# Note sur un Problème de Géométrie,

par Ed. Collignon,

*Inspecteur Général des ponts et chaussées, à Paris.*

Etant donne un triangle OAB, on demande de mener par le sommet O une droite OM telle qu' en abaissant les perpendiculaires A$a$, B$b$ sur cette droite, les surfaces des triangles OA$a$, OB$b$ soient entre elles dans un rapport $r$ donné, c'est-à-dire qu'on ait la relation

$$r = \frac{\text{Surf. OA}a}{\text{Surf. OB}b}.$$

## Solution analytique.

Figure 8.

Prenons pour axe des abscisses OX une parallèle menée par le sommet O à la base AB; et pour axe OY la hauteur OH perpendiculaire à cette base indéfiniment prolongée.

Soit $\mathrm{OH} = h$ la distance des deux parallèles AB, OX; $h$ sera l'ordonnée commune aux points A et B. Soient $\mathrm{HA} = p$ $\mathrm{HB} = q$ leurs abscisses respectives.

Soit $y = \lambda x$ l'équation de la droite cherchée OM. L'inconnue de la question sera le coefficient $\lambda$.

Les droites A$a$, B$b$ auront pour équations

$$\mathrm{A}a \qquad y - h = -\frac{1}{\lambda}(x - p),$$

$$\mathrm{B}b \qquad y - h = -\frac{1}{\lambda}(x - q).$$

Les segments A$a$, B$b$, O$a$, O$b$ seront donnés en valeur absolue par les relations

$$\mathrm{A}a = \frac{h - \lambda p}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \qquad \mathrm{B}b = \frac{h - \lambda q}{\sqrt{1 + \lambda^2}},$$

$$\mathrm{O}a = \frac{h\lambda + p}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \qquad \mathrm{O}b = \frac{h\lambda + q}{\sqrt{1 + \lambda^2}},$$

dans lesquelles les seconds membres doivent être pris positivement ; et l'on aura pour déterminer $\lambda$ l'équation du second degré

$$(1) \qquad r = \frac{\mathrm{A}a \times \mathrm{O}a}{\mathrm{B}b \times \mathrm{O}b} = \frac{(h - \lambda p)(p + \lambda h)}{(h - \lambda q)(q + \lambda h)},$$

où l'on peut convenir de prendre en valeur absolue chacun des facteurs du second membre. Mais il paraît préférable d' attribuer au rapport $r$ le signe que lui assigne l'équation (1) elle-même, en laissant à chaque facteur son signe particulier. Cela revient à admettre pour le rapport donné $r$ des valeurs positives et négatives. On reconnaît sur le champ que $r$ change de signe chaque fois que $\lambda$ traverse l'une des valeurs $\frac{h}{p}, \frac{h}{q}, -\frac{p}{h}, -\frac{q}{h}$.

Si l'on appelle $\lambda'$ et $\lambda''$ les deux racines de l'équation (1) résolue par rapport à $\lambda$, on reconnaît aisément que le produit $\lambda'\lambda'' = -1$, car l'équation (1) ne change pas quand on y change $\lambda$ en $-\frac{1}{\lambda}$.
Si une droite OM satisfait à la condition proposée, la droite ON perpendiculaire à OM y satisfait également.
Les triangles $\mathrm{OA}a'$, $\mathrm{OB}b'$ sont en effet respectivement égaux aux triangles $\mathrm{OA}a$, $\mathrm{OB}b$, et ont entre eux le même rapport.

Faisons par exemple $\lambda = 0$, puis $\lambda = \infty$, ce qui définit les deux axes OX OY ; ces hypothèses conduisent toutes deux à $r = \frac{p}{q}$.
Faisons ensuite $\lambda = \pm 1$, ce qui correspond aux bissectrices de l'angle des axes ; on aura $r = \frac{p^2 - h^2}{q^2 - h^2}$.

