Canad. J. Math. Vol. **56** (6), 2004 pp. 1121–1144

Division par un polynôme hyperbolique

Jacques Chaumat et Anne-Marie Chollet

Résumé. On se donne un intervalle ouvert non vide ω de $\mathbb{R}$, un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{R}_s$ et un polynôme unitaire

$$P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda)z^{m-1} = + \cdots + a_{m-1}(\lambda)z + a_m(\lambda),$$

de degré $m > 0$, dépendant du paramètre $\lambda \in \Omega$. Un tel polynôme est dit ω-hyperbolique si, pour tout $\lambda \in \Omega$, ses racines sont réelles et appartiennent à ω.

On suppose que les fonctions a_k, $k = 1, \ldots, m$, appartiennent à une classe ultradifférentiable $C_M(\Omega)$. On s'intéresse au problème suivant. Soit f appartient à $C_M(\Omega)$, existe-t-il des fonctions Q_f et $R_{f,k}$, $k = 0, \ldots, m-1$, appartenant respectivement à $C_M(\omega \times \Omega)$ et à $C_M(\Omega)$, telles que l'on ait, pour $(x,\lambda) \in \omega \times \Omega$,

$$f(x) = P_m(x,\lambda)Q_f(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda)\ ?$$

On donne ici une réponse positive dès que le polynôme est ω-hyperbolique, que la class untradifférentiable soit quasi-analytique ou non ; on obtient alors, des exemples d'idéaux fermés dans $C_M(\mathbb{R}^n)$. On complète ce travail par une généralisation d'un résultat de C. L. Childress dans le cadre quasi-analytique et quelques remarques.

Abstract. Let ω be an open interval in $\mathbb{R}$, Ω an open connected set in $\mathbb{R}^s$ and P_m, a monic polynomial

$$P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda)z + a_m(\lambda),$$

of degree $m > 0$, depending on $\lambda \in \Omega$. Such a polynomial is said to be ω-hyperbolic if, for any $\lambda \in \Omega$, its roots are real and contained in ω.

Let us suppose that a_k, $k = 1, \ldots, m$, belong to an ultradifferentiable class $C_M(\Omega)$. We deal with the following problem. Given f belonging to $C_M(\Omega)$, do there exist functions Q_f and $R_{f,k}$, $k = 0, \ldots, m-1$ belonging respectively to $C_M(\omega \times \Omega)$ and to $C_M(\Omega)$, such that we have, for $(x,\lambda) \in \omega \times \Omega$,

$$f(x) = P_m(x,\lambda)Q_f(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda)?$$

We give here a positive answer as soon as the polynomial is ω-hyperbolic whether the ultradifferentiable class is quasi-analytic or not; we then get examples of closed ideals in $C_M(\mathbb{R}^n)$. We complete this work with a generalization of a result of C. L. Childress in the quasi-analytic case and some remarks.

Le but de ce travail est d'étudier le problème de division de Weierstrass par un polynôme hyperbolique dans une classe de fonctions ultradifférentiables.

On se donne un intervalle ouvert non vide ω de $\mathbb{R}$, un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{R}^s$ et un polynôme unitaire

$$P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda)z + a_m(\lambda),$$

Reçu par la rédaction le 28 janvier, 2003; revu le 3 fevrier, 2004.
Classification (AMS) par sujet: 26E10, 46E25, 46J20.

de degré $m > 0$, dépendant du paramètre $\lambda \in \Omega$.

On suppose que les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$, appartiennent à $C^\infty(\Omega)$. On sait, d'après B. Malgrange [9, 10, 15], que toute fonction $f \in C^\infty(\omega)$ peut s'écrire, pour $(x, \lambda) \in \omega \times \Omega$,

$$f(x) = P_m(x, \lambda) Q_f(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda),$$

avec $Q_f \in C^\infty(\omega \times \Omega)$ et $R_{f,k} \in C^\infty(\Omega)$, pour $k = 0, \dots, m-1$, non nécessairement uniques.

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante de réels positifs et soit O un ouvert de $\mathbb{R}^t$.

On dit qu'une fonction g appartient à la classe ultradifférentiable $C_M(O)$ si, pour tout compact $K \subset O$, il existe une constante $C = C(K) \geq 1$ vérifiant,

$$\sup_{x\in K, L\in\mathbb{N}^t, \ell=|L|} \frac{\left|D^L g(x)\right|}{\ell! M_\ell C^\ell} = \|g\|_{M,C,K} < \infty.$$

On imposera, de plus, à la suite M de vérifier les conditions suivantes :

$$(H_1) \qquad M_0 \geq 1 \text{ et } \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est logarithmiquement convexe,}$$

$$(H_2) \qquad \left\{\frac{M_{n+1}}{M_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers l'infini avec } n.$$

Dire que la suite M est logarithmiquement convexe signifie que la suite $\{\frac{M_{n+1}}{M_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; ceci implique que la suite $\{(\frac{M_n}{M_0})^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi croissante.

La condition (H_1) assure que la classe $C_M(O)$ est stable par composition. La condition (H_2) assure que $C_M(O)$ contient d'autres fonctions que les fonctions analytiques.

On imposera aussi que M vérifie

$$(H_3) \qquad \text{il existe } A \geq 1 \text{ tel que } M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p \text{ pour tout} p \geq 0.$$

Cette condition assure que $C_M(O)$ est stable par dérivation.

On rappelle que la classe $C_M(O)$ est non quasi-analytique si et seulement si l'on a

$$(H_4) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n M_n^{1/n}} < +\infty.$$

Si les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$, et f appartiennent respectivement à $C_M(\Omega)$ et $C_M(\omega)$, que peut-on dire de Q_f et de $R_{f,k}$, $k = 0, \dots, m-1$?

On peut trouver différentes réponses dans la littérature. Il apparaît, en général, une perte de régularité.

C'est le cas en particulier pour les classes de Gevrey $G^{1+\alpha}$ qui correspondent au choix $M = (n!^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha > 0$. En effet, si les fonctions a_k, $k = 1,\dots,m$, et f appartiennent à $G^{1+\alpha}$, M. D. Bronshtein [3] montre que les fonctions Q_f et $R_{f,k}$, $k = 0,\dots,m-1$, peuvent être construites dans $G^{1+m\alpha}$. Ce résultat est optimal. Par contre, si $\omega = \mathbb{R}$ et si le polynôme $P_m(z,\lambda)$ est hyperbolique, c'est à dire, si, pour tout $\lambda \in \Omega$, ses racines sont réelles, M. D. Bronshtein montre qu'il n'y a pas de perte de régularité ; en effet, dans ce cas, Q_f et $R_{f,k}$, $k = 0,\dots,m-1$, sont uniques et appartiennent aussi à $G^{1+\alpha}$. Ces résultats ont été partiellement étendus à des classes plus générales par J. Chaumat et A. M. Chollet dans [5].

Lorsque la classe ultradifférentiable C_M est quasi-analytique et que $P_m(z,0) = z^m$, C. L. Childress montre que la division sans perte de régularité par $P_m(z,\lambda)$ dans l'espace des germes à l'origine de classe C_M impose que le polynôme soit hyperbolique [7].

On se propose donner ici un résultat de division par un polynôme hyperbolique, pour toutes les classes ultradifférentiables quasi-analytiques ou non quasi-analytiques, sans perte de régularité. C'est le théorème (5.1).

Dans le paragraphe 6, on obtient alors, comme application, des exemples d'idéaux fermés dans $C_M(\mathbb{R}^n)$. (On peut aussi consulter sur le sujet les travaux de V. Thilliez [12–14].)

On trouve, plus loin, une "analyse" du résultat de M. D. Bronshtein sur la régularité des racines d'un polynôme hyperbolique [2]. On donne ensuite une nouvelle preuve un peu plus générale du théorème de C. L. Childress. C'est le théorème 8.1.

Dans le cadre des classes de Gevrey non quasi-analytiques, on montre que l'on peut réaliser la division sans perte de régularité, par des polynômes $P_m(z,\lambda)$ non hyperboliques particuliers.

On termine par une brève présentation des résultats que l'on obtient si, au lieu de considérer des classes de Carleman, on s'interesse aux classes de Beurling.

1 Division par un polynôme hyperbolique. Existence et unicité

Définition 1.1 *Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$.*

Un polynôme unitaire P_m, de degré $m > 0$, dépendant du paramètre $\lambda \in \Omega$,

$$P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda)z + a_m(\lambda)$$

est dit ω-hyperbolique si, pour tout $\lambda \in \Omega$, toutes ses racines sont réelles et appartiennent à ω.

Par exemple, $z^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_1^2)$ est $\mathbb{R}$-hyperbolique, pour tout $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$ de $\mathbb{R}^2$. On notera que ses racines ne sont pas de classe C^1.

Etant donnés ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$, P_m un polynôme ω-*hyperbolique* et f une fonction définie dans ω et à valeurs complexes, existe-t-il une fonction $Q_f(x,\lambda)$ définie sur $\omega\times\Omega$ et m fonctions $R_{f,k}(\lambda)$,

$k = 0, \dots, m-1$, définies sur Ω et telles que, pour tout $(x,\lambda) \in \omega \times \Omega$, on ait

$$f(x) = P_m(x,\lambda) Q_f(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda)\,?$$

Le lemme suivant donne une réponse si la fonction f est de classe C^m.

