J. Austral. Math. Soc. (Series A) 31 (1981), 46–58

MESURES CONIQUES ET INTÉGRALE DE DANIELL

RICHARD BECKER

(Received 25 February 1980; revised 24 September 1980)

Communicated by R. O. Vyborny

Abstract

Let X be a weakly complete proper cone contained in a weak space E and $h(E)$ the Riesz space generated by the continuous linear forms on E. A positive conical measure μ on X is a positive linear form on $h(E)|_X$. G. Choquet has proved μ is a Daniell integral on E when E is weakly complete, but μ is not generally a Daniell integral on X. However we give an integration theory for functions on X and compare this theory with the classical Daniell theory. The case where μ is maximal in the sense of G. Choquet is remarkable.

1980 *Mathematics subject classification* (*Amer. Math. Soc.*): 28 A 25.

I. Préliminaires

1. *Notations et rappels*. L'expression "*E espace faible*" signifie que E est un espace vectoriel muni d'une topologie faible séparée; E' désigne le dual de E pour cette topologie; quelquefois, il pourra arriver qu'un même espace vectoriel E soit mis en dualité avec plus d'un s.e.v. de E^* (dual algébriqud de E): cela sera alors explicitement précisé.

On dit qu'un cóne convexe, contenu dans un espace faible E, est dans la classe $\mathcal{C}$ lorsque ce cône est une partie complète de E; $\mathfrak{S}$ désigne la classe des éléments saillants de $\mathcal{C}$.

Rappelons que, si V est un espace vectoriel ordonné, V^+ désigne le cône des éléments $\geqslant 0$ de V, et V_b^* le s.e.v. de V^* engendré par $(V^*)^+$.

Soit E espace faible; on note $h(E)$ l'espace vectoriel réticulé (e.v.r.) de fonctions définies sur E engendré par E', et $S(E)$, la famille des éléments convexes de $h(E)$.

https://doi.org/10.1017/S1446788700018474 Published online by Cambridge University Press

On pose $M(E) = h(E)_b^*$; les éléments de $M(E)$ sone appelés *mesures coniques sur E*. On dit que $\mu \in M^+(E)$ est portée par un cône $X \subset E$ lorsque ($f \in h(E)$ et $f|_X \geqslant 0$) entraine ($\mu(f) \geqslant 0$); $\mu(f)$ ne dépend alors que de $f|_X$. On dit que $\mu \in M(E)$ est portée par X si, et seulement si, μ^+ et μ^- sont portées par X.

Soient E espace faible, et $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; $\forall \mu \in M^+(E)$, lorsque μ est portée par X, il existe un élément $r(\mu) \in X$ tel que, $\forall l E'$, $\mu(l) = l(r(\mu))$ ([4], 30.7 proposition); on dit que $r(\mu)$ est la résultante de μ. On pose

$$K_\mu = (r(\lambda); \lambda \in M^+(E) \text{ avec } \lambda \leqslant \mu);$$

c'est une partie convexe et compacte de X ([4], 38.2 proposition).

Il existe un plus petit élément de $\mathcal{C}$ qui porte μ, à savoir $\overline{(\bigcup nK_\mu)}$ ([4], 38.5 corollaire).

Soient E espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\lambda, \mu \in M^+(E)$, λ et μ étant portées par X. On dit que λ est plus concentrée que μ, et on note $\lambda \prec \mu$ lorsque, $\forall f \in S(E)$, $\lambda(f) \leqslant \mu(f)$ (ordre de Choquet) ([4] 30.11). On appelle *mesure maximale sur* X toute mesure maximale pour cet ordre ([4] 30.13). Il est évident que s'il existe une mesure maximale sur X, alors $X \in \mathcal{S}$.

2. *Introduction*. G. Choquet ([4] 38.13) a démontré qu'un mesure conique $\mu \geqslant 0$ sur un espace E faiblement complet (i.e. $E \in \mathcal{C}$) était une intégrale de Daniell (i.e. $\forall (f_n) \in h(E)$, avec $f_n \downarrow 0$ sur E, on a $\mu(f_n) \to 0$).

Mais μ n'est pas nécessairement une intégrale de Daniell pour la convergence sur un cône $X \in \mathcal{C}$ qui porte μ (cf. n°8). Le problème se pose alors de tenter d'édifier une théorie de l'intégration pour une mesure conique $\geqslant 0$ portée par un cône donné de la classe $\mathcal{C}$, et de comparer cette théorie avec la théorie classique de Daniell.

3. *Plan*. Après ces quelques préliminaires (partie I), et étant donné un espace faible E, et $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, nous montrerons, dans la partie II, que, pour ainsi dire, la notion de mesure conique portée par X ne change pas lorsque l'on renforce la topologie de E en rajoutant à E' des éléments de E^* dont la restriction à X est continue.

Soient E espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\mu \in M^+(E)$ portée par X.

Nous définirons alors (partie III) l'analogue de l'intégrale supérieure de la théorie classique, pour des fonctions sous-linéaires et s.c.i., définies sur X (n°12); nous prouverons une propriété de continuité pour l'intégrale supérieure (n°17), grâce à un "lemme de Fatou conique" (n°9).