Les trois points M, O, N, sommets du triangle rectangle MON, sont situés sur une circonférence dont le centre est au point P milieu de l'hypoténuse MN. Cherchons les abscisses des points M et N.
Appelons $x$ d'une manière générale l'abscisse d'un point situé sur la droite AB, correspondante à la valeur $\lambda$ du coefficient d'inclinaison de la droite qui joint ce point à l'origine. Nous aurons

$$h = \lambda x,$$

relation qui permet de remplacer $\lambda$ dans l'équation (1) par sa valeur $\frac{h}{x}$.

https://doi.org/10.1017/S0013091500029382 Published online by Cambridge University Press

Il vient pour déterminer les $x$ des points M et N l'équation

$$r=\frac{(x-p)(px+h^2)}{(x-q)(qx+h^2)},$$

ou bien, en ordonnant par rapport à $x$,

$$x^2-\frac{(p^2-h^2)-r(q^2-h^2)}{p-qr}x-h^2=0. \tag{2}$$

La somme algébrique des abscisses des points M et N est égale à $\dfrac{p^2-h^2-r(q^2-h^2)}{p-qr}$ coefficient de $x$ dans le premier membre de l'équation. L'abscisse $u=\mathrm{HP}$ du point P en est la moitié, et l'on a

$$u=\frac{p^2-h^2-r(q^2-h^2)}{2(p-qr)}. \tag{3}$$

Résolvons cette équation par rapport à $r$. Il vient

$$r=\frac{p}{q}\left(\frac{u-\dfrac{p^2-h^2}{2p}}{u-\dfrac{q^2-h^2}{2q}}\right)=\frac{p}{q}\left\{\frac{u-\frac{1}{2}\left(p-\dfrac{h^2}{p}\right)}{u-\frac{1}{2}\left(q-\dfrac{h^2}{q}\right)}\right\} \tag{4}$$

Sous cette forme l'équation conduit à une construction géométrique simple du point P. Remarquons en effet :

Que $p$ est l'abscisse du point A et que $-\dfrac{h^2}{p}$ est l'abscisse du point A′ que l'on obtient, sur la droite AB prolongée, en la coupant par une droite OA′ élevée au point O perpendiculairement à OA ; par conséquent $\frac{1}{2}\left(p-\dfrac{h^2}{p}\right)$ définit sur la droite AB un point $\alpha$, milieu de AA′, et centre de la circonférence qui passe par les trois points A, O, A′ ;

Que, de même, $\frac{1}{2}\left(q-\dfrac{h^2}{q}\right)$ est l'abscisse d'un point $\beta$, milieu du segment BB′ que l'on obtient en menant au point O une perpendiculaire à OB jusqu' à la rencontre de AB prolongée.

Les différences $\quad u-\frac{1}{2}\left(p-\dfrac{h^2}{p}\right), \quad u-\frac{1}{2}\left(q-\dfrac{h^2}{q}\right)$

représentent les distances P$\alpha$, P$\beta$ du point P à ces deux points $\alpha$ et $\beta$, et l'équation (4) revient à l'égalité

https://doi.org/10.1017/S0013091500029382 Published online by Cambridge University Press

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{P}\alpha}{\mathrm{P}\beta} = r \times \frac{q}{p} = r',$$

en appelant $r'$ le rapport connu $r \times \dfrac{q}{p}$.

On trouvera donc la position du point P en cherchant sur la droite $\alpha\beta$ le point P tel que le rapport de ses distances aux points connus $\alpha$ et $\beta$ soit égal à un nombre $r'$ déduit du rapport $r$ par l'opération $r' = \dfrac{qr}{p}$.

Nous avons vu qu'on devait attribuer à $r$ le signe $+$, puis le signe $-$, pour prévoir tous les cas possibles. Le signe attribué à $r$ entraine un signe particulier pour $r'$, de sorte que $r'$ doit aussi recevoir successivement le signe $+$ et le signe $-$. A chacun correspond une position du point P sur $\alpha\beta$.

FIGURE 9.

L'équation (5) dans laquelle $r'$ reçoit le double signe définit deux positions $\mathrm{P}_1$ et $\mathrm{P}_2$ du point cherché, et ces deux positions sont conjuguées harmoniques par rapport aux extrémités du segment $\alpha\beta$ qu'elles partagent.

