Canad. Math. Bull. Vol. **44** (3), 2001 pp. 323–334

Une classe d'hamiltoniens polynomiaux isochrones

Bertrand Schuman

Résumé. Soit $H_0 = \frac{x^2+y^2}{2}$ un hamiltonien isochrone du plan $\mathbb{R}^2$. On met en évidence une classe d'hamiltoniens isochrones qui sont des perturbations polynomiales de H_0. On obtient alors une condition nécessaire d'isochronisme, et un critère de choix pour les hamiltoniens isochrones. On voit ce résultat comme étant une généralisation du caractère isochrone des perturbations hamiltoniennes homogènes considérées dans [L], [P], [S].

Abstract. Let $H_0 = \frac{x^2+y^2}{2}$ be an isochronous Hamiltonian of the plane $\mathbb{R}^2$. We obtain a necessary condition for a system to be isochronous. We can think of this result as a generalization of the isochronous behaviour of the homogeneous polynomial perturbation of the Hamiltonian H_0 considered in [L], [P], [S].

Introduction

On utilise la théorie des formes normales de germes de champs de vecteurs à l'origine tangents à $\Xi_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i})$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 1$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

On est interessé par le problème de la linéarisation des champs de vecteurs ayant pour partie linéaire X^0 dans le cas hamiltonien.

Dans le cas $n = 1$, on est dans le cas particulier du problème de la linéarisation des champs hamiltoniens du plan $\mathbb{R}^2$, ayant pour partie linéaire une rotation à l'origine, autrement dit, du problème du centre isochrone hamiltonien. Ceci est le cadre de notre étude des perturbations polynomiