'importance de la considération des conjointes réside dans le théorème suivant :—

*Dans la transformation par polaires réciproques relativement à un cercle, les éléments corrélatifs des foyers d'une conique sont les conjointes du centre du cercle directeur (centre de la transformation) et de la conique corrélative.*

La démonstration de ce théorème est des plus simples. Les ombilics I et J étant situés sur la droite de l'infini, et les directions

isotropes  $OI$  et  $OJ$  ( $O$  est le centre de la transformation) étant rectangulaires, les ombilics  $I$  et  $J$  ont respectivement pour éléments corrélatifs les droites  $OJ$  et  $OI$ . Or, les foyers d'une conique  $K$  sont les points de rencontre réels des couples de tangentes menées à  $K$  par les ombilics  $I$  et  $J$ . Les éléments corrélatifs de ces foyers seront donc les cordes communes à la conique corrélatrice de  $K$  et au couple de droites  $OJ$  et  $OI$ , c'est-à-dire, les conjointes du centre  $O$  de la transformation, et de la conique corrélatrice de  $K$ .

A titre de corollaire immédiat de ce théorème on peut remarquer que si l'un des foyers de la conique  $K$  coïncide avec le centre  $O$  de la transformation, l'une des conjointes du point  $O$  et de la conique corrélatrice étant rejetée à l'infini, cette conique corrélatrice est un cercle, résultat bien connu dont on pénètre ainsi la raison intime.

Le théorème précédent permettra de transformer les propriétés des foyers des coniques en propriétés de conjointes, et *vice versa*. En particulier, on pourra considérer les systèmes de coniques ayant les mêmes cordes réelles communes avec un point donné, coniques qui pourront être dites *homoconjunctives* par rapport à ce point, et toutes leurs propriétés se déduiront corrélativement des propriétés bien connues des systèmes de coniques homofocales.

Mais ici nous nous attacherons surtout—c'est là le principal objet de ce petit Mémoire—à faire voir comment le théorème précédent peut être utilisé pour déduire les propriétés focales des coniques des propriétés tout élémentaires de l'axe radical d'un cercle et d'un point.

3. Soient  $C$  un cercle,  $O$  un point,  $f$  l'axe radical de ce cercle et de ce point (droite équidistante du point  $O$  et de la polaire de ce point relativement au cercle  $C$ ).<sup>\*</sup> Une transformation par polaires réciproques de centre  $O$  donne comme courbe corrélatrice du cercle  $C$  une conique  $K$ , qui est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que le point  $O$  est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle  $C$ . Mais, dans tous les cas, cette conique  $K$  a pour foyers le point  $O$  et le point  $F$  corrélatif de la droite  $f$ .

4. Joignons le point  $O$  à un point  $M$  pris sur le cercle  $C$ ; la tangente en  $M$  au cercle  $C$  coupe la droite  $f$  au point  $N$ ; tirons  $ON$  et menons  $O\mu$  parallèlement à  $MN$ .

---

\* Le lecteur est prié de faire les figures.

D'après une propriété fondamentale de l'axe radical  $f$  du point  $O$  et du cercle  $C$ , on a  $NO = NM$  ;

donc  $\angle NOM = \angle NMO$ , et  $\angle NOM = \angle MO\mu$ .\*

L'élément corrélatif du point  $M$  pris sur le cercle  $C$  est une tangente  $m$  à la conique  $K$  ; celui de la droite  $f$  est le foyer  $F$  de la conique  $K$ , l'autre foyer étant au point  $O$  ; celui de la tangente  $MN$  au cercle  $C$  est le point de contact  $P$  de la tangente  $m$  sur la conique  $K$  ; ceux des points  $N$  et  $\mu$  (ce dernier situé à l'infini dans la direction  $MN$ ) sont les rayons vecteurs  $PF$  et  $PO$ . La transformation de la propriété précédente montre donc que l'angle de  $PF$  avec la tangente  $m$  est égal à l'angle de  $m$  avec  $PO$ . On obtient ainsi cette propriété classique :—