Nous introduirons un espace vectoriel réticulé $\Lambda^1(\mu)$ (n° 18) de fonctions sur K_μ contenant $h(E)$, sur lequel un prolongement de μ est défini grâce à l'intégrale supérieure, et nous comparerons $\Lambda^1(\mu)$ avec l'espace $L^1(\mu)$ déduit de μ et de

$h(E)$ à l'aide de la théorie classique de Daniell ($n°$ 21 et 23). Le cas où $X \in \mathfrak{S}$ et où μ est maximale est particulièrement intéressant ($n°$ 19).

Enfin dans la partie IV, nous prolongerons μ aux fonctions sous-linéaires définies sur X ($n°$ 25); on prouvera une propriété de continuité séquentielle de ce prolongement ($n°$ 29),

II. Une remarque concernant la définition des mesures coniques

Soit X un cône convexe contenu dans un espace vectoriel; on pose $E = X - X$, et on suppose que $X \in \mathcal{C}$ lorsque E est mis en dualité avec un certain espace vectoriel $F \subset E^*$. Il est bien connu ([2] chap. II, §3, p. 7) que $X \in \mathcal{C}$ lorsque E est mis en dualité avec l'espace vectoriel $\tilde{F}$ des éléments de E^* dont la restriction à X est continue, X étant muni de la trace de $\sigma(E, F)$.

A priori, les notions de mesure conique sur E portée par X lorsque E est muni de $\sigma(E, F)$, et lorsque E est muni de $\sigma(E, \tilde{F})$, sont différentes; nous allons voir qu'en fait il n'en est rien grâce aux propositions 4 et 5.

Nous noterons (E, F) ou $(E, \tilde{F})$ pour indiquer que E est muni de $\sigma(E, F)$ ou de $\sigma(E, \tilde{F})$; remarquons que tout élément de $M(E, \tilde{F})$ induit par restriction un élément de $M(E, F)$.

4. PROPOSITION. *Tout élément de $M(E, \tilde{F})$ porté par X est bien déterminé par sa restriction à $h(E, F)$.*

5. PROPOSITION. *Tout élément $\mu \in M(E, F)$ porté par X se prolonge univoquement en un élément $\mu \in M(E, \tilde{F})$ porté par X. L'application $\mu \to \tilde{\mu}$ est bijective linéaire, et positive.*

Ces deux propositions résultent du lemme suivant.

6. LEMME. *Soit $\mu \in M^+(E, F)$ portée par X; pour toute $f \in h(E, \tilde{F})$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $u, v \in h(E, f)$ tels que $u \leqslant f \leqslant v$ sur X et $\mu(v - u) < \varepsilon$.*

PREUVE. Il suffit de prouver le lemme avec f convexe. Si $f = \sup(f_i)$, $f_i \in \tilde{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, prenons $\forall i$, $u_i, v_i \in F$ tels que $\forall i$, $u_i \leqslant f_i \leqslant v_i$ sur X, et $v_i(r(\mu)) - u_i(r(\mu)) \leqslant \varepsilon/n$ de tels u_i, v_i existent, à cause du théorème de séparation de Hahn-Banach, appliqué dans l'espace $E \times R$ au convexe fermé $((x, k);\ x \in X, k \geqslant f_i(x))$ et au point

$$(r(\mu), f_i(r(\mu)) - \varepsilon/2n),$$

puis au convexe fermé $((x, k); x \in X, k \leqslant f_i(x))$ et au point

$$(r(\mu), f_i(r(\mu)) + \varepsilon/2n);$$

$$u = \sup(u_i) \qquad \text{et} \qquad v = \sup(v_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

répondent à la question puisque l'on a, sur X,

$$v - u \leqslant \sum_1^n (v_i - u_i).$$

7. Remarques.

1° Il résulte alors des deux propositions précédentes que les e.v.r. constitués par les éléments de $M(E, F)$ (resp. $M(E, \tilde{F})$) portés par X sont canoniquement isomorphes, ce qui justifie la notation $M(X)$. Pour exprimer ce fait nous dirons que, si $X \in \mathcal{C}$, $M(X)$ ne dépend que du cône X et de sa topologie.

2° Notons également que la notion d'ordre de Choquet sur $M^+(X)$, associée à $S(E, F)$, est la même que celle associée à $S(E, \tilde{F})$: étant donnés $f \in S(E, \tilde{F})$ et $\lambda, \mu \in M^+(X)$ avec $\lambda(g) \leqslant \mu(g)$, $\forall g \in S(E, F)$, il existe grâce à 6 une suite (f_n) de $S(E, F)$ avec $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ et $\mu(f_n) \to \mu(f)$. La notion d'ordre de Choquet, et donc aussi de mesure maximale, sur $M^+(X)$ ne dépend donc que du cône $X \in \mathcal{C}$ et de sa topologie; on notera $\max(X)$ l'ensemble des éléments maximaux de $M^+(X)$ pour cet ordre.

III. L'intégrale supérieure des fonctions sous-linéaires et s.c.i.

8. Exemples.

1° Soit $E = L^\infty$ (classes de fonctions mesurables bornées sur $[0, 1]$ muni de dx), muni de la topologie faible telle que $E' = L^1$, $X = E^+$, et μ la mesure maximale sur X qui représente la constante $1 \in X$. μ n'est pas de Daniell sur $h(E)|_X$:

$\forall k$ et n entiers avec $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, soit $e(k, n)$ le segment

$$[(k-1)/2^n, k/2^n] \quad \text{de } [0, 1];$$

soit $h_n \in h(E)$, définie par

$$\forall f \in L^\infty, \qquad h_n(f) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} \left(\int_{e(k,n)} f\, dx \right);$$

on a $h_n|_X \to 0$ en décroissant, et $\mu(h_n) = 1$, $\forall n$.