Lemme d'existence et d'unicité 1.2 *Si la fonction f est de classe C^m dans ω, les fonctions $Q_f(x,\lambda)$ et $R_{f,k}(\lambda)$, $k = 0, \dots, m-1$, existent et sont uniques. En fait, pour λ donné, les fonctions $R_{f,k}(\lambda)$, $k = 0, \dots, m-1$ sont complètement définies par les valeurs de f et de ses dérivées d'ordre au plus $m-1$, prises aux racines $\mu_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, m$, du polynôme $P_m(z,\lambda)$ et la fonction $Q_f(x,\lambda)$ est déterminée par les valeurs de f et ses dérivées d'ordre au plus m, prises sur le plus petit intervalle compact contenant x et $\mu_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, m$.*

Preuve C'est une conséquence immédiate de l'ω-hyperbolicité du polynôme $P_m(z,\lambda)$, de la formule d'interpolation de Lagrange et de la formule de Taylor avec reste intégral. Bien évidemment, dans la mesure où on ne connaît pas la régularité des racines de P_m, on ne contrôle pas la régularité en λ de Q_f et des $R_{f,k}$, $k = 0, \dots, m-1$.

Dans la suite, les fonctions f et a_k, $k = 1, \dots, m$, seront données de classe C^∞ et on cherchera à estimer les dérivées de $Q_f(x,\lambda)$ et $R_{f,k}(\lambda)$, $k = 0, \dots, m-1$, à partir d'estimations des dérivées de ces données.

2 Prolongement $\overline{\partial}$- plat de "Dynkin"

Soit I un intervalle compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On note

$$V(I) = \{\zeta \in \mathbb{C}\,;\, d(\zeta, I) < 1\}\,.$$

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante de réels positifs vérifiant (H_1) et (H_2). Soit C une constante, $C > 0$. On note (M, C, I) l'espace vectoriel des fonctions f de classe C^∞ sur I à valeurs complexes telles que l'on ait

$$\sup_{x\in I, k\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k! M_k C^k} = \|f\|_{M,C,I} < \infty.$$

Proposition 2.1 ([8; 5, lemme 10]) *Il existe une constante E indépendante de M, C et I et une application linéaire continue T de (M, C, I) dans l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans $V(I)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

$$(2.1.1) \qquad Tf(x) = f(x), \ \textit{pour tout } x \textit{ dans } I,$$

et, pour tout entier k et tout ζ dans $V(I)$,

$$(2.1.2) \qquad \left| \frac{\partial T(f)}{\partial \bar\zeta}(\zeta) \right| \le (EC)^{k+1} M_{k+1} d(\zeta, I)^k \|f\|_{M,C,I}.$$

3 Estimations de "Bronshtein"

Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$ et $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda)z + a_m(\lambda)$, $(z,\lambda) \in \mathbb{C} \times \Omega$, un polynôme ω-hyperbolique.

On suppose que les fonctions a_k, $k = 1,\ldots,m$, sont de classe C^∞ dans Ω. Soit Γ un compact de Ω. Les racines du polynôme $P_m(z,\lambda)$ restent dans un compact κ_Γ contenu dans ω lorsque λ est dans Γ. Soit γ un compact de ω tel que κ_Γ soit inclus dans l'intérieur de γ. On dira alors de γ qu'il est bien situé par rapport à Γ.

Le lemme 3.1 est dû à M. D. Bronshtein [3]. On peut aussi voir [16].

Lemme 3.1 *Pour tout compact $\Gamma \subset \Omega$ et tout intervalle compact $\gamma \subset \omega$ bien situé par rapport à Γ, il existe une constante $C_1(\Gamma,\gamma) \geq 1$ telle que, pour tout multi-indice $L \in \mathbb{N}^s$ de longueur ℓ, $\ell \leq m$ et tout z de $V(\gamma) \setminus \gamma$, on ait*

$$\text{(3.1.1)} \qquad \sup_{\lambda\in\Gamma}\left|\frac{D_\lambda^L P_m(z,\lambda)}{P_m(z,\lambda)}\right| \leq C_1(\Gamma,\gamma)(d(z,\gamma))^{-\ell}.$$

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante vérifiant (H_1) et (H_2). On suppose, maintenant, que M vérifie, de plus, (H_3), c'est à dire que la classe M est stable par dérivation. Cette hypothèse n'est pas indispensable ; elle facilite simplement l'écriture des calculs dans le lemme 3.2.

On suppose que les fonctions a_k , $k = 1,\ldots,m$, appartiennent à $C_M(\Omega)$. Le lemme 3.2 suivant est une variante d'une estimation donnée par M. D. Bronshstein dans les classes de Gevrey.

Lemme 3.2 *Pour tout compact $\Gamma \subset \Omega$ et tout intervalle compact $\gamma \subset \omega$ bien situé par rapport à Γ, il existe une constante $C_2(\Gamma,\gamma) \geq 1$ telle que, pour tout $(z,\lambda) \in (V(\gamma)\setminus\gamma)\times\Gamma$ et tout multi-indice $L \in \mathbb{N}^s$ de longueur ℓ, on ait*

$$\text{(3.2.1)} \quad \left|D_\lambda^L\Big(\frac{1}{P_m(z,\lambda)}\Big)\right| \leq \frac{1}{|P_m(z,\lambda)|}A^{m\ell}C_2(\Gamma,\gamma)^{\ell+1}\ell!\Big(d(z,\gamma)^{-1} + \Big(\frac{M_\ell}{M_0}\Big)^{1/\ell}\Big)^\ell.$$

Par convention, si $\ell = 0$, $(\frac{M_\ell}{M_0})^{1/\ell} = 1$.

Preuve On peut traduire l'hypothèse sur les fonctions a_k $k = 1,\ldots,m$ par l'existence d'une constante $C_3(\Gamma,\gamma) \geq 1$ telle que, pour tout $k = 1,\ldots,m$, tout $(z,\lambda) \in V(\gamma)\times\Gamma$ et tout multi-indice $L \in \mathbb{N}^s$ de longueur ℓ, on ait

$$\text{(3.2.2)} \qquad \left|D_\lambda^L P_m(z,\lambda)\right| \leq C_3(\Gamma,\gamma)^{\ell+1}\,\ell!M_\ell.$$

De la propriété de stabilité par dérivation (H_2), on déduit que, si $\ell \geq m$, on a

$$\text{(3.2.3)} \qquad \left|D_\lambda^L P_m(z,\lambda)\right| \leq C_3(\Gamma,\gamma)^{\ell+1}\,\ell!A^{m\ell}M_{\ell-m}.$$

On va établir (3.2.1) par récurrence sur la longueur ℓ du multi-indice L. Pour cela, on écrit la constante $C_2(\Gamma,\gamma)$ sous la forme

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-050-1 Published online by Cambridge University Press

$$C_2(\Gamma,\gamma) = C_3(\Gamma,\gamma) \times C_4(\Gamma,\gamma), \tag{3.2.4}$$

avec $C_4\,(\Gamma,\gamma) \geq 1$, que l'on choisira convenablement.

L'inégalité (3.2.1) est claire pour $\ell = 0$. On la suppose donc vraie jusqu'à l'ordre $\ell - 1$. Soit L un multi-indice de longueur ℓ. En dérivant L fois l'identité $P_m \times \frac{1}{P_m} = 1$, on a

$$P_m D^L_\lambda\Big(\frac{1}{P_m}\Big) = -\sum_{J+H=L,\, J\neq 0} \frac{L!}{J!H!} D^J_\lambda P_m D^H_\lambda\Big(\frac{1}{P_m}\Big).$$

Dans la somme ci-dessus, les multi-indices H sont de longueur $h \leq \ell - 1$. On va distinguer, parmi les multi-indices J, ceux qui sont de longueur inférieure ou égale à m.

$$\begin{aligned} P_m D^L_\lambda\left(\frac{1}{P_m}\right) &= -\sum_{J+H=L,0<j\leq m} \frac{L!}{J!H!} D^J_\lambda P_m D^H_\lambda\left(\frac{1}{P_m}\right) \\ &\quad - \sum_{J+H=L,m<j} \frac{L!}{J!H!} D^J_\lambda P_m D^H_\lambda\left(\frac{1}{P_m}\right) \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

On pose

$$B_\ell = \left(d(z,\gamma)^{-1} + \left(\frac{M_\ell}{M_0}\right)^{1/\ell}\right)^\ell.$$

La log-convexité de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que la suite $\{(\frac{M_n}{M_0})^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc que la suite $(B_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi croissante. De là, pour tout couple d'entiers (j,k), on a

$$B_j B_k \leq B_{j+k}. \tag{3.2.6}$$

On majore la somme S_1 en utilisant l'hypothèse de récurrence puisque l'on a $h \leq \ell - 1$.

$$|S_1| \leq \sum_{J+H=L,0<j\leq m} \frac{L!}{J!H!} \left|D^J_\lambda P_m\right| \frac{1}{|P_m(z,\lambda)|} A^{mh} (C_3(\Gamma,\gamma) C_4(\Gamma,\gamma))^{h+1} h! B_h. \tag{3.2.7}$$

On sait que le nombre de multi-indices de $\mathbb{N}^s$ de longueur j est inférieur ou égal à s^j,

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-050-1 Published online by Cambridge University Press

que $j! \leq s^j J!$ et que $\frac{L!}{H!} \leq \frac{\ell!}{h!}$. En utilisant (3.1.1) et (3.2.6), on obtient alors

(3.2.8)

$$|S_1| \leq \sum_{\substack{J+H=L\\0<j\leq m}} \frac{s^j \ell!}{j!} C_1(\Gamma,\gamma)\,(d(z,\gamma))^{-j}\,A^{mh}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{h+1}\,B_h$$

$$\leq C_1(\Gamma,\gamma) A^{m\ell}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\,\ell! B_\ell \sum_{\substack{J+H=L\\0<j\leq m}} \frac{s^j}{j!} A^{-mj}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{-j}$$

$$\leq C_1(\Gamma,\gamma) A^{m\ell}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\,\ell! B_\ell \sum_{0<j\leq m} \frac{s^{2j}}{j!} A^{-mj}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{-j}\,.$$

On peut maintenant choisir $C_4\,(\Gamma,\gamma)$ en sorte que

$$C_1(\Gamma,\gamma) \sum_{0<j\leq m} \frac{s^{2j} A^{-mj}}{j!}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{-j} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.2.9}$$

De là, on a

$$|S_1| \leq \frac{1}{2} A^{m\ell}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\,\ell! \Big(d(z,\gamma)^{-1} + \Big(\frac{M_\ell}{M_0}\Big)^{1/\ell}\Big)^{\ell}. \tag{3.2.10}$$

Le calcul pour S_2 est analogue. On a

$$|S_2| \leq \sum_{J+H=L, m<j} \frac{L!}{J!H!} \left|D_\lambda^J P_m\right| \frac{1}{|P_m(z,\lambda)|} A^{mh}\,(C_3(\Gamma,\gamma) C_4(\Gamma,\gamma))^{h+1}\,h! B_h, \tag{3.2.11}$$

et donc, en utilisant (3.2.3) puisque l'on a $j > m$,

$$\begin{aligned} |S_2| \leq \sum_{J+H=L, m<j} \frac{L!}{J!H!} C_3\,(\Gamma,\gamma)^{j+1}\, j! A^{mj} M_{j-m} d(z,\gamma)^{-m} \times \\ A^{mh}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{h+1}\,h! B_h. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

On a, d'après (3.2.6),

$$M_{j-m} d(z,\gamma)^{-m} B_h \leq M_0 B_{j-m} B_m B_h \leq M_0 B_{j+h} = M_0 B_\ell. \tag{3.2.13}$$

On a donc

(3.2.14)

$$|S_2|$$

$$\leq M_0 C_3\,(\Gamma, K)\, A^{m\ell}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\,\ell! B_\ell \sum_{\substack{J+H=L\\m<j}} s^j\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{-j}$$

$$\leq M_0 C_3\,(\Gamma,\gamma)\, A^{m\ell}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\,\ell! B_\ell \sum_{m<j<\ell} s^{2j}\,(C_3\,(\Gamma,\gamma)\,C_4\,(\Gamma,\gamma))^{-j}\,.$$

On peut choisir $C_4(\Gamma,\gamma)$ en sorte que l'on ait, de plus,

$$M_0 C_3(\Gamma,\gamma) \sum_{j>m}^{+\infty} s^{2j} \left(C_3(\Gamma,\gamma) C_4(\Gamma,\gamma)\right)^{-j} \le \frac{1}{2} \tag{3.2.15}$$

et donc

$$|S_2| \le \frac{1}{2} A^{m\ell} \left(C_3(\Gamma,\gamma) C_4(\Gamma,\gamma)\right)^{\ell+1} \ell! \left(d(z,\gamma)^{-1} + \left(\frac{M_\ell}{M_0}\right)^{1/\ell} \right)^{\ell}. \tag{3.2.16}$$

Ceci achève la récurrence à l'aide de (3.2.5), (3.2.10) et (3.2.16) .

4 Une formule pour la division [5]

Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$ et $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda) z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda) z + a_m(\lambda)$, $(z,\lambda) \in \mathbb{C} \times \Omega$, un polynôme ω-hyperbolique.

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3).

On suppose que les fonctions a_k, $k = 1,\dots,m$, appartiennent à $C_M(\Omega)$. Soit Γ un compact de Ω et γ un intervalle compact de ω bien situé par rapport à Γ selon la définition donnée dans le paragraphe 3. Soit enfin g une fonction de classe C^∞ dans $\mathbb{C}$, à support compact dans $V(\gamma)$ telle que, pour tout entier r, on ait

$$\sup_{\zeta \in V(\gamma)\setminus\gamma} \left| \frac{\partial g}{\partial \bar\zeta}(\zeta) \right| d(\zeta,\gamma)^{-r} \le C_r(g).$$

On note $O(\gamma) = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C} \times (V(\gamma)\setminus\gamma)\ ;\ d(z,\gamma) < d(\zeta,\gamma)\}$.

Lemme 4.1 ([5]) *Il existe une constante $C_1 \ge 1$ et une fonction φ de classe C^∞ dans $O(\gamma)$ et telle que, pour tout $(z,\zeta) \in O(\gamma)$, on ait*

$$\begin{aligned} \varphi(z,\zeta) &= 1,\ si\ d(z,\gamma) < \frac{1}{64} d(\zeta,\gamma), \\ &= 0,\ si\ d(z,\gamma) > \frac{3}{4} d(\zeta,\gamma), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

et

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}(z,\zeta) \right| \le d(\zeta,\gamma)^{-1} C_1. \tag{4.1.2}$$

Lemme 4.2 ([5]) *On peut écrire, pour tout $x \in \gamma$ et tout $\lambda \in \Gamma$,*

$$g(x) = P_m(x,\lambda) Q_g(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{g,k}(\lambda), \tag{4.2.1}$$

avec

$$(4.2.2)\qquad Q_g(x,\lambda)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\zeta\in V(\gamma)\setminus\gamma}\int_{z\in V(\gamma)\setminus\gamma}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(z,\zeta)\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta-z)(z-x)P_m(z,\lambda)}d\sigma(z)d\sigma(\zeta)$$

et, pour $k=0,\dots,m-1$,

$$(4.2.3)\qquad R_{g,k}(\lambda)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\zeta\in V(\gamma)\setminus\gamma}\int_{z\in V(\gamma)\setminus\gamma}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(z,\zeta)\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta-z)P_m(z,\lambda)}S_k(z,\lambda)d\sigma(z)d\sigma(\zeta).$$

Ici $d\sigma$ *désigne la mesure de Lebesgue planaire et les fonctions* $S_k(z,\lambda)$ *sont des polynômes en* z *dont les coefficients sont des fonctions affines de* $(a_1,\dots,a_m)$ *qui vérifient, pour tout* $(x,z,\lambda)\in\mathbb{C}^2\times\Omega$,

$$P_m(x,\lambda)-P_m(z,\lambda)=(x-z)\sum_{k=0}^{m-1}x^kS_k(z,\lambda).$$

On note

$$(4.2.4)\qquad \mathcal{K}(x,\zeta,\lambda)=\frac{1}{\pi^2}\int_{z\in V(\gamma)\setminus\gamma}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(z,\zeta)}{(\zeta-z)(z-x)P_m(z,\lambda)}\,d\sigma(z)$$

et, pour $k=0,\dots,m-1$,

$$(4.2.5)\qquad \mathcal{K}_k(\zeta,\lambda)=\frac{1}{\pi^2}\int_{z\in V(\gamma)\setminus\gamma}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(z,\zeta)}{(\zeta-z)P_m(z,\lambda)}S_k(z,\lambda)\,d\sigma(z).$$

Lemme 4.3 ([5]) *Les fonctions* $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{K}_k$, $k=0,\dots,m-1$, *sont de classe* C^∞ *respectivement dans* $\gamma\times(V(\gamma)\setminus\gamma)\times\Gamma$ *et* $(V(\gamma)\setminus\gamma)\times\Gamma$. *De plus, il existe une constante* $C_2\geq 1$, *(ne dépendant que de* γ, *de* m *et de* s*), telle que, pour tout* $j\in\mathbb{N}$, *tout* $L\in\mathbb{N}^s$ *et tout* $(x,\zeta,\lambda)\in\gamma\times\big(V(\gamma)\setminus\gamma\big)\times\Gamma$, *on ait*

$$(4.3.1)\qquad \left|D_x^jD_\lambda^L\mathcal{K}(x,\zeta,\lambda)\right|\leq\frac{C_2^{j+1}j!}{d(\zeta,\gamma)^{j+m+3}}A^{m\ell}C_2(\Gamma,\gamma)^{\ell+1}\ell!\Big(d(\zeta,\gamma)^{-1}+\Big(\frac{M_\ell}{M_0}\Big)^{1/\ell}\Big)^\ell$$

et, pour tout $L\in\mathbb{N}^s$ *et tout* $(\zeta,\lambda)\in\big(V(\gamma)\setminus\gamma\big)\times\Gamma$,

$$(4.3.2)\qquad \left|D_\lambda^L\mathcal{K}_k(\zeta,\lambda)\right|\leq\frac{C_2^{\ell+1}}{d(\zeta,\gamma)^{m+2}}A^{m\ell}C_2(\Gamma,\gamma)^{\ell+1}\,\ell!\Big(d(\zeta,\gamma)^{-1}+\Big(\frac{M_\ell}{M_0}\Big)^{1/\ell}\Big)^\ell.$$

Preuve Il importe de noter que l'intégration ne porte que sur $\{z\ ;\ \frac{1}{64}d(\zeta,\gamma)<d(z,\gamma)<\frac{3}{4}d(\zeta,\gamma)\}$. La régularité de $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{K}_k$, $k=0,\dots,m-1$, s'en déduit. Les inégalités (4.3.1) et (4.3.2) sont des conséquences simples du lemme 3.2.