Connaissant le point P on achèvera la solution en décrivant du point P comme centre avec PO pour rayon une circonférence qui coupera AB en M et N. Les droites cherchées OM ON sont

parallèles aux bissectrices des deux angles que la droite OP fait avec la base AB du triangle. Comme il y a deux positions pour le point P et qu' à chacune correspondent deux droites OM, ON, on a en tout quatre solutions.

Lorsque $r=0$, $r'$ est nul aussi et le point P coïncide avec $\alpha$; les droites cherchées coïncident avec OA, OA′.

Lorsque $r$ est infini, $r'$ l'est également et le point P coïncide avec le point $\beta$ ; les droites correspondantes sont OB, OB′.

La solution générale dérive, en définitive, d'une combinaison des deux solutions particulières relatives à $r=0$ et à $r$ infini.

On remarquera que les points A, A′, B, B′, M et N forment une *involution*.

Faisons, à titre d'exemple, $r = 1$. On en déduit $r' = \frac{q}{p}$, et l' équation (5) devient

$$\frac{P\alpha}{P\beta} = \frac{HB}{HA},$$

d'où l'on déduit cette propriété que les droites $\alpha\beta P$, BAH sont divisées proportionellement aux points $\alpha$, $\beta$, P et B, A, H.

Il est plus simple de chercher la valeur de $u$ dans l'équation (3) On a pour $r = 1$

$$u = \frac{p^2 - q^2}{2(p-q)} = \frac{p+q}{2},$$

de sorte que le point P est le milieu de la base AB.

*Les droites OM, ON qui assurent l'équivalence des triangles OAa OBb sont donc parallèles aux bissectrices des angles que la médiane OI forme avec la base du triangle.*

Si l'on fait $r = -1$ on obtient une seconde solution qui assure la même équivalence. L'équation (3) donne alors

$$u = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2 + q^2 - 2h^2}{p+q} = \tfrac{1}{2}(p+q) - \frac{h^2 + pq}{p+q}.$$

FIGURE 10.

On n'a donc qu' à porter dans le sens convenable une quantité $IP_2$ égale à $-\frac{h^2 + pq}{p+q}$ à partir du milieu I de AB, pour avoir une autre solution ; les droites correspondantes sont les parallèles aux bissectrices des angles que forme $OP_2$ avec la droite AB prolongée.

Faisons l'application de cette théorie à quelques cas particuliers.

TRIANGLE ISOSCÈLE.

FIGURE 11.

Nous aurons $q = -p$ ; il viendra
pour $r = 1$ $u = 0$,
pour $r = -1$ $u$ infini.

A ces deux déterminations de $u$ correspondent quatre droites :

Les deux parallèles aux bissectrices des angles que la médiane OH forme avec la base AB ;

https://doi.org/10.1017/S0013091500029382 Published online by Cambridge University Press

Les deux droites rectangulaires OH et OX parallèles respectivement à la médiane et à la base.

Ces quatre droites font autour du point O huit angles consécutifs égaux à la moitié d'un angle droit.

TRIANGLE RECTANGLE EN O.

FIGURE 12.

Les abscisses $p$ et $q$ seront de signes contraires, et l'on aura $pq = -h^2$.

Si l'on fait la construction, le point A′ coïncidera avec le point B, et le point B′ avec le point A. Les deux points $\alpha$ et $\beta$ seront confondus au milieu I de la base AB. Le point P défini par le rapport de ses distances à $\alpha$ et à $\beta$ est donc indéterminé, et en quelque point qu'on le place, le rapport $\frac{\mathrm{P}\alpha}{\mathrm{P}\beta} = 1$. Donc $r' = 1$ et $r = \frac{p}{q}$.

La figure justifie ce résultat. Quelle que soit la droite OM sur laquelle on projette les points A et B, les triangles OA$a$, OB$b$ sont semblables, et leurs surfaces sont entre elles comme les carrés $\overline{\mathrm{OA}}^2$, $\overline{\mathrm{OB}}^2$ des côtés homologues.