2° Le disque unité D, considéré comme partie de R^2 et le cercle unité U muni de la mesure de Haar, permettent de construire une mesure conique λ sur R^3, portée par un élément $X \in \mathfrak{S}$, telle que λ ne soit pas de Daniell sur $h(R^3)|_{K_\lambda}$:

Soit $X \subset R^3$ de cône de $\mathfrak{S}$ admettant $D \times 1$ pour base; on a $R^+ \cdot K_\lambda \setminus 0 = \mathring{X}$ (intérieur de X); noter qu'il existe une suite (f_n) de fonctions continues définies sur D telle que $f_n = 1$ sur U, et (f_n) décroit vers 0 sur

$$\mathring{D} = D \setminus U.$$

Soit $\mu \in M^+(X)$ avec $X \in \mathcal{C}$; nous allons chercher à prolonger μ à des fonctions définies sur X et positivement homogènes, mais non nécessairement continues. Pour cela, le lemme suivant, du genre Fatou, est fondamental:

9. Lemme. *Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, $\mu \in M^+(X)$, et $f \in h(E)$. Pour tout filtre $\mathfrak{F}$ sur $S(E)$ tel que en tout point de K_μ,*

$$f \leqslant \liminf(\mathfrak{F}),$$

on a

$$\mu(f) \leqslant \liminf(\mu(\mathfrak{F})).$$

Preuve. Soit X_l, $1 \leqslant i \leqslant n$, une famille de cônes polyédraux ([4], 20.1 définition) recouvrant X, telle que, $\forall i$, $\exists \tilde{f}_i \in E'$ avec $f|_{X_i} = (\tilde{f}_i)|_{X_i}$; une telle famille existe ([4], 30.2 proposition).

$\forall i$, $\exists \mu_i \in M^+(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, avec $\mu = \sum \mu_i$; soit $x_i = r(\mu_i)$; on a

$$x_i \in X_i \cap K_\mu.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists F_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ tel que $g(x_i) \geqslant f(x_i) - \varepsilon/n$ pour tout i, et $\forall g \in F_\varepsilon$. D'après le théorème de Hahn-Banach, $\forall h \in S(E)$, on a:

$$\mu(h) = \sum \mu_i(h) \geqslant \sum h(x_i),$$

et $\forall g \in F_\varepsilon$

$$\mu(g) \geqslant \sum f(x_i) - \varepsilon = \mu(f) - \varepsilon;$$

d'où le lemme.

10. Notation. Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; on note $C_i(X)$ la famille des fonctions sous-linéaires et s.c.i., définies sur X et à valeurs dans $R \cup (+\infty)$.

Cette famille est stable par sup quelconque et par multiplication par $\lambda \geqslant 0$. Remarquons que $C_i(X)$ ne dépend que du cône X et de sa topologie.

Nous aurons également besoin de la remarque suivante.

11. Proposition. *Soit E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$; toute*

$$f \in C_i(X)$$

est limite filtrante croissante sur X d'éléments de $S(E)$.

Preuve. Remarquons que, dans l'espace produit $E \times R$, le sur-graphe G de f $(G = ((x, \lambda);\ x \in X \text{ et } \lambda \geqslant f(x)))$ est un cône convexe fermé. Si $x \in X$ est tel que $f(x) < +\infty$, il suffit de séparer strictement G et $(x, f(x) - \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, par un hyperplan fermé, à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

Si $f(x) = +\infty$, on séparera strictement G et le segment ayant pour extrémités $(0, -1)$ et (x, k) pour tout $k \in R$.

12. Définition. Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et $\mu \in M^+(X)$; pour toute $f \in C_i(X)$, on pose

$$\mu^*(f) = \sup(\mu(g); g \in S(E) \text{ et } g \leqslant f \text{ sur } X).$$

On a $\mu^*(\lambda f) = \lambda\mu^*(f)$, $\forall \lambda > 0$. Notons que $\mu^*(f) \in R \subset (+\infty)$.

Grâce à la proposition suivante, qui résulte du Lemme 9, l'application μ^* ne dépend que du cône X et de sa topologie.

13. Proposition. *Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$, et*

$$\mu \in M^+(X).$$

Pour toute $f \in C_i(X)$ et tout filtre $\mathcal{F}$ sur $S(E)$, admettant une partie formée d'éléments $\leqslant f$ sur K_μ, et tel que $\mathcal{F} \to f$ sur K_μ, on a

$$\mu^*(f) = \lim(\mu(\mathcal{F})).$$

14. Corollaire. *$\forall f, g \in C_i(X)$, on a*

$$(f \leqslant g \text{ sur } K_\mu) \Rightarrow (\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)).$$

$\forall f, g \in C_i(X)$, on a

$$\mu^*(f + g) = \mu^*(f) + \mu^*(g).$$

$\forall \mu, \nu \in M^+(X)$, on a

$$(\mu + \nu)(\overset{*}{f}) = \mu(\overset{*}{f}) + \nu(\overset{*}{f}), \qquad \forall f \in C_i(X).$$

Pour toute famille f_i d'éléments $\geqslant 0$ de $C_i(X)$, on a $\mu^*(\Sigma f_i) = \Sigma \mu^*(f_i)$.