Proposition 4.4 *Soit Γ un compact de Ω et γ un intervalle compact de ω bien situé par rapport à Γ selon la définition donnée dans le paragraphe 3. Soit g une fonction de classe C^∞ dans $\mathbb{C}$, à support compact dans $V(\gamma)$ telle que, pour tout entier r, on ait*

$$\sup_{\zeta\in V(\gamma)\setminus\gamma}\left|\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\right| d(\zeta,\gamma)^{-r}\le C_r(g).$$

Alors, il existe une constante $C_3\ge 1$ ne dépendant que de γ telle que l'on ait, pour tout $x\in\gamma$ et tout $\lambda\in\Gamma$,

$$g(x)=P_m(x,\lambda)\,Q_g(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{m-1}x^kR_{g,k}(\lambda), \tag{4.4.1}$$

avec Q_g et $R_{g,k}$ de classe C^∞ respectivement sur $\gamma\times\Gamma$ et Γ. On a, de plus, pour tout $j\in\mathbb{N}$, tout $L\in\mathbb{N}^s$ et tout $(x,\lambda)\in\gamma\times\Gamma$,

$$\begin{aligned}&\left|D_x^jD_\lambda^LQ_g(x,\lambda)\right|\\&\qquad\le C_3C_2^{j+1}j!A^{m\ell}(2C_2(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\ell!\max\left(C_{j+m+3}(g)M_\ell,C_{j+\ell+m+3}(g)\right),\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

et

$$\begin{aligned}&\left|D_\lambda^LR_{g,k}(\lambda)\right|\\&\qquad\le C_3C_2^{\ell+1}A^{m\ell}\left(2C_2(\Gamma,\gamma)\right)^{\ell+1}\ell!\max\left(C_{m+2}(g)M_{\ell+m},C_{\ell+m+2}(g)\right).\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Preuve On tire de (4.3.1) que, pour $(j,r)\in\mathbb{N}^2$, tout $L\in\mathbb{N}^s$ et tout $(x,\zeta,\lambda)\in\gamma\times(V(\gamma)\setminus\gamma)\times\Gamma$, on a

$$\begin{aligned}\left|D_x^jD_\lambda^L\mathcal{K}(x,\zeta,\lambda)\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\right|&\le d(\zeta,\gamma)^rC_r(g)\frac{C_2^{j+1}j!}{d(\zeta,\gamma)^{(j+m+3)}}\times\\&\qquad A^{m\ell}C_2(\Gamma,\gamma)^{\ell+1}\ell!\left(d(\zeta,\gamma)^{-1}+\left(\frac{M_\ell}{M_0}\right)^{1/\ell}\right)^\ell.\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Si $d(\zeta,\gamma)^{-1}\le\left(\frac{M_\ell}{M_0}\right)^{1/\ell}$, on obtient, en choisissant $r=j+m+3$,

$$\left|D_x^jD_\lambda^L\mathcal{K}(x,\zeta,\lambda)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\right|\le C_{j+m+3}(g)C_2^{j+1}j!A^{m\ell}\left(2C_2(\Gamma,\gamma)\right)^{\ell+1}\ell!M_\ell, \tag{4.4.5}$$

et, si $d(\zeta,\gamma)^{-1}\ge\left(\frac{M_\ell}{M_0}\right)^{1/\ell}$, on obtient, en choisissant $r=j+\ell+m+3$,

$$\left|D_x^jD_\lambda^L\mathcal{K}(x,\zeta,\lambda)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\right|\le C_{j+\ell+m+3}(g)C_2^{j+1}j!A^{m\ell}(2C_2(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\ell!, \tag{4.4.6}$$

On a donc (4.4.2).

Un calcul analogue donne, pour tout $r \in \mathbb{N}$, tout $L \in \mathbb{N}^s$ et tout $(\zeta, \lambda) \in (V(\gamma) \setminus \gamma) \times \Gamma$,

$$(4.4.7) \quad \left|D_\lambda^L \mathcal{K}_k(\zeta, \lambda)\right| \left|\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\right| \leq \frac{d(\zeta,\gamma)^r C_r(g) C_2^{\ell+1}}{d(\zeta,\gamma)^{m+2}} \times A^{m\ell} C_2(\Gamma,\gamma)^{\ell+1} \ell! \Big(d(\zeta,\gamma)^{-1} + \Big(\frac{M_\ell}{M_0}\Big)^{1/\ell}\Big)^{\ell}.$$

On obtient donc (4.4.3).

5 Division par un polynôme hyperbolique dans des classes ultradifférentiables

Théorème 5.1 *Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$ et, $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda) z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda) z + a_m(\lambda)$, $(z,\lambda) \in \mathbb{C} \times \Omega$, un polynôme ω-hyperbolique.*

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3). On suppose que les fonctions a_k, $k = 1, \ldots, m$, appartiennent à $C_M(\Omega)$. Soit f une fonction appartenant à $C_M(\omega)$.

On peut écrire, de manière unique et pour tout $(x,\lambda) \in \omega \times \Omega$,

$$(5.1.1) \qquad f(x) = P_m(x,\lambda) Q_f(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda).$$

De plus, les fonctions $Q_f(x,\lambda)$ et $R_{f,k}(\lambda)$, $k = 0, \ldots, m-1$, appartiennent respectivement à $C_M(\omega \times \Omega)$ et $C_M(\Omega)$.

Preuve On se donne Γ un compact de Ω et γ un intervalle compact de ω. Pour établir la régularité de Q_f et de $R_{f,k}$, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que γ est bien situé par rapport à Γ, c'est à dire que, pour tout $\lambda \in \Gamma$, les racines de $P_m(z,\lambda)$ appartiennent à un compact contenu dans l'intérieur de γ.

Puisque f appartient à $C_M(\Omega)$, il existe une constante C telle que f appartienne à $C_M(C,\gamma)$. On applique la proposition 2.1 à f avec $I = \gamma$. On note $g = Tf$. La fonction g est de classe C^∞ dans $\mathbb{C}$, à support compact dans $V(\gamma)$. Elle vérifie, de plus,

$$(5.1.2) \qquad g = f, \ \text{sur } \gamma,$$

et, pour tout entier k et tout ζ dans $V(\gamma)$,

$$(5.1.3) \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\right| \leq (EC)^{k+1} M_{k+1} d(\zeta,\gamma)^k \|f\|_{M,C,\gamma}$$

On applique alors la proposition 4.4. On a alors, pour tout $x \in \gamma$ et tout $\lambda \in \Gamma$,

$$f(x) = P_m(x,\lambda) Q_g(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{g,k}(\lambda).$$

Mais, d'après le lemme d'unicité 1.2, pour tout $(x, \lambda) \in \gamma \times \Gamma$, on a $Q_f(x, \lambda) = Q_g(x, \lambda)$ et, pour tout $\lambda \in \Gamma$ et tout k, $k = 0, \dots, m-1$, on a $R_{f,k}(\lambda) = R_{g,k}(\lambda)$. Ceci établit (5.1.1).

On a donc, d'après (4.4.2), pour tout entier j, tout multi-indice L et tout $(x, \lambda) \in \gamma \times \Gamma$,

$$\text{(5.1.4)} \qquad \left|D_x^j D_\lambda^L Q_f\,(x, \lambda)\right| \leq C_3 C_2^{j+1}\, j! A^{m\ell} \left(2C_2\,(\Gamma, \gamma)\right)^{\ell+1} \ell! \times \max\left(C_{j+m+3}\left(g\right) M_\ell, C_{j+\ell+m+3}(g)\right)$$

On obtient alors, d'après (5.1.3),

$$\text{(5.1.5)} \qquad \left|D_x^j D_\lambda^L Q_f(x, \lambda)\right| \leq C_3 C_2^{j+1} A^{m\ell} \left(2C_2(\Gamma, \gamma)\right)^{\ell+1} \times (A^{m+4}EC + 1)^{j+\ell+m+4}\, j! \ell! M_{j+\ell} \|f\|_{M,C,\gamma}.$$

Ceci montre que $Q_f\,(x, \lambda) \in C_M\,(\omega \times \Omega)$.

Un calcul analogue permet d'obtenir, d'après (4.4.3), pour $k = 0, \dots, m-1$, que

$$R_{f,k}\,(\lambda) \in C_M\,(\Omega)\,.$$

Remarque 5.2 On peut noter qu'en vertu du lemme d'unicité 1.2, l'application de $C_M(\omega)$ dans $C_M(\omega \times \Omega)$ qui à f fait correspondre Q_f est linéaire. Elle est continue d'après le théorème 5.1. Il en est de même pour les applications qui à f associe $R_{f,k}$ pour $k = 0, \dots, m-1$.

Remarque 5.3 Pour tout a entier positif, on note $M_{+a} = \{M_{n+a}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Si l'on ne suppose pas que la classe de fonctions C_M est stable par dérivation, alors on peut vérifier que Q_f appartient à $C_{M+2m+4}(\omega \times \Omega)$ et $R_{f,k}$, $k = 0, \dots, m-1$, à $C_{M+2m+3}(\Omega)$. Il s'agit là de ce que l'on peut appeler une "perte finie de régularité". Cela signifie que, si les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$, et f appartiennent à C_M, le quotient et les restes appartiennent à $C_{M_{+a}}$, pour un a convenable.

On peut remarquer qu'une "perte de régularité finie d'ordre m" est inévitable pour une classe ultradifférentiable arbitraire. En effet, il suffit de tester la division par $P_m(z, \lambda) = z^m$ et de constater que, dans ce cas, si les données appartiennent à C_M, le quotient appartient à $C_{M_{+m}}$.

Remarque 5.4 Dans l'énoncé du théorème 5.1 on a supposé que la fonction f et les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$ appartenaient à la même classe C_M.

Soient M et N deux suites de réels croissantes vérifiant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) telles que, pour tout n on ait $M_n \leq N_n$. Si f appartient à $C_N(\omega)$ et les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$ appartiennent à $C_M(\Omega)$ on obtient, en modifiant la preuve du théorème 5.1 que $Q_f\,(x, \lambda) \in C_N\,(\omega \times \Omega)$. On obtient, de même, pour $k = 0, \dots, m-1$, que $R_{f,k}\,(\lambda) \in C_N\,(\Omega)$.

En effet, soit Γ un compact de Ω et γ un compact de ω. Puisque f appartient à $C_N(\omega)$ il existe une constante C telle que f appartienne à (N, C, γ). On a, comme en (5.1.5), pour tout entier j, tout multi-indice L et tout $(x, \lambda) \in \gamma \times \Gamma$,

$$\left|D_x^j D_\lambda^L Q_f(x,\lambda)\right| \le C_3 C_2^{j+1} A^{m\ell}\,(2C_2(\Gamma,\gamma))^{\ell+1} \times (A^{m+4}EC+1)^{j+\ell+m+4}\, j!\ell! N_{j+\ell}\|f\|_{N,C,\gamma} \tag{5.4.1}$$

et des estimées analogues pour $D_\lambda^L R_{f,k}(\lambda)$, $k = 0, \dots, m-1$.

6 Division "à paramètres" par un polynôme hyperbolique dans des classes ultradifférentiables

Il est intéressant dans les applications de disposer d'un théorème de division lorsque la fonction f dépend d'un paramètre. On l'obtient à l'aide des deux lemmes suivants.

Lemme 6.1 *Soit M une suite croissante de nombres réels vérifiant (H_1). Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^t$ et J un multi-indice de $\mathbb{N}^t$ de longueur j. L'application $f \to D^J f$ est linéaire et continue de $C_M(O)$ dans $C_{M_{+j}}(O)$. Plus précisément, soit f une fonction de $C_M(O)$, K un compact de O et $C > 0$ tels que l'on ait $\|f\|_{M,C,K} < \infty$. Alors, on a*

$$\|D^J f\|_{M_{+j},2C,K} \le (2C)^j j! \|f\|_{M,C,K}.$$

Lemme 6.2 *Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^p$. Soit j,un entier, $0 \le j \le p$, $u = (u_1, \dots, u_p)$, un point de U et $I = [0, \epsilon]$ un intervalle vérifiant $\{(u_1, \dots, u_i + v, \dots, u_p)\,;\, v \in I\} \subset U$. Soit $f(x,t)$ une fonction de $C_M(\omega \times U)$ et J un multi-indice de $\mathbb{N}^p$ de longueur j. On considère, la fonction $\Delta f^{J,i,x}$ définie sur I à valeurs dans $C^\infty(\omega)$ par*

$$\Delta f^{J,i,x}(v) = \frac{D_t^J f(x, u_1, \dots, u_i + v, \dots, u_p) - D_t^J f(x, u_1, \dots, u_i, \dots, u_p)}{v},$$
$$(x, v) \in \omega \times I \setminus \{0\},$$

$$\Delta f^{J,i,x}(0) = \frac{\partial}{\partial t_i} D_t^J f(x, u_1, \dots, u_i, \dots, u_p), \quad x \in \omega,$$

C'est une fonction continue de I dans $C_{M_{+j+1}(\omega)}$.

On a alors le théorème de division "à paramètre".

Théorème 6.3 *Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$ et $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda) z^{m-1} + \dots + a_{m-1}(\lambda)\, z + a_m(\lambda)$, $(z,\lambda) \in \mathbb{C} \times \Omega$, un polynôme ω-hyperbolique.*

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3). On suppose que les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$, appartiennent à $C_M(\Omega)$. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction appartenant à $C_M(\omega \times U)$.

On peut écrire, de manière unique et pour tout $(x, \lambda, t) \in \omega \times \Omega \times U$,

$$f(x,t) = P_m(x,\lambda) Q_f(x,\lambda,t) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda,t). \tag{6.3.1}$$

De plus, les fonctions $Q_f(x,\lambda,t)$ *et* $R_{f,k}(\lambda,t)$, $k = 0,\dots,m-1$, *appartiennent respectivement à* $C_M(\omega \times \Omega \times U)$ *et* $C_M(\Omega \times U)$.

Preuve On procède par récurrence. Soit j un entier. On suppose que, pour tout multi-indice Φ de longueur $\phi \le j$, les affirmations suivantes sont vérifiées :

(a) $D_t^\Phi Q_f(x,\lambda,t)$ existe et, pour tout t dans U, appartient à $C_{M_{+\phi}}(\omega \times \Omega)$,
(b) $D_t^\Phi R_f(\lambda,t)$ existe et, pour tout t dans U, appartient à $C_{M_{+\phi}}(\Omega)$,
(c) pour tout (x,λ,t) dans $(\omega \times \Omega \times U)$, on a

$$D_t^\Phi f(x,t) = P_m(x,\lambda) D_t^\Phi Q_f(x,\lambda,t) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k D_t^\Phi R_{f,k}(\lambda,t). \tag{6.3.2}$$

Le théorème 5.1 appliqué à f, avec $N = M$ assure que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $j = 0$.

Soit $J \in \mathbb{N}^p$ de longueur j et $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le p$. On applique alors à nouveau le théorème 5.1 cette fois à $\Delta f^{J,i,x}$ avec $N = M_{+j+1}$. En utilisant la linéarité et la continuité des opérateurs de division, on obtient que $\frac{\partial}{\partial t} D_{t_i}^J Q_f(x,\lambda,t)$ existe et, pour tout t dans U, appartient à $C_{M_{+j+1}}(\omega \times \Omega)$, que $\frac{\partial}{\partial t} D_{t_i}^J R_{f,k}(\lambda,t)$, $k = 0,\dots,m-1$ existe et, pour tout t dans U, appartient à $C_{M_{+j+1}}(\Omega)$. De plus, on a, pour tout (x,λ,t) dans $(\omega \times \Omega \times U)$,

$$\frac{\partial}{\partial t_i} D_t^J f(x,t) = P_m(x,\lambda) \frac{\partial}{\partial t_i} D_t^J Q_f(x,\lambda,t) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k \frac{\partial}{\partial t_i} D_t^J R_{f,k}(\lambda,t). \tag{6.3.3}$$

On a donc démontré les affirmations (a), (b) et (c) pour $j+1$. De là, la formule (6.3.2) est vraie pour tout multi-indice $\Phi \in \mathbb{N}^p$.

On déduit de la formule (6.3.2) et de l'unicité de l'écriture de la division que l'on a, pour tout multi-indice $\Phi \in \mathbb{N}^p$,

$$D_t^\Phi Q_f = Q_{D_t^\Phi f} \text{ et } D_t^\Phi R_{f,k} = R_{D_t^\Phi f,k}.$$

On a donc

$$D_t^\Phi f(x,t) = P_m(x,\lambda) Q_{D_t^\Phi f}(x,\lambda,t) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{D_t^\Phi f,k}(\lambda,t). \tag{6.3.4}$$

L'équation (6.3.4) est l'identité de division de $D_t^\Phi f$.

Puisque f appartient à $C_M(\omega \times U)$, pour tout compact γ de ω et tout compact K de U, il existe une constante C telle que f appartienne à $(M, C, \gamma \times K)$. De là, d'après le lemme 6.1, $D_t^\Phi f$ appartient à $(M{+}\phi, 2C, \gamma \times K)$ et l'on a

$$\|D_t^\Phi f\|_{M_{+\phi},2C,\gamma\times K} \leq (2C)^\phi\ \phi!\ \|f\|_{M,C,\gamma\times K}.$$

On a donc, d'après la remarque 5.4 appliquée, pour tout multi-indice Φ et tout $t \in K$, à $D_t^\Phi f$ avec $N = M_{+\phi}$, pour tout entier j, tout multi-indice L et tout $(x, \lambda) \in \gamma \times \Gamma$,

$$\begin{aligned}\left|D_x^j D_\lambda^L Q_{D_t^\Phi f}(x,\lambda)\right| \leq C_3 C_2^{j+1} A^{m\ell} \left(2C_2(\Gamma,\gamma)\right)^{\ell+1} \times \\ (A^{(m+4)}E2C+1)^{j+\ell+m+4}\, j!\ell! M_{j+\ell+\phi} \times \|D_t^\Phi f\|_{M_{+\phi},2C,\gamma\times K}.\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\left|D_x^j D_\lambda^L Q_{D_t^\Phi f}(x,\lambda)\right| \leq C_3 C_2^{j+1} A^{m\ell} \left(2C_2(\Gamma,\gamma)\right)^{\ell+1} \times \\ (A^{(m+4)}E2C+1)^{j+\ell+\phi+m+4}\, j!\ell!\phi! \times M_{j+\ell+\phi}\|f\|_{M,C,\gamma\times K}.\end{aligned}$$

Ceci montre que $Q_f(x, \lambda, t)$ appartient à $C_M(\omega \times \Omega \times U)$.

Un calcul analogue permet d'établir que, pour $k = 0, \dots, m-1$, $R_{f,k}(\lambda, t)$ appartient à $C_M(\Omega \times U)$.

On déduit immédiatement du théorème 6.3 le corollaire suivant (voir [15, p. 104, remarque 4.7]).

Corollaire 6.4 *Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$ et, $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda) z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda) z + a_m(\lambda)$, $(z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \Omega$, un polynôme ω-hyperbolique.*

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3).

On suppose que les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$, appartiennent à $C_M(\Omega)$. Alors l'idéal $P_m C_M(\omega \times \Omega)$ est fermé dans $C_M(\omega \times \Omega)$.

Pour d'autres résultats concernant les idéaux fermés dans une classe C_M, on pourra consulter les travaux de V. Thilliez [14].