Or, dans le triangle rectangle, $\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OB}}^2} = \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HB}} = \frac{p}{q}$ en valeur absolue.

Si l'on place le point P en I, les droites cherchées coïncident avec OA, OB et le rapport des surfaces des triangles, qui s'annulent à la fois, prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Nous terminerons ce paragraphe par une remarque générale.

FIGURE 13.

*Si par les points $a$ et $b$, projections de $A$ et de $B$ sur $OM$ on mène des droites $a\omega$, $b\omega'$ respectivement parallèles aux côtés $OA$, $OB$ du triangle, ces parallèles coupent la médiane $OI$ en des points $\omega$ et $\omega'$, et le rapport $\frac{O\omega}{O\omega'}$ est égal au rapport $r$ des surfaces des triangles $OAa$, $OBb$.*

En effet le triangle OA$a$ est équivalent au triangle OA$\omega$, le triangle OB$b$ est équivalent à OB$\omega'$; et ces deux triangles OA$\omega$, OB$\omega'$, ayant pour hauteurs les distances égales des points A et B à la médiane OI, sont entre eux comme leurs bases



https://doi.org/10.1017/S0013091500029382 Published online by Cambridge University Press

$O\omega$, $O\omega'$. Il en résulte que, si $r=1$, ou bien les points $\omega$ et $\omega'$ coïncident, ou bien ils sont à égale distance du sommet O.

### Remarques Diverses.

Prenons le rapport $r$ égal à l'unité positive.

### Figure 14.

Les solutions correspondantes sont fournies par les droites OM, ON parallèles aux bissectrices IH, IC des angles formés par la médiane OI avec la base AB.

Les triangles NIH, OIH, rectangles en H, ont un côté commun IH et des angles égaux en I. Donc $IN=IO$. On prouverait de même qu'on a $IM=IO$ ; de sorte que I est à la fois le milieu de la base AB et de la droite MN. Il en résulte que les points A et B sont situés sur une hyperbole équilatère, qui a pour asymptotes les droites OM, ON, et dans laquelle OI est la direction conjuguée aux cordes parallèles à AB. Si l'on appelle $x$ et $y$ les coordonnées d'un point de la courbe rapportée aux axes rectangulaires OM, ON, l'équation de l'hyperbole sera

$$xy = \text{constante}.$$

Or, pour le point A $x=Oa$, $y\equiv aA$ ;

pour le point B $x=Ob$, $y=bB$.

L'équation de la courbe prouve donc l'égalité

$$Oa\times aA = Ob\times bB,$$

c'est-à-dire l'équivalence des triangles $OaA$, $ObB$.

Il est aisé de démontrer cette égalité par la simple géométrie.

Le point I étant le milieu de AB, C est le milieu de $ab$, et IC est la demi-somme des deux ordonnées $Aa$, $Bb$, de même que OC est la demi-somme des deux abscisses $Oa$, $Ob$. On a donc

$$Oa = OC - Cb, \qquad Ob = OC + Cb,$$
$$aA = IC + IK, \qquad bB = IC - IK\ ;$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} Oa\times aA - Ob\times bB &= OC\times IC - Cb\times IK + OC\times IK - Cb\times IC \\ &\quad - OC\times IC + Cb\times IK + OC\times IK - Cb\times IC \\ &= 2(OC\times IK - Cb\times IC). \end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité est identiquement nul.

https://doi.org/10.1017/S0013091500029382 Published online by Cambridge University Press

En effet, appelons $\theta$ l'angle AIH, moitié de l'angle AIO. Nous aurons

$$OC = OI\cos\theta, \qquad CI = OI\sin\theta,$$
$$IK = IB\sin\theta, \qquad Cb = IB\cos\theta.$$

Donc

$$OC \times IK - Cb \times IC = (OI \times IB - IB \times OI)\sin\theta\cos\theta = 0,$$

et le théorème est démontré.

On peut modifier cette démonstration de manière à éviter l'emploi des lignes trigonométriques. Nous devons la nouvelle démonstration que nous allons donner à l'obligeance de notre collègue et ami, M. John S. Mackay, professeur à l'Académie d' Edimbourg.