*La tangente en un point d'une conique est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui unissent le point de contact aux foyers de la conique.*

5. Les polaires d'un point  $M$ , pris sur l'axe radical de deux cercles, relativement à ces deux cercles, se coupent sur leur axe radical, car elles sont elles-mêmes les axes radicaux du cercle de centre  $M$  orthogonal aux cercles donnés et de ces cercles. Lorsque l'un des cercles donnés se réduit à un point  $O$  cette propriété devient : si la polaire, relativement à un cercle  $C$  d'un point  $M$  pris sur l'axe radical d'un point  $O$  et de ce cercle  $C$  coupe cet axe radical au point  $M'$ , l'angle  $MOM'$  est droit. Transformant par polaires réciproques, on a ce théorème bien connu :—

*Le pôle d'une droite passant par le foyer  $F$  d'une conique, relativement à cette conique est sur la perpendiculaire élevée en  $F$  à cette droite.*

Ou bien :—

*La perpendiculaire menée par un foyer  $F$  d'une conique au rayon vecteur d'un point  $M$  de cette conique coupe la tangente en  $M$  sur la directrice relative au foyer  $F$ . †*

---

\* Une transformation homographique permet de déduire de là le théorème suivant :—*Les segments d'une tangente à une conique, compris entre le point de contact de cette tangente et ses intersections avec les conjointes d'un point par rapport à la conique, sont vus de ce point sous des angles égaux.*

† On peut aussi remarquer, en observant que l'élément corrélatif du centre d'un cercle  $C$  est la directrice de la conique corrélatrice  $K$  qui correspond au foyer confondu avec le centre  $O$  de la transformation, que cette propriété est également corrélatrice de celle-ci :—

*Toutes les normales à un cercle passent par le centre de ce cercle.*

6. Tout cercle dont le centre  $M$  est sur la droite  $f$  et qui passe par le point  $O$  coupe orthogonalement le cercle  $C$ , c'est-à-dire qu'il passe par les points de contact des tangentes menées de  $M$  au cercle  $C$ . La transformation par polaires réciproques de cette propriété montre que si  $F$  et  $F'$  sont les foyers d'une conique  $K$  et que  $MM'$  soit une corde de la conique passant par le foyer  $F$ , la parabole qui a  $F'$  pour foyer et  $MM'$  pour directrice est tangente aux tangentes menées à la conique  $K$  par les points  $M$  et  $M'$ . En outre, si  $\mu$  et  $\mu'$  sont les points de contact de ces tangentes et de la parabole les angles  $MF'\mu$  et  $M'F'\mu'$  sont droits. Donc, d'après le théorème qui termine le No. 5, les points  $\mu$  et  $\mu'$  appartiennent à la directrice de la conique  $K$  relative au foyer  $F'$ . On est ainsi conduit à ce théorème qui ne nous semble pas avoir été déjà remarqué.

*Une parabole qui a pour foyer un foyer  $F'$  d'une conique  $K$  et pour directrice une droite quelconque passant par l'autre foyer  $F$  de la conique  $K$  et coupant cette conique aux points  $M$  et  $M'$ , est tangente aux tangentes à la conique  $K$  menées par les points  $M$  et  $M'$ , la corde de contact étant la directrice de la conique  $K$  relative au foyer  $F'$ .*

7. Soient  $f$  et  $f_1$  les axes radicaux d'un point  $O$  et de deux cercles  $C$  et  $C_1$ . La perpendiculaire abaissée du point de rencontre de  $f$  et  $f_1$  sur la ligne des centres de  $C$  et  $C_1$  est l'axe radical de ces deux cercles. La transformation par polaires réciproques, le point  $O$  étant toujours pris pour centre de la transformation, donne ce théorème qui nous semble également nouveau :—

*Si deux coniques ont en commun un foyer  $O$ , ces coniques ont un pôle double réel qui est à la rencontre de la droite qui joint les autres foyers  $F$  et  $F_1$  et de la perpendiculaire élevée en  $O$  à la droite qui joint ce foyer au point de rencontre des directrices qui lui correspondent dans les deux coniques.*

8. Si  $t$  et  $t'$  sont les tangentes menées d'un point  $M$  à un cercle  $C$ , et que  $D$  soit un point pris sur la polaire du point  $M$  relativement au cercle  $C$ , la polaire  $d$  du point  $D$  passe par le point  $M$ , et les droites  $d$  et  $MD$  sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites  $t$  et  $t'$ .