15. Notations. Soient E un espace faible, et $\mu \in M^+(E)$; on note $C_i(\mu)$ la famille des fonctions sous-linéaires et s.c.i., définies sur $R^+ \cdot K_\mu$, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, minorées par un élément (non fixé) de E'. Comme $\forall X \in \mathcal{C}$, tel que $X \subset E$ et $\mu \in M^+(X)$, tout élément de $C_i(\mu)$ est la restriction à $R^+ \cdot K_\mu$ d'un élément de $C_i(X)$, on peut donc parler, $\forall f \in C_i(\mu)$, par abus de langage, de $\mu^*(f)$.

Soit $C_i^1(\mu) = (f; f \in C_i(\mu) \text{ et } \mu^*(f) < \infty)$.

16. Proposition. *Soit $f \in C_i^1(\mu)$; $\forall x \in K_\mu$, on a $f(x) \leqslant \mu^*(f)$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 13.

https://doi.org/10.1017/S1446788700018474 Published online by Cambridge University Press

17. PROPOSITION. *Soient E un espace faible, $X \in \mathcal{C}$ avec $X \subset E$ et*
$$\mu \in M^+(X);$$
soient $f \in C_i(\mu)$ et $f_1 \in C_i^1(\mu)$; pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur $C_i(\mu)$ tel que, en tout point de K_μ, $f - f_1 \leqslant \liminf(\mathcal{F})$, on a
$$\mu^*(f) - \mu^*(f_1) \leqslant \liminf(\mu^*(\mathcal{F})).$$

PREUVE. En raisonnant sur f et sur le filtre $(\mathcal{F} + f_1) = (F;\ \exists \tilde{F} \in \mathcal{F}$ avec $F = \tilde{F} + f_1)$, on voit, grâce au Corollaire 14, qu'il suffit de démontrer le résultat de l'énoncé avec $f_1 = 0$; de plus, d'après la définition 12, il suffit d'envisager le cas où $f \in h(E)$.

Cela étant, la démonstration s'effectue exactement comme au Lemme 9, en tenant compte du Corollaire 14 et de la Proposition 16:

Soit (μ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, une famille finie d'éléments de $M^+(E)$ telle que, en posant $x_i = r(\mu_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait
$$\mu = \sum \mu_i \qquad \text{et} \qquad \mu_i(f) = f(x_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \text{ (cf. } n^\circ \text{ 9)};$$
$\forall g \in C_i(\mu)$, on a (cf. n° 14) $\mu^*(g) = \sum \mu_i^*(g)$, d'où
$$\mu^*(g) \geqslant \sum g(x_i) \quad (\text{cf. } n^\circ \text{ 16}).$$
$\forall \varepsilon > 0$ donné, $\exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tel que $\forall g \in F_\varepsilon$, $g(x_i) \geqslant f(x_i) - \varepsilon/n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où $\mu^*(g) \geqslant \mu(f) - \varepsilon$.

18. DÉFINITION. Soient E un espace faible, et $\mu \in M^+(E)$; on pose
$$\Lambda^1(\mu) = C_i^1(\mu) - C_i^1(\mu);$$
c'est un e.v.r. de fonctions sur $R^+ \cdot K_\mu$; l'application μ^* se prolonge canoniquement, grâce au Corollaire 14, en un élément $\geqslant 0$ de $\Lambda^1(\mu)^*$, noté encore μ^*. On munit $\Lambda^1(\mu)$ de la semi-norme $p(f) = \mu^*(|f|)$. Notons que $p(|f|) = p(f)$ et que, $\forall f, g \geqslant 0$ dans $\Lambda^1(\mu)$, on a $p(f + g) = p(f) + p(g)$.

19. PROPOSITION. *Soient $X \in \mathcal{C}$ et $\mu \in \max(X)$; alors $\Lambda^1(\mu)$ muni de $p(f)$ est un espace complet.*

(La réciproque est fausse; prendre une somme finie de mesures coniques ponctuelles.)

PREUVE. Comme $h(E)$ est partout dense dans $\Lambda^1(\mu)$, il suffit de prouver que, pour toute suite (h_n) de $h(E)$ avec $p(h_n) < 1/2^n$, $\forall n$, la série $\sum h_n$ converge: soit $h_n = h_n^+ - h_n^-$; prouvons la convergence de $\sum h_n^+$: μ étant maximale, on a $p(h_n^+ - \check{h}_n^+) = 0$ (Si $f \in h(E)$, $\check{f}$ désigne le plus grand élément de $C_i(X)$ tel que $\check{f} \leqslant f|_X$); or $\sum \check{h}_n^+ \in C_i(X)$; de plus (cf. n° 14)
$$\mu^*\left(\sum \check{h}_n^+\right) = \sum \mu^*(\check{h}_n^+) = \sum \mu^*(h_n^+) < \sum 1/2^n,$$

https://doi.org/10.1017/S1446788700018474 Published online by Cambridge University Press

d'où $\sum \check{h}_n^+ \in C_i^1(\mu)$; $\forall k$ entier, on a

$$p\left(\sum \check{h}_n^+ - \sum_1^k \check{h}_n^+\right) = \mu^*\left(\sum_{k+1}^{\infty} \check{h}_n^+\right) < 1/2^k;$$

il y a donc convergence de $\sum h_n^+$ vers $\sum \check{h}_n^+$ au sens de p.