On observera d'abord que les deux droites A$a$, B$b'$ se coupent en un point R de la médiane OI, et que A$a'$, B$b$ se coupent de même en un point S situé sur le prolongement de la même médiane ; de sorte que la figure RBSA est un rectangle, dans lequel les demi-diagonales IA, IB, IR, IS sont égales. La figure O$b$S$a'$ est de même un rectangle, dans lequel les droites A$a$, B$b'$ parallèles respectivement aux deux côtés se coupent en un point de la diagonale. On a donc l'égalité

$$b'R \times RA = Ra \times ab,$$

qui exprime l'équivalence des deux rectangles partiels $b'$RA$a'$ et $b$BR$a$. Ajoutant à chacun le rectangle O$a$R$b'$ il y a encore équivalence des deux sommes, c'est-à-dire l'égalité

$$Oa \times aA = Ob \times bB.$$

### Solution trigonométrique du cas général.

Figure 15.

Soit OAB le triangle donné, $\alpha$ l'angle connu AOB, $\mu$ l'angle inconnu AOM.

Nous aurons MOB $= \alpha - \mu$. Il viendra, si l'on appelle $a$ le côté OA, $b$ le côté OB,

$$OA' = a\cos\mu, \qquad OB' = b\cos(\alpha - \mu),$$
$$A'A = a\sin\mu, \qquad B'B = b\sin(\alpha - \mu),$$

et il viendra pour le rapport des deux aires

$$(1) \qquad r = \frac{a^2\sin\mu\cos\mu}{b^2\sin(\alpha-\mu)\cos(\alpha-\mu)} = \frac{a^2\sin 2\mu}{b^2\sin 2(\alpha-\mu)}.$$

La recherche de l'angle $\mu$ revient au partage de l'angle donné $2\alpha$

https://doi.org/10.1017/S0013091500029382 Published online by Cambridge University Press

en deux parties $2\mu$ et $2(\alpha-\mu)$ telles que le rapport de leurs sinus soit égal à un nombre donné $r'=\frac{b^2r}{a^2}$.

FIGURE 16.

On résout le problème géométriquement en partageant la corde $pr$ de l'angle $pCr=2\alpha$ en deux segments $pm$, $mr$, qui soient entre eux dans le rapport de $r'$ à l'unité.

Car si l'on a $\frac{pm}{mr}=r'$ on en déduit $\frac{pl}{rn}=r'$ pour le rapport des sinus des angles partiels, quel que soit le rayon du cercle. Cette remarque conduit à la solution géométrique suivante.

FIGURE 17.

Soit OAB le triangle donné ; C le centre du cercle circonscrit. L'angle ACB sera le double de l'angle AOB, ce sera par conséquent l'angle $2\alpha$. Déterminons sur la corde AB les points $m$ et $m'$ tels que l'on ait en valeur absolue

$$\frac{mA}{mB}=\frac{m'A}{m'B}=r'=\frac{b^2r}{a^2}.$$

Les droites C$m$, C$m'$ satisferont à l'équation (1) ; et si l'on joint le point O aux extrémités M et N, M′ et N′ des diamètres C$m$, C$m'$, on aura autour du point O les moitiés respectives des angles formés autour du centre C ; ceux-ci donnant les valeurs de $2\mu$, les premiers donneront les valeurs de $\mu$, et les quatre droites OM, ON, OM′, ON′ seront les solutions cherchées.

Cette construction rattache, mieux que la précédente, les quatre solutions correspondantes à une même valeur absolue de $r$.

FIGURE 18.

Appliqué au triangle rectangle elle conduit à des droites OM, ON qui coïncident avec les côtés OA, OB de l'angle droit ; car AB est alors un diamètre et CM coïncide avec AB, sauf le cas de M coïncidant avec le point C : alors la direction MN est arbitraire, et le rapport $r$ est constant et égal à $\frac{a^2}{b^2}$.

https://doi.org/10.1017/S0013091500029382 Published online by Cambridge University Press