Supposons alors que le point  $M$  se trouve sur l'axe radical  $f$  du point  $O$  et du cercle  $C$ , et que nous prenions pour point  $D$  le point de la polaire de  $M$  qui se trouve sur la polaire de  $O$ ; la droite  $d$  se confond alors avec  $MO$ . Soient  $T$  et  $T'$  les points de contact avec  $C$

des tangentes issues de  $M$  ; puisque  $MT = MT' = MO$ , si par le point  $O$  nous élevons à  $OT$  et à  $OT'$  les perpendiculaires  $ON$  et  $ON'$  qui coupent  $MT$  et  $MT'$  respectivement en  $N$  et en  $N'$ , nous avons  $TN = 2TM$ ,  $T'N' = 2T'M$  ; par suite, la droite  $NN'$  est symétrique de  $TT'$  par rapport à  $M$ , et si cette droite coupe  $MD$  en  $E$ ,  $OE$  est parallèle à  $f$ .

Cela posé, opérons une transformation par polaires réciproques de centre  $O$ . Au point  $M$  situé sur  $f$  correspond une droite passant par le foyer  $F$  de la conique  $K$  et coupant cette conique en deux points  $A$  et  $A'$ . Aux points  $N$  et  $N'$  correspondent les normales à la conique  $K$  en  $A$  et  $A'$ , normales qui se coupent en  $B$ . Au point  $E$  correspond la parallèle à l'axe focal de la conique  $K$ , menée par le point  $B$  ; si cette parallèle coupe  $AA'$  au point  $C$ , le point  $O$  est dès lors corrélatif de la droite  $ME$  ; mais nous venons de voir que la droite  $MD'$  est conjuguée harmonique de  $MO$  par rapport aux tangentes  $MT$  et  $MT'$  ; donc le point  $O$  est conjugué harmonique du point situé à l'infini sur  $AA'$  par rapport aux points  $A$  et  $A'$ , c'est-à-dire que le point  $M$  est le milieu de  $AA'$ , et nous obtenons ce théorème connu :—

*Si par le point de rencontre des normales à une conique menées par les extrémités d'une corde focale, on mène une parallèle à l'axe focal de cette conique, cette droite passe par le milieu de la corde focale considérée.*

9. Supposant toujours le point  $M$  situé sur l'axe radical  $f$  du point  $O$  et du cercle  $C$ , plaçons, maintenant, le point  $D$  à la rencontre de la polaire du point  $M$  relativement au cercle  $C$  et de la droite qui joint le centre de ce cercle au point  $O$ —c'est-à-dire, au pôle de la droite  $f$ . La droite  $d$  coïncide alors avec la droite  $f$ , et nous voyons que  $MD$  est conjuguée harmonique de  $f$  par rapport aux tangentes au cercle  $C$  issues de  $M$ , ou, si ces tangentes coupent en  $H$  et en  $H'$  la parallèle à  $f$  menée par  $D$ , que  $D$  est le milieu de  $HH'$ , et, par suite, que les angles  $HOD$  et  $DOH'$  sont égaux.

Transformons toujours par polaires réciproques :

Au pôle  $D$  de la droite  $f$  correspond la directrice de la conique  $K$  relative au foyer  $F$ . On a donc ce théorème connu :

*Si la corde  $AA'$  d'une conique passe par le foyer  $F$  de cette conique, les droites, qui joignent les extrémités  $A$  et  $A'$  de cette corde au point de rencontre de la directrice relative au foyer  $F$  et de l'axe focal, sont également inclinées sur cet axe.*

10. Considerons un cercle  $C$  de centre  $\Omega$  (fig. 82), un point  $O$  et

une droite  $d$  quelconque perpendiculaire à  $O\Omega$ . Joignons le point  $O$  à un point  $P$  mobile sur le cercle  $C$ ; menons  $OQ$  perpendiculaire à  $OP$  et  $QR$  parallèle à la tangente  $PT$  menée en  $P$  au cercle  $C$ , c'est-à-dire perpendiculaire à  $P\Omega$ . Nous avons

$$\angle OQR = \angle OP\Omega = \theta, \quad \angle OQH = \angle PO\Omega = \phi.$$

Donc, si nous abaissons du point  $O$  sur  $QR$  la perpendiculaire  $OR$ , nous avons

$$OR = OQ \sin \theta = OH \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = OH \frac{O\Omega}{P\Omega},$$

et comme  $OH$ ,  $O\Omega$  et  $P\Omega$  sont constants,  $OR$  est aussi constant; par suite, la droite  $QR$  enveloppe un cercle de centre  $O$ .

Transformons par polaires réciproques. Nous avons une conique  $K$  ayant un foyer au point  $O$ . Au point  $P$  correspond une tangente  $t$  à cette conique; à la droite  $d$ , un point  $\Delta$  de l'axe focal; au point  $Q$ , la perpendiculaire  $p$  abaissée de  $\Delta$  sur  $t$ ; à la droite  $QR$  qui joint le point  $Q$  au point situé à l'infini sur la tangente  $PT$  au cercle  $C$ , le point de rencontre de la droite  $p$  et du vecteur qui joint le foyer  $O$  au point de contact de la tangente  $t$  et de la conique  $K$ . D'ailleurs le cercle de centre  $O$  enveloppé par  $QR$  a pour corrélatif également un cercle de centre  $O$ . On a donc ce théorème connu:—

*Le lieu du point de rencontre du rayon vecteur qui unit un point  $M$  mobile sur une conique à l'un des foyers de cette conique et de la perpendiculaire abaissée d'un point  $\Delta$  de l'axe focal sur la tangente au point  $M$ , est un cercle ayant pour centre le foyer  $O$ .*

Si on prend pour point  $\Delta$  le second foyer  $F$  de la conique, on voit, en considérant le point  $M$  dans une position infiniment voisine de l'un des sommets de l'axe focal, que le rayon du cercle correspondant (cercle directeur) est égal à la longueur de cet axe. Rapprochant ce résultat du théorème obtenu au No. 4, on en déduit la propriété des rayons vecteurs dans les coniques.

11. Nous donnerons encore un exemple remarquable de la méthode que nous indiquons ici.

Supposons que le cercle  $C$  soit variable, mais ait constamment avec le point  $O$  même axe radical  $f$ . Considérons en outre un point fixe quelconque  $D$ . L'axe radical des points  $D$  et  $O$  considérés comme cercles de rayon nul est la perpendiculaire élevée à  $DO$  en son milieu. Cette droite coupe  $f$  en un point  $K$ , et l'axe radical du point  $D$  et du cercle  $C$  passe constamment par le point  $K$ .

Il en résulte que la polaire du point  $D$  relativement au cercle  $C$  passe constamment par le point  $D'$  symétrique du point  $D$  par rapport au point  $K$ , point situé à la rencontre de  $DK$  et de la perpendiculaire élevée en  $O$  à  $OD$ .

Passons à la figure corrélatrice. Aux différents cercles  $C$  correspondent des coniques ayant toutes un foyer au point  $O$  et un foyer au point  $F$ , c'est-à-dire des coniques *homofocales*, et si  $d$  est la droite corrélatrice du point  $D$ , nous voyons que les pôles de cette droite par rapport aux coniques du système sont situés sur une droite  $d'$ , la corrélatrice du point  $D'$ . Le point  $K$  a pour élément corrélatif la droite qui joint le point  $F$  au symétrique du point  $O$  par rapport à la droite  $d$ . Cette droite coupe la droite  $d$  en un point  $M$ , et puisque l'angle  $DOD'$  est droit, la droite  $d$  est la perpendiculaire élevée en  $M$  à la droite  $d'$ . De là ce théorème connu :—

*Les pôles d'une droite  $d$  relativement à un système de coniques homofocales sont situés sur la perpendiculaire menée à cette droite par le point où elle est coupée par la droite qui joint l'un des foyers au symétrique de l'autre par rapport à  $d$ .*

Remarquant que la droite  $d$  est tangente au point  $M$  à une conique ayant pour foyers  $F$  et  $O$ , on peut énoncer encore ce théorème de la manière que voici.