20. Remarque. Munissons $\Lambda^1(\mu)$ de la semi-norme N, définie par $N(f) = \inf(\mu^*(f_1) + \mu^*(f_2);\ f_1, f_2 \in C_i^1(\mu),\ f_1, f_2 \geq 0$ et $f = f_1 - f_2)$; on démontrerait que $\Lambda^1(\mu)$, muni de N, est un Banach.

Soient E un espace faiblement complet, $X \subset E$ avec $X \in \mathcal{C}$, et $\mu \in M^+(X)$; μ étant de Daniell sur $h(E)$ ([4] 38.13), on peut développer la théorie de l'intégrale de Daniell ([1] et [5] §61), et chercher à comparer cette théorie avec ce qui précède.

Notons que la fonction φ_X, définie sur E, valant 0 sur X et $+\infty$ ailleurs, est dans $C_i(E)$, et que $\mu^*(\varphi_X|_X) = 0$.

21. Proposition. *Lorsque φ_X est μ-intégrable pour la théorie de Daniell, alors μ est de Daniell sur $h(E)|_X$. De plus, lorsque $X \in \mathfrak{S}$, E est isomorphe à R^N.*

Preuve. Lorsque φ_X est μ-intégrable pour la théorie de Daniell, alors l'ensemble $(E \setminus X)$, où $\varphi_X = \infty$, est μ-négligeable au sens de ([1] 6, et [5] §61); on a donc ([1] 7, et [5] §61) pour toute suite (f_n) de $h(E)$ qui $\to 0$ en décroissant, sauf peut-être sur $(E \setminus X)$, $\mu(f_n) \to 0$, ce qui est le résultat cherché.

Toute fonction μ-intégrable pour la théorie de Daniell est nulle sur un s.e.v. de E de codimension dénombrable, et donc au moins sur une droite de E lorsque E n'est pas isomorphe à R^N; dans ce cas, φ_X ne peut pas être μ-intégrable si $X \in \mathfrak{S}$, car alors X contiendrait une droite sur laquelle φ_X serait nulle.

Nous allons voir que $\Lambda^1(\mu)$ peut être regardé comme un sous-espace vectoriel réticulé de $L^1(\mu)$ (espace classique déduit de $h(E)$ et de μ à l'aide de la théorie de Daniell, où deux éléments f et g tels que $\mu(|f - g|) = 0$ sont identifiés). Nous dirons que $f, g \in \Lambda^1(\mu)$ sont *μ-équivalents* lorsque

$$\mu^*(|f - g|) = 0.$$

22. Proposition. $\forall f \in C_i^1(\mu)$ *la famille des fonctions de $C_i^1(\mu)$, μ-équivalentes à f, admet un plus grand élément pour l'ordre usuel des fonctions.*

Preuve. D'après la Proposition 17, il suffit de prouver que ($u, v \in C_i^1(\mu)$ avec u, v μ-équivalentes à f) $\Rightarrow$ ($\sup(u, v)$ μ-équivalente à f). Or on a

$$u + v = \sup(u, v) + \inf(u, v) \geq \sup(u, v) + w,$$

où w est l'élément de $C_i^1(\mu)$ ainsi obtenu: on se place dans $E \times R$; soit $\Gamma_\mu = (R^+ \cdot K_\mu) \times R$ et Γ_f le sur-graphe de f;

$$\Gamma_f = \big((x, \lambda);\, x \in R^+ \cdot K_\mu \text{ et } \lambda \geqslant f(x)\big);$$

Γ_u, Γ_v et Γ_f sont trois sous-cônes convexes, fermés, relatifs de Γ_μ, et on a $\Gamma_u + \Gamma_v \subset \Gamma_f$; w sera caractérisée par

$$\Gamma_w = \big(\overline{\Gamma_u + \Gamma_v}\big) \cap \Gamma_\mu;$$

comme $f \in C_i^1(\mu)$, on a $f \leqslant w$ puisque $\Gamma_w \subset \Gamma_f$; et on a $f \in C_i^1(\mu)$; comme aussi $w \leqslant u$ et $w \leqslant v$, on a $\mu^*(w) = \mu^*(f)$.

On a donc $\mu^*(u) + \mu^*(v) \geqslant \mu^*(\sup(u, v)) + \mu^*(w)$; d'où

$$2\mu^*(f) \geqslant \mu^*(\sup(u, v)) + \mu^*(f),$$

soit $\mu^*(\sup(u, v)) = \mu^*(f)$ puisque $\sup(u, v) \geqslant f$.

La proposition suivante explicite la comparaison de $\Lambda^1(\mu)$ et de $L^1(\mu)$.

23. Proposition. *Il existe une injection canonique de $\Lambda^1(\mu)$, modulo la μ-équivalence, dans $L^1(\mu)$. Plus précisément:*

1° *Soit $f = C - C'$ avec $C, C' \in C_i^1(\mu)$; soient (C_n) et (C_n') deux suites croissantes de $S(E)$ telles que $C_n \leqslant C$, $C_n' \leqslant C'$ sur K_μ, et*

$$\mu(C_n) \to \mu^*(C), \qquad \mu(C_n') \to \mu^*(C').$$

A la classe de f dans $\Lambda^1(\mu)$ correspond la classe de $\lim(C_n) - \lim(C_n')$ *dans* $L^1(\mu)$.