7 Remarques sur la régularité des racines d'un polynôme hyperbolique

Lemme de Hensel 7.1 *Soit M vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3). Soit $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda) z^{m-1} + a_2(\lambda) z^{m-2} + \cdots + a_{m-1}(\lambda) z + a_m(\lambda)$ un polynôme unitaire de degré m dont les coefficients sont des fonctions de classe $C_M(\Omega)$, où Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^t$ contenant 0.*

Si $P_m(z, 0) = z^s Q_{m-s}(z)$, avec $Q_{m-s}(0) \neq 0$ il existe un ouvert connexe Ω', vérifiant $0 \in \Omega' \subset \Omega$ et deux polynômes G_1 et G_2 unitaires et de degré respectivement s et $m-s$ dont les coefficients sont des fonctions de classe $C_M(\Omega')$ tels que l'on ait $P_m(z,\lambda) = G_1(z,\lambda) G_2(z,\lambda)$, avec $G_1(z, 0) = z^s$ et $G_2(z, 0) = Q_{m-s}(z)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-050-1 Published online by Cambridge University Press

Preuve Elle se mène comme la preuve classique du théorème de préparation de Weierstrass. Puisque P_m est holomorphe en z et continu en λ, il existe un réel $r > 0$ et un pavé Ω', $0 \in \Omega' \subset \Omega$ tels que, pour tout $\lambda \in \Omega'$, $P_m(z, \lambda)$ ait précisément s zéros comptés avec leur ordre de multiplicité dans le disque $|z| < r$ et aucun zéro sur le bord. On note $\mu_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, s$ ces racines. On a, pour tout $k = 1, \dots, s$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{\partial P_m(\zeta, \lambda)}{\partial z} \frac{1}{P_m(\zeta, \lambda)} \zeta^k d\zeta = \sum_{j=1}^{s} \big(\mu_j(\lambda)\big)^k = \beta_k(\lambda).$$

Les fonctions β_k appartiennent à $C_M(\Omega')$ et, de là, d'après les formules de Newton, le polynôme $G_1(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{s}(z - \mu_j(\lambda))$ est à coefficients dans $C_M(\Omega')$. Pour tout λ dans Ω', le quotient $\frac{P_m}{G_1}(z, \lambda)$ est une fonction holomorphe en z dans le disque $|z| < r$ qui ne s'annule pas sur le bord de ce disque. C'est un polynôme, d'après l'unicité du quotient et du reste pour la division dans l'anneau des polynômes. Pour tout λ dans Ω' et tout z, $|z| < r$, la formule de Cauchy appliquée sur le bord dudisque $|z| < r$ montre que $\lambda \to \frac{P_m}{G_1}(z, \lambda)$ appartient à $C_M(\Omega')$.

Remarque 7.2 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^s$, $s \geq 1$, ω un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et P_m un polynôme ω-hyperbolique. Si l'on peut écrire

$$P_m(z, \lambda) = \prod_{k=1}^{m} \big(z - \mu_k(\lambda)\big),$$

où les fonctions $\mu_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, m$, appartiennent à $C_M(\Omega)$, on a, de manière presque évidente, l'estimation suivante. Pour tout compact $\Gamma \subset \Omega$ et tout compact $\gamma \subset \omega$, bien situé par rapport à Γ, il existe une constante $C_5(\Gamma, \gamma) \geq 1$ telle que, pour tout $(z, \lambda) \in (V(\gamma) \setminus \gamma) \times \Gamma$ et tout multi-indice $L \in \mathbb{N}^s$ de longueur ℓ, on ait

$$\left| D_\lambda^L \Big(\frac{1}{P_m(z, \lambda)} \Big) \right| \leq \frac{1}{|P_m(z, \lambda)|} C_5(\gamma, K)^{\ell+1} \ell! \sum_{0 \leq k \leq \ell} \frac{M_k}{d(z, \gamma)^{\ell-k}}. \tag{7.2.1}$$

ce qui implique (3.2.1). Bien sûr, un polynôme hyperbolique dont les coefficients appartiennent à $C_M(\Omega)$ n'a pas toujours des racines régulières.

On rappelle l'exemple : $P_2(z, \lambda_1, \lambda_2) = z^2 - \big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\big)$.

Remarque 7.3 Soit $P_m(z, \lambda) = z^m + a_1(\lambda) z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda) z + a_m(\lambda)$, $(z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \Omega$, un polynôme $\mathbb{R}$-hyperbolique à coefficients dans $C^\infty(\Omega)$, Ω étant un ouvert connexe de $\mathbb{R}^s$, $s \geq 1$. S. Wakabayashi [16] donne une nouvelle preuve du résultat de M. D. Bronshtein [3] et montre que les racines classées par ordre croissant vérifient une condition de Lipschitz sur les compacts de Ω, la constante de Lipschitz ne dépendant que du compact et des coefficients du polynôme. De là, il déduit les estimations du lemme 3.1 de la section 3. Ce résultat de régularité semble en contradiction avec un exemple fourni par D. Alekseevsky, A. Kriegl, P. W. Michor et M. Losik dans [1, p. 209] ; une vérification immédiate met en évidence une erreur dans le calcul de la ligne 8, p. 210. Sur ce sujet, le lecteur pourra consulter la note en fin d'article.

Remarque 7.4 Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3) quasi-analytique, c'est à dire vérifiant

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\big(M_n\big)^{1/n}} = +\infty.$$

Soit $P_m(z,t) = z^m + a_1(t)z^{m-1} + a_2(t)z^{m-2} + \cdots + a_{m-1}(t)z + a_m(t)$ un polynôme unitaire de degré m dont les coefficients sont des fonctions de classe $C_M(I)$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. On suppose que $P_m(z,t)$ est $\mathbb{R}$-hyperbolique. On se propose de démontrer les résultats suivants qui sont des variantes de résultats de D. Alekseevsky, A. Kriegl, P. W. Michor et M. Losik. La méthode de preuve s'inspire largement de leur travail et utilise le lemme de Hensel 7.1.

Lemme 7.5 *Il existe un intervalle J, $0 \in J \subset I$ et des fonctions réelles $\mu_j(t)$, $j = 1,\dots,m$, appartenant à $C_M(J)$ et telles que, pour chaque $t \in J$, $\{\mu_j(t), j = 1,\dots,m\}$ soit l'ensemble des racines du polynôme $P_m(z,t)$.*

Preuve Elle se conduit par récurrence sur le degré du polynôme. Pour $m = 1$ le résultat est évident. On note $x_j(t)$, $j = 1,\dots,m$ les racines de $P_m(z,t)$.

On suppose d'abord que $P_m(z,0)$ a des racines distinctes. Quitte à faire une translation sur z, on peut supposer que $P_m(z,0) = z^s\, Q_{m-s}(z)$ avec $Q_{m-s}(0) \neq 0$. En utilisant le lemme 7.1, on peut écrire sur un intervalle convenable J, $0 \in J \subset I$, $P_m(z,t)$ comme un produit de deux polynômes $\mathbb{R}$-hyperboliques sur J dont les coefficients appartiennent à $C_M(J)$; on conclut alors grâce à l'hypothèse de récurrence.

On suppose maintenant que toutes les racines de $P_m(z,0)$ sont confondues. On considère alors le polynôme

$$Q_m(z,t) = P_m\Big(z - \frac{a_1(t)}{m}, t\Big) = z^m + b_2(t)z^{m-2} + \cdots + b_{m-1}(t)z + b_m(t).$$

C'est un polynôme $\mathbb{R}$-hyperbolique dont les coefficients appartiennent à $C_M(I)$ et tel que 0 soit racine de $Q_m(z,0)$ avec la multiplicité m. On note $y_j(t)$, $j = 1,\dots,m$ les racines de $Q_m(z,t)$; bien sûr, on a

$$y_j(t) - \frac{a_1(t)}{m} = x_j(t),\ j = 1,\dots,m.$$

On remarque que $-2b_2(t) = \sum_{j=1}^m y_j(t)^2$. On déduit de là trivialement que la j-ième fonction symétrique des racines vérifie $\big|b_j(t)\big| \leq C(m)\,|b_2(t)|^{j/2}$, pour $j = 3,\dots,m$.

Deux cas se présentent.

Premier cas : $b_2(t) = 0$, pour tout $t \in I$. On a alors $y_j(t) = 0$, $j = 1,\dots,m$ et donc $\frac{-a_1(t)}{m} = x_j(t)$, $j = 1,\dots,m$, ce qui achève la preuve.

Deuxième cas : $b_2(t)$ n'est pas identiquement nul sur I. La quasi-analyticité de la classe $C_M(I)$ implique alors qu'il existe un entier pair 2β tel que les dérivées de $b_2(t)$ d'ordre ℓ, $\ell \leq 2\beta-1$ soient nulles en 0 et la dérivée d'ordre 2β soit non nulle en 0. On peut alors écrire, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, $b_2(t) = t^{2\beta}c_2(t)$,

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-050-1 Published online by Cambridge University Press

pour tout $t \in I$ avec $c_2(t)$ dans $C_M(I)$ et $c_2(0) \neq 0$. De même, pour $j = 3, \ldots, m$, on peut écrire $b_j(t) = t^{j\beta} c_j(t)$, pour tout $t \in I$ avec $c_j(t)$ dans $C_M(I)$. On considère alors le polynôme

$$R_m(z,t) = z^m + c_2(t) z^{m-2} + \cdots + c_{m-1}(t) z + c_m(t).$$

C'est un polynôme $\mathbb{R}$-hyperbolique dont les coefficients appartiennent à $C_M(I)$ et on a $Q_m\left(t^\beta z, t\right) = t^{m\beta} R_m(z,t)$. On note $\zeta_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, les racines de $R_m(z,t)$; bien sûr, on a

$$y_j(t) = t^\beta \zeta_j(t), \ j = 1, \ldots, m.$$

On remarque, puisque $c_2(0) \neq 0$ et que $c_1(0) = 0$, que $R_m(z,0)$ a des racines distinctes ; on est donc ramené à une situation déjà étudiée, ce qui achève la preuve.

On peut facilement, du fait de la quasi-analycité de la classe C_M, globaliser la construction et obtenir la proposition suivante.

Proposition 7.6 *Soit $P_m(z,t) = z^m + a_1(t) z^{m-1} + a_2(t) z^{m-2} + \cdots + a_{m-1}(t) z + a_m(t)$ un polynôme unitaire de degré m dont les coefficients sont des fonctions de classe $C_M(I)$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et M est quasi-analytique. On suppose que $P_m(z,t)$ est $\mathbb{R}$-hyperbolique.*

Il existe des fonctions réelles $\mu_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, appartenant à $C_M(I)$ telles que, pour chaque $t \in I$, $\left\{\mu_j(t),\ j = 1, \ldots, m\right\}$ soit l'ensemble des racines du polynôme $P_m(z,t)$.