*Le lieu des pôles d'une droite  $d$  relativement à un système de coniques homofocales est la normale à celle de ces coniques qui touche la droite  $d$ , menée par le point de contact de cette conique et de cette droite.*

12. Nous nous bornerons aux exemples qui précèdent pour mettre en relief la fécondité de la méthode qui consiste à déduire les propriétés focales des coniques de la théorie des axes radicaux.

Pour terminer, nous ferons observer que réciproquement toute propriété des foyers conduit corrélativement à une propriété des conjointes d'un point et d'une conique, et, plus particulièrement, de l'axe radical d'un point et d'un cercle.

Exemple.—Prenons cette propriété connue : Soit  $MFM'$  une corde focale de l'ellipse dont le grand axe est  $AA'$  ; si l'on prolonge  $MA$  et  $M'A$  jusqu'à leurs points de rencontre  $Q$  et  $Q'$  avec la directrice qui correspond au foyer  $F$ , l'angle  $QFQ'$  est droit.\*

---

\* Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, T. II., 5<sup>e</sup> édit., p. 529, Ex. 916.



Appelons O le second foyer de la conique, et transformons par polaires réciproques en prenant le point O pour centre de la transformation. Nous obtenons ainsi ce théorème :—

Soient  $f$  l'axe radical d'un point O et d'un cercle C, et P le pôle de cet axe relativement au cercle C. Si les tangentes menées d'un point quelconque de  $f$  au cercle C coupent l'une des tangentes à ce cercle parallèles à  $f$  aux points I et I', et que les droites PI et PI' coupent la droite  $f$  aux points H et H', l'angle HOH' est droit.

### Note on the Kinematics of a Quadrilateral.

By R. J. DALLAS.

I send a note on the following problem, a solution of which was requested of me by one of the tutors at King's College, Cambridge.

We are given a quadrilateral of four jointed bars ABCD (fig. 83). The bar CD being held fast, find the tangent to the locus of P, the intersection of DA, CB in any position; and verify the following construction for the radius of curvature of the path of P :—

Let PQ be the third diagonal, draw through P a perpendicular to PQ meeting BA, CD in L and L'; through L and L' draw parallels to PQ meeting AD in M and M'; through M and M' draw perpendiculars to AD meeting the normal at P in O and O'; then will

$$-1/\rho = 1/OP + 2/O'P.$$

The first part of this is easily found. The important angles in the figure have been marked thus—

$$CPQ = \alpha, \quad DPQ = \beta, \quad AQP = \gamma, \quad DQP = \epsilon.$$

Making PD rock through a small angle  $\delta\theta$ , we have, if  $\delta s$  is the resulting element of arc traced out by P,

$$\delta s = PD\delta\theta \operatorname{cosec} TPD, \text{ and so also, if } \phi = \angle PCD,$$

$$\delta s = PC\delta\phi \operatorname{cosec} TPC.$$

Now  $\delta\phi/\delta\theta = QD/QC$  as is well known, (see Goodeve's *Elements of Mechanism* p. 110), and thus  $\frac{\sin TPC}{\sin TPD} = \frac{QD}{PC} \frac{PC}{QC}$ .

$$\text{Now} \quad \frac{QD}{PD} = \frac{\sin DPQ}{\sin PQD} \text{ and } \frac{PC}{QC} = \frac{\sin PQC}{\sin QPC},$$

$$\text{therefore} \quad \frac{\sin TPC}{\sin TPD} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \text{ and } TPC - TPD = \beta - \alpha;$$

$$\text{therefore} \quad TPC = \beta \text{ and } TPD = \alpha.$$