2° *Réciproquement, soient (C_n) et (C_n') deux suites croissantes de $S(E)$ telles que* $\lim(C_n) < \infty$ *et* $\lim(C_n') < \infty$. *Soit g une fonction sur E telle que $g =$* $\lim(C_n) - \lim(C_n')$ *en tout point où ces limites sont $< \infty$. La classe de g (qui est dans $L^1(\mu)$) est l'image de la classe dans $\Lambda^1(\mu)$ de la restriction de g à $R^+ \cdot K$.*

Preuve. On utilisera l'abréviation L pour "limite", dans les formules.

Pour le 1°, il faut vérifier que $\forall S, S' \in C_i^1(\mu)$ et $\forall (S_n), (S_n')$, suites croissantes de $S(E)$ telles que $S_n \leqslant S$, $S_n' \leqslant S'$ sur K_μ, et

$$\mu(S_n) \to \mu^*(S), \qquad \mu(S_n') \to \mu^*(S'),$$

on a

$$\begin{aligned}&(f \text{ et } S - S' \text{ sont } \mu\text{-équivalentes dans } \Lambda^1(\mu))\\ &\qquad \Rightarrow \big(L(C_n) - L(C_n') \text{ et } L(S_n) - L(S_n') \text{ sont égales dans } L^1(\mu)\big).\end{aligned}$$

Par abus de langage, on notera encore μ le prolongement canonique de μ à

https://doi.org/10.1017/S1446788700018474 Published online by Cambridge University Press

$L^1(\mu)$; on a alors

$$\begin{aligned}\mu(|(L(C_n) - L(C_n')) - (L(S_n) - L(S_n'))|) \\ &= 2\mu(\sup(L(C_n) + L(S_n'), L(C_n') + L(S_n))) \\ &\quad - \mu(L(C_n) + L(S_n') + L(C_n') + L(S_n)) \\ &= \lim(2\mu(\sup(C_n + S_n', C_n' + S_n)) - \mu(C_n + S_n' + C_n' + S_n)) \\ &= 2\mu^*\big(\sup(L(C_n) + L(S_n'), L(C_n') + L(S_n))|_{R^+\cdot K_\mu}\big) \\ &\quad - \mu^*\big((L(C_n) + L(S_n') + L(C_n') + L(S_n))|_{R^+\cdot K_\mu}\big).\end{aligned}$$

Pour prouver que la première partie de l'expression précédente vaut

$$2\mu^*(\sup(C + S', C' + S)),$$

il suffit d'utiliser la Proposition 13 et la remarque suivante:

$\forall A, B, a, b \in C_i^1(\mu)$ avec $a \leqslant A$, $b \leqslant B$ et $\mu^*(a) = \mu^*(A)$, $\mu^*(b) = \mu^*(B)$, on a,

$$\mu^*(\sup(A, B)) = \mu^*(\sup(a, b)),$$

car $\sup(A, B) - \sup(a, b) \leqslant (A - a) + (B - b)$.

Pour achever de prouver ce 1°, il suffit de remarquer que l'on a

$$0 = \mu^*(|(C - C') - (S - S')|) = 2\mu^*(\sup(C + S', C' + S)) - \mu^*(C + S' + C' + S).$$

Le 2° est évident, une fois prouvé 1°.

IV. L'intégrale supérieure des fonctions sous-linéaires

24. Notations. Soient E un espace faiblement complet, $\mu \in M^+(E)$, $X \subset E$ tel que $X \in \mathcal{C}$, et $\mu \in M^+(X)$. Dans tout ce qui suit, Y désignera un cône convexe de E tel que:

1° $K_\mu \subset Y \subset X$.

2° Y est une partie héréditaire de X pour le préordre induit par X. C_Y désignera la famille des fonctions sous-linéaires, définies sur Y, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, minorées par un élément (non fixé) de E'.

25. Définition. $\forall f \in C_Y$, on pose

$$\mu_Y^*(f) = \inf(\mu^*(g);\ g \in C_i(X) \text{ et } f \leqslant g \text{ sur } Y).$$

Cette définition a toujours un sens, car la fonction valant $+\infty$ sur $X \setminus 0$, et 0 en 0, est dans $C_i(X)$ et majore tous les éléments de C_Y; on a

$$\mu_Y^*(f) \in R \cup (+\infty),$$

car f est minoré par un élément de E' sur Y.

μ_Y^* ne dépend que du cône X et de sa topologie, μ et Y étant fixés, mais μ_Y^* ne dépend pas du cône X, E, E', μ et Y êtant fixés, vérifiant les conditions de 24.

26. EXEMPLES (éclairant la définition 25).

1° (Notations de 8, 2°) Soit f une fonction affine, défine sur $R^+ \cdot K_\lambda$, telle que $f \geqslant 1$ sur $\mathring{D} \times 1$; on a $\lambda_X^*(f) > 0$. Or, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une suite (f_n) de $-S(R^3)$, $\geqslant 0$ et croissant vers f sur K_λ, telle que $\lambda(f_n) \leqslant \varepsilon$, $\forall n$.