8 Remarque sur le résultat de C. L. Childress

Soit $M = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, une suite vérifiant (H_1) et (H_2). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^s$ et f une fonction de classe C^∞ dans Ω. Pour tout $C > 0$, on note

$$\|f\|_{M,C,\Omega} = sup_{x \in \Omega, J \in \mathbb{N}^s} \frac{|D^J f(x)|}{j! C^j M_j},$$

où j désigne la longueur du multi-indice J, c'est à dire l'ordre de la dérivation D^J. On note (M, C, Ω) l'espace des fonctions f de classe C^∞ dans Ω telles que

$$\|f\|_{M,C,\Omega} < \infty.$$

On note $C_M(\mathbb{R}^s, 0)$ l'espace des germes en 0 de fonctions appartenant dans un voisinage ouvert Ω de 0 à (M, C, Ω), pour une constante $C > 0$ convenable.

Théorème 8.1 *Soit $M = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $N = \{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites vérifiant (H_1) et (H_2). On suppose que, l'on a $M_n \leq N_n$, pour tout $n \geq 0$.*

Soit $P_m(z,t) = z^m + a_1(t) z^{m-1} + a_2(t) z^{m-2} + \cdots + a_{m-1}(t) z + a_m(t)$ un polynôme unitaire de degré m dont les coefficients sont des fonctions de classe $C_M(I)$, où I est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^s$ contenant 0. On suppose que $a_1(0) = \cdots = a_m(0) = 0$ et que, dans tout voisinage O de $(0,0)$ dans $\mathbb{C} \times I$, il existe un couple (ξ, t), $\xi \notin \mathbb{R}$ tel que

$P_m(\xi, t) = 0$. *On suppose que, toute fonction f appartenant à $C_M(\mathbb{R}, 0)$, puisse s'écrire, au sens des germes,*

$$f(x) = P_m(x,t)Q_f(x,t) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(t), \tag{8.1.1}$$

avec Q_f dans $C_N(\mathbb{R}^{s+1}, 0)$ et $R_{f,k}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, dans $C_N(\mathbb{R}^s, 0)$.

Alors la suite N est non quasi-analytique.

Preuve On suppose la suite N quasi-analytique. En suivant la première étape de la preuve de C. D. Childress, on est ramené à la situation suivante.

Soit V un intervalle ouvert et C_1 une constante strictement positive. Il existe alors un intervalle ouvert W, $0 \in W$, $W \subset V$, un pavé ouvert J vérifiant $0 \in J \subset I$ et des constante C_2 et C_3, strictement positives tels que l'on ait, pour tout f appartenant à (M, C_1, V) et tout (x, t) dans $(W \times J)$,

$$f(x) = P_m(x,t)Q_f(x,t) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(t), \tag{8.1.2}$$

avec $Q_f \in (N, C_2, W \times J)$ et $R_{f,k} \in (N, C_2, J)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, vérifiant

$$\|Q_f\|_{N,C_2,W\times J} \le C_3 \|f\|_{M,C_1,V} \quad \text{et} \qquad \|R_{f,k}\|_{N,C_2,J} \le C_3 \|f\|_{M,C_1,V}. \tag{8.1.3}$$

Puisque la classe N est quasi-analytique, Q_f et $R_{f,k}$ sont uniques et déterminés par leur développement de Taylor à l'origine.

Soit P un polynôme, $P \in \mathbb{C}[z]$. On peut effectuer la division dans $\mathbb{C}[z]$ de P par le polynôme générique $\tilde{P}_m(z, \lambda) = z^m + \lambda_1 z^{m-1} + \lambda_2 z^{m-2} + \cdots + \lambda_{m-1} z + \lambda_m$, pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. On a, pour (z, λ) dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$,

$$P(z) = \tilde{P}_m(z,\lambda)\tilde{Q}_P(z,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \tilde{R}_{P,k}(\lambda), \tag{8.1.4}$$

avec $\tilde{Q}_P$ et $\tilde{R}_{P,k}$, $k = 0, 1 \dots, m-1$, des polynômes.

Si on pose dans (8.1.4), pour tout i, $i = 1, \dots, m$, $\lambda_i = a_i(t)$, $t \in I$, on a, sur $\mathbb{C} \times I$,

$$P(z) = P_m(z,t)\tilde{Q}_P(z, a(t)) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k \tilde{R}_{P,k}(a(t)). \tag{8.1.5}$$

On remarque que l'hypothèse (H_2) implique que M contient la classe analytique et donc, tout polynôme P appartient à (M, C_1, V). Si on applique (8.1.2) avec $f = P$, on déduit de l'unicité de l'écriture de la division que l'on a, pour tout t dans J et x dans W,

$$\tilde{Q}_P(x, a(t)) = Q_P(x,t) \text{ et } \tilde{R}_{P,k}(a(t)) = R_{P,k}(t), k = 0, 1 \dots, m-1. \tag{8.1.6}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-050-1 Published online by Cambridge University Press

Par hypothèse, il existe (z_0, t_0) dans $\mathbb{C} \times J$, $z_0 \notin \mathbb{R}$ tel que l'on ait $P_m(z_0, t_0) = 0$. On déduit de (8.1.5)

$$P(z_0) = \sum_{k=0}^{m-1} z_0^k \tilde{R}_{P,k}\big(a(t_0)\big) \tag{8.1.7}$$

et donc, d'après (8.1.3) et (8.1.6),

$$|P(z_0)| \leq \Big(\sum_{k=0}^{m-1} |z_0|^k\Big) C_3 \|P\|_{M,C_1,V}. \tag{8.1.8}$$

Mais, puisque z_0 n'est pas réel, une inégalité comme (8.1.8) est impossible. En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $V =]-\alpha, \alpha[$. Soit U un voisinage ouvert borné de $[-\alpha, \alpha]$ dans $\mathbb{C}$ et $\overline{U}$ son adhérence tels que $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ soit connexe et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}$. Le théorème de Runge permet de construire une suite de polynômes P_j tels que l'on ait

$$P_j(z_0) = 1 \text{ et } \sup_{z \in U} |P_j(z)| \leq 2^{-j}.$$

De là, en appliquant la formule de Cauchy, il existe une constante D telle que l'on ait

$$\|P_j\|_{M,C_1,V} \leq 2^{-j} sup_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{D^\ell}{M_\ell} < \infty.$$

On a utilisé ici (H_2). On a alors,

$$1 \leq \Big(\sum_{k=0}^{m-1} |z_0|^k\Big) C_3 2^{-j} \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{D^\ell}{M_\ell},$$

pour tout entier j. Ceci est absurde.

9 Division par $z^2 + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dans la classe $G^{1+\alpha}$

Proposition 9.1 *Toute fonction f de $G^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ peut s'écrire*

$$f(x) = (x^2 + \lambda^2) Q_f(x, \lambda) + x R_{f,1}(\lambda) + R_{f,0}(\lambda), \tag{9.1.1}$$

avec $Q_f(x, \lambda)$ appartenant à $G^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $R_{f,1}(\lambda)$ et $R_{f,0}(\lambda)$ appartenant à $G^{1+\alpha}(\mathbb{R})$.

Preuve Soit f une fonction de $G^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, c'est à dire telle que, pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $C(I, f) \geq 1$ vérifiant, pour tout entier k,

$$\sup_{x \in I} \left| f^{(k)}(x) \right| \leq C(I, f)^{k+1} k!^{1+\alpha}.$$

On considère son développement de Taylor en 0,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \mathcal{A}(x).$$

C'est une série formelle appartenant à $G^{1+\alpha}[x]$, c'est à dire vérifiant des inégalités de la forme $|a_k| \leq C^{k+1}k!^{\alpha}$, pour tout entier k et pour une constante $C \geq 1$, (indépendante de k) convenable. On sait que l'on peut écrire, au sens des séries formelles en $(0,0)$,

$$\mathcal{A}(x) = \left(x^2 + \lambda^2\right) Q_{\mathcal{A}}(x,\lambda) + x\mathcal{R}_{\mathcal{A},1}(\lambda) + \mathcal{R}_{\mathcal{A},0}(\lambda),$$

et on a (voir [6])

$$Q_{\mathcal{A}}(x,\lambda) \in G^{1+\alpha}[x,\lambda]$$

et

$$\left(\mathcal{R}_{\mathcal{A},1}(\lambda), \mathcal{R}_{\mathcal{A},0}(\lambda)\right) \in \left(G^{1+\alpha}[\lambda]\right)^2.$$

Puisque le théorème de Borel est vrai pour les classes de Gevrey [11], il existe des fonctions $R_{f,1}(\lambda)$ et $R_{f,0}(\lambda)$ de $G^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ et dont les développements de Taylor en 0 coïncident, respectivement, avec $\mathcal{R}_{\mathcal{A},1}(\lambda)$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A},0}(\lambda)$. De même, il existe une fonction $\tilde{Q}_f(x,\lambda)$ de $G^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^2\right)$ dont le développement de Taylor en $(0,0)$ coïncide avec $Q_{\mathcal{A}}(x,\lambda)$. La fonction

$$\tilde{f}(x,\lambda) = f(x) - \left(x^2 + \lambda^2\right)\tilde{Q}_f(x,\lambda) + xR_{f,1}(\lambda) + R_{f,0}(\lambda)$$

est, par construction, plate en $(0,0)$. On vérifie aisément que la fonction $\hat{Q}_f(x,\lambda)$, définie par

$$\hat{Q}_f(x,\lambda) = \frac{\tilde{f}(x,\lambda)}{\left(x^2+\lambda^2\right)}, \text{ si } x^2 + \lambda^2 \neq 0,$$

et

$$\hat{Q}_f(x,\lambda) = 0, \text{ si } x^2 + \lambda^2 = 0,$$

appartient à $G^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^2\right)$. (On peut consulter [13], pour des résultats plus généraux de ce type). On peut donc écrire, pour tout $(x,\lambda) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \left(x^2+\lambda^2\right)\left(\tilde{Q}_f(x,\lambda) + \hat{Q}_f(x,\lambda)\right) + xR_{f,1}(\lambda) + R_{f,0}(\lambda).$$

On a donc réalisé la division de f par $\left(x^2+\lambda^2\right)$, sans perte de régularité, dans la classe de Gevrey $G^{1+\alpha}$.