Il suffit de construire les restrictions des f_n à $D \times 1$: soit φ une fonction affine > 0 sur D; $\forall \varepsilon > 0$, construisons une suite croissante (φ_n) de fonctions de $-S(R^2)$ telle que $0 \leqslant \varphi_n \leqslant \varepsilon$ sur U et $\varphi_n \to \varphi$ sur $\mathring{D} = D \setminus U$. Soit (g_n) une suite auxiliaire de fonctions concave continues sur D telle que (g_n) soit croissante, $g_n < \varphi$ partout sur D, $g_n = 0$ sur U, et $g_n \to \varphi$ sur $\mathring{D}$; on prendra $\varphi_1 \in -S(R^2)$ telle que $g_1 \leqslant \varphi_1 < \varphi$ sur D, et $\varphi_1 \leqslant \varepsilon/2$ sur U; soit $\hat{g}_2$ la plus petite fonction concave et s.c.s. définie sur D, telle que $\hat{g}_2 \geqslant g_2$, et φ_1; on a $\hat{g}_2 < \varphi$ sur D, et $\hat{g}_2 = \varphi_1$ sur U, car dans $D \times R^+$, le sous-graphe de $\hat{g}_2$, $((x, t);\ x \in D$ et $0 \leqslant t \leqslant \hat{g}_2(x))$, est l'enveloppe convexe des sous-graphes de g_2 et φ_1; comme $\hat{g}_2|_U = \varphi_1|_U$ est continue, $\exists \varphi_2 \in -S(R^2)$ telle que $\hat{g}_2 \leqslant \varphi_2 < \varphi$ sur D, et $\varphi_2 \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/4$ sur U.

Supposons construits les $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in -S(R^2)$ tels que $\varphi_i \leqslant \varphi_j$, pour $1 \leqslant i \leqslant j < n$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varphi > \varphi_i \geqslant g_i$ sur D, et $0 \leqslant \varphi_i \leqslant \varepsilon/2 + \cdots + \varepsilon/2^i$ sur U: construisons φ_{n+1}: soit $\hat{g}_{n+1}$ la plus petite fonction concave et s.c.s. sur D telle que $\hat{g}_{n+1} \geqslant g_{n+1}$ et φ_n; on a, comme pour $\hat{g}_2$, $\hat{g}_{n+1} < \varphi$ sur D, et $\hat{g}_{n+1} = \varphi_n$ sur U; donc $\exists \varphi_{n+1} \in -S(R^2)$ telle que $\hat{g}_{n+1} \leqslant \varphi_{n+1} < \varphi$ sur D, et $\varphi_{n+1} \leqslant \varepsilon/2 + \cdots + \varepsilon/2^{n+1}$ sur U. Il est clair que (φ_n), ainsi construite, va être une suite de $-S(R^2)$ telle que $0 \leqslant \varphi_n \leqslant \varepsilon$ sur U, et (φ_n) croît vers φ sur $\mathring{D}$.

2° Il existe un convexe compact mêtrisable X, que l'on considèrera comme la base d'un cône localement compact, une fonction f convexe et borélienne définie sur X, une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ dont le support contient $\mathcal{E}(X)$ (ensemble des points extrémaux de X), de sorte que $\mu(f) < \inf(\mu(g);\ g \geqslant f,\ g$ convexe s.c.i. sur $X)$: on prendra pour X l'ensemble des mesures de Radon $\geqslant 0$ et de masse 1 sur $[0, 1]$, pour μ la mesure maximale sur X représentant l'élément $(dx) \in X$, et pour f l'application définie par $\forall m \in X$, $f(m) = m_d(1)$ (m_d: partie diffuse de m), on a $\mu(f) = 0$, et $f(r(\mu)) = 1$; on voit que f est borélienne en notant que, $\forall k \in R$,

$$\begin{aligned}
&(m;\ m \in X \text{ et } 1 - f(m) > k)\\
&\quad = \bigcup_{p \in N, q \in N} \left(m;\ \exists x_1, \ldots, x_p \in [0, 1] \text{ et } \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geqslant 0 \right.\\
&\qquad\qquad \left. \text{tels que } m \geqslant \sum_1^p \alpha_i \delta_{x_i} \text{ et } \sum_1^q \alpha_i \geqslant k + 1/q \right)\\
&\quad = \bigcup_{p \in N, q \in N} K_{p,q},
\end{aligned}$$

car chaque $K_{p,q}$ est une partie compacte de X.

f convient grâce à la Proposition 16.

27. PROPOSITION. $\forall f, g \in C_Y, (f \leqslant g) \Rightarrow \mu_Y^*(f) \leqslant \mu_Y^*(g)$.
$\forall f, g \in C_Y$, on a $\mu_Y^*(f + g) \leqslant \mu_Y^*(f) + \mu_Y^*(g)$.
$\forall f \in C_Y$ et $\forall \lambda > 0$, on a $\mu^*(\lambda f) = \lambda \mu_Y^*(f)$.

28. PROPOSITION. *Soient $\lambda, \mu \in M^+(X)$ avec $X \in \mathfrak{S}$, et $(K_\lambda \cup K_\mu) \subset Y$; on a* $(\lambda + \mu)_Y^* = \lambda_Y^* + \mu_Y^*$.

PREUVE. Il est évident que $(\lambda + \mu)_Y^* \geqslant \lambda_Y^* + \mu_Y^*$ à cause du Corollaire 14. Soit $f \in C_Y$; il suffit d'envisager le cas où $\lambda_Y^*(f) + \mu_Y^*(f) < \infty$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u, v \in C_i(X)$$

avec $f \leqslant u$ et v sur Y, et avec $\lambda^*(u) \leqslant \lambda_Y^*(f) + \varepsilon$, $\mu^*(v) \leqslant \mu_Y^*(f) + \varepsilon$. Il suffit alors de trouver $w \in C_i(X)$ avec $f \leqslant w \leqslant u$ et v sur Y; déterminons w à l'aide de son sur-graphe Γ_w dans $X \times R$: rappelons que le sur-graphe Γ_u de u dans $X \times R$ est défini par $((x, k);\ x \in X$ et $f(x) \leqslant k)$; on a Γ_u et $\Gamma_v \in \mathfrak{S}$; Γ_u et Γ_v sont contenus dans un même cône de $\mathfrak{S}$ ([3] chap. II, §6 *n*° 8, lemme 1 et prop. 11); w sera caractérisée par $\Gamma_w = \Gamma_u + \Gamma_v$; on a donc $\Gamma_w \in \mathfrak{S}$ ([3] chap. II, §6 *n*° 8, prop. 11) et $w \in C_i(X)$; de plus, comme Y est une partie héréditaire de X pour le préordre défini par X, la fonction w est $\geqslant f$ sur Y. w est bien l'élément cherché.

Comme nous ne considérerons plus qu'une seule mesure conique μ, on peut supposer que $X = \overline{R^+ \cdot K_\mu}$, car alors $X \in \mathcal{C}$, et X porte μ ([4] 38.5).

29. LEMME. *Lorsque $X \in \mathfrak{S}$, pour toute suite croissante (f_n) d'éléments de C_Y, on a*

$$\mu_Y^*(\lim(f_n)) = \lim(\mu_Y^*(f_n)).$$

PREUVE. Il est clair que $\mu_Y^*(\lim(f_n)) \geqslant \lim(\mu_Y^*(f_n))$; de plus si $\lim(\mu_Y^*(f)) = +\infty$, le résultat est évident. Supposons donc $\lim(\mu_Y^*(f_n)) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$; $\forall n \geqslant 1, \exists h_n \in C_i(X)$ telle que $f_n \leqslant h_n$ sur Y, et $\mu^*(h_n) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon/2^n$; posons $g_n = \sup(h_1, h_2, \ldots, h_n)$; on a $g_n \in C_i(X)$, $f_n \leqslant g_n$ sur Y, et (g_n) est une suite croissante; montrons que $\forall n \geqslant 1$,

$$\mu^*(g_n) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n).$$

Une fois prouvée cette inégalité, on en déduit que, $\forall n \geqslant 1$,

$$\mu^*(g_n) \leqslant \lim(\mu_Y^*(f_n)) + \varepsilon,$$

et en posant $g_0 = \lim(g_n)$, on a, comme (g_n) est une suite croissante et grâce à la Proposition 17,

$$\mu^*(g_0) \leqslant \lim(\mu_Y^*(f_n)) + \varepsilon;$$

d'où le lemme, car on a, sur Y, $g_0 \geqslant \lim(f_n)$ et $g_0 \in C_i(X)$.

Pour prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $\mu^*(g_n) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n)$, on procède par récurrence; le cas $n = 1$ étant évident, supposons l'inégalité établie pour l'entier n; on a

$$g_{n+1} = \sup(g_n, h_{n+1});$$

soit φ l'élément de $C_i(X)$ dont le sur-graphe Γ_φ est l'enveloppe convexe des sur-graphes Γ_g et Γ_h de g_n et de h_{n+1} (φ existe grâce à des arguments déjà invoqués en 28: Γ_g et Γ_h sont contenus dans un même cône de $\mathfrak{S}$, et $\Gamma_\varphi = \Gamma_g + \Gamma_h \in \mathfrak{S}$). Comme Y est une partie héréditaire de X, pour le préordre défini par X, on a $\varphi \geqslant f_n$ sur Y, et $g_{n+1} + \varphi \leqslant g_n + h_{n+1}$; d'où:

$$\mu^*(\varphi) + \mu^*(g_{n+1}) \leqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1})$$

et

$$\mu_Y^*(f_n) + \mu^*(g_{n+1}) \leqslant \mu_Y^*(f_n) + \varepsilon(1 - (1/2^n)) + \mu_Y^*(f_{n+1}) + \varepsilon/2^{n+1};$$

ce qui est l'inégalité visée.

30. Remarque. Dans 28, 29, on peut éviter de supposer que $X \in \mathfrak{S}$, mais il feut alors supposer que les adhérences des graphes des fonctions considérées ne contiennent pas de droite: cela permet en effet d'utiliser, dans les preuves, des sur-graphes de fonctions qui sont des cônes de $\mathfrak{S}$.

Bibliographie

[1] R. Becker, 'Mesures coniques et intégrale de Daniell', *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **283**, 1976, p. 611–614.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. 1 et 4, Nouvelle édition (Hermann, Paris, 1971).

[3] ______, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. 1 et 2, 2e édition (Hermann, Paris, 1963) (Acta. scient. et ind., 1189 a; Bourbaki, 15).

[4] G. Choquet, *Lectures on analysis*, vol. 1–3. (New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 Mathematics Lecture Note Series).

[5] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionelle*, 5e édition. (Paris, Gauthier-Villars, 1968).

Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 Paris Cedex 05
France