Remarques En substituant dans (9.1.1) λ par λ^p, p entier, on obtient un résultat de division sans perte de régularité par $(x^2 + \lambda^{2p})$.

La même méthode donne aussi un résultat de division sans perte de régularité par $\left(x^{2m} + \lambda^{2m}\right)$ et donc par $\left(x^{2m} + \lambda^{2pm}\right)$.

On notera à cette occasion que la division sans perte de régularité par un polynôme dans la classe de Gevrey $G^{1+\alpha}$ est sans lien avec le caractère fermé ou non des ideaux engendrés dans la classe par ces polynômes. L'idéal engendré par $(x^2+\lambda^2)$ est fermé alors que l'idéal engendré par $(x^2+\lambda^4)$ ne l'est pas [13].

A contrario, la division par $(x^m + \lambda)$ fait apparaître une perte de régularité liée à l'exposant m. En effet, si f est une fonction de la classe de Gevrey $G^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, la division par $(x^m+\lambda)$ donne

$$f(x) = (x^m+\lambda)Q_f(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda),$$

et on peut vérifier, sur les développements de Taylor en 0, que les différents restes $R_{f,k}(\lambda)$, $k = 0, \dots, m-1$, appartiennent, au mieux, à $G^{1+m\alpha}(\mathbb{R})$.

10 Remarque sur les classes de Beurling

Tous les résultats présentés dans les paragraphes précédents pour les classes de Carleman C_M ont des versions pour les classes de Beurling B_M. A titre d'exemple, on donne une version "Beurling" du théorème 5.1.

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante de réels positifs et soit O un ouvert de $\mathbb{R}^t$.

On dit qu'une fonction g appartient à la classe ultradifférentiable $B_M(O)$ si, pour tout compact $K \subset O$ et toute constante $C > 0$ on a,

$$\sup_{x\in K, L\in\mathbb{N}^t, \ell=|L|} \frac{|D^L g(x)|}{\ell! M_\ell C^\ell} = \|g\|_{M,C,K} < \infty.$$

On a le lemme suivant dont une variante a déjà été utilisée dans [4, Proposition 17].

Lemme 10.1 *Soit M une suite croissante de réels positifs vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3), O un ouvert de $\mathbb{R}^t$, g une fonction de $B_M(O)$ et V un ouvert relativement compact de O. Il existe une suite N croissante de nombre réels positifs vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3) telle que l'on ait,*

$$\sup_{x\in\bar V, L\in\mathbb{N}^t, \ell=|L|} \frac{|D^L g(x)|}{\ell! N_\ell} = \|g\|_{N,1,\bar V} < \infty \tag{10.1.1}$$

et

$$\text{pour tout } C > 0, \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{N_\ell}{C^\ell M_\ell} < \infty. \tag{10.1.2}$$

L'affirmation (10.1.1) signifie que la fonction g appartient à $C_N(V)$ et l'affirmation (10.1.2) signifie que, pour tout ouvert W de $\mathbb{R}^t$ $C_N(W) \subset B_M(W)$.

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3). Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$ et $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(\lambda)z + a_m(\lambda)$, un polynôme ω-hyperbolique. On suppose que les fonctions a_k , $k = 1, \dots, m$, appartiennent à $B_M(\Omega)$. On applique le lemme 10.1. aux fonctions a_k , $k = 1, \dots, m$. On notera qu'alors, pour tout compact Γ, les fonctions a_k, $k = 1, \dots, m$ appartiennent à $C_N(\Gamma)$, pour une suite N bien choisie vérifiant (10.1.2). On a la version suivante du lemme 3.2.

Lemme 10.2 *Pour tout compact $\Gamma \subset \Omega$ et tout intervalle compact $\gamma \subset \omega$ bien situé par rapport à Γ, il existe une suite N croissante de nombres réels positifs satifaisant (H_1), (H_2) et (H_3) et*

$$\text{pour tout } C > 0, \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{N_\ell}{C^\ell M_\ell} < \infty. \tag{10.2.1}$$

Il existe aussi une constante $C_2(\Gamma,\gamma) \geq 1$ telle que, pour tout $(z,\lambda) \in (V(\gamma)\backslash\gamma) \times \Gamma$ et tout multi-indice $L \in \mathbb{N}^s$ de longueur ℓ, on ait

$$(10.2.2) \quad \Big| D_\lambda^L\Big(\frac{1}{P_m(z,\lambda)}\Big)\Big| \leq \frac{1}{|P_m(z,\lambda)|} A^{m\ell} C_2(\Gamma,\gamma)^{\ell+1}\ell!\Big(d(z,\gamma)^{-1}+\Big(\frac{N_\ell}{N_0}\Big)^{1/\ell}\Big)^\ell.$$

Théorème 10.3 *Soit ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^s$ et, $P_m(z,\lambda) = z^m + a_1(\lambda)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda)z + a_m(\lambda)$, $(z,\lambda) \in \mathbb{C}\times\Omega$, un polynôme ω-hyperbolique.*

Soit $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3). On suppose que les fonctions a_k, $k = 1,\dots,m$, appartiennent à $B_M(\Omega)$. Soit f une fonction appartenant à $B_M(\omega)$.

On peut écrire, de manière unique et pour tout $(x,\lambda) \in \omega\times\Omega$,

$$f(x) = P_m(x,\lambda)Q_f(x,\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k R_{f,k}(\lambda).$$

De plus, les fonctions $Q_f(x,\lambda)$ et $R_{f,k}(\lambda)$, $k = 0,\dots,m-1$, appartiennent respectivement à $B_M(\omega\times\Omega)$ et $B_M(\Omega)$.

Preuve Puisque f appartient à $B_M(\omega)$ alors f appartient à (M,ε,γ), pour tout compact $\gamma\subset\omega$ et toute constante $\varepsilon > 0$. On a donc, pour le prolongement de f, l'inégalité (2.1.2) à savoir,

$$\Big|\frac{\partial T(f)}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\Big| \leq (E\varepsilon)^{k+1}M_{k+1}d(\zeta,I)^k\|f\|_{M,\varepsilon,I}.$$

De là, on déduit, en adaptant la formule (5.1.4), pour tout entier j, tout multi-indice L et tout $(x,\lambda)\in\gamma\times\Gamma$ et toute constante $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\big|D_x^j D_\lambda^L Q_f(x,\lambda)\big| \leq C_3 C_2^{j+1} A^{m\ell}\,(2C_2(\Gamma,\gamma))^{\ell+1}\,(EA^{m+4}+1)^{j+\ell+m+4}\times\\ C(\varepsilon)\varepsilon^{j+\ell+m+4}\,j!\ell!M_{j+\ell}\|f\|_{M,\varepsilon,\gamma}\end{aligned}$$

et donc, $Q_f(x,\lambda)$ appartient à $B_M(\omega\times\Omega)$. (On a utilisé que, d'après (10.2.1), il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que, pour tout entier ℓ, on ait $N_\ell \leq C(\varepsilon)\varepsilon^\ell M_\ell$.)

Note Les auteurs remercient le referee qui les a informés de la publication [17] où l'exemple erroné est mentionné (Remarque 7.3).

Références

[1] D. Alekseevsky, A. Kriegl, P. W. Michor and M. Losik, *Choosing roots of polynomials smoothly.* Israel J. Math. **105**(1998), 203–233.

[2] M. D. Bronshtein, *Smoothness of roots of polynomials depending on parameters.* Siberian J. Math. **20**(1979), 347–352.

[3] ———, *Division with remainder in spaces of smooth functions.* Trans. Moscow Math. Soc. (1990), 109–138.

[4] J. Chaumat et A. M. Chollet, *Surjectivité de l'application restriction à un compact dans des classes de fonctions ultradifférentiables.* Math. Ann. **298**(1994), 7–40.
[5] ———, *Sur le théorème de division de Weierstrass.* Studia Math.**116**(1995), 59–84
[6] ———, *Caractérisation des anneaux noethériens de séries formelles à croissance contrôlées. Application à la synthèse spectrale.* Publicationes Mat. **41**(1997), 545–561.
[7] C. L. Childress, *Weierstrass division in quasianalytic local rings.* Can. J. Math. **28**(1976), 938–953.
[8] E. M. Dynkin, *Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale.* Amer. Math. Soc. Trans. **115**(1980), 33–58.
[9] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I.* 2ième édition, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[10] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions.* Oxford, Oxford Université Press, 1966.
[11] H. J. Petzsche, *On E. Borel's theorem.* Math. Ann. **63**(1988), 71–88.
[12] V. Thilliez, *On closed ideals in smooth classes.* Math. Nachr. **227**(2001), 143–157.
[13] ———, *A sharp division estimate for ultradifferentiable germs.* Pac. J. Math. **205**(2002), 337–256.
[14] ———, *Bounds for quotients in rings of formal power series with growth constraints.* Studia Math. **151**(2002), 49–65.
[15] J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables.* Springer-Verlag, Berlin, 1972.
[16] S. Wakabayashi, *Remarks on hyperbolic polynomials.* Tsukuba J. Math. **10**(1986), 17–28.
[17] D. Alekseevsky, A. Kriegl, P. W. Michor et M. Losik, *Choosing roots of polynomials smoothly, II.* Israel J. Math. **139**(2003), 183–188.

U.M.R. 8628
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France
e-mail: Jacques.Chaumat@math.u-psud.fr

U.M.R. 8524
Bâtiment M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France
e-mail: chollet@agat.univ-lille1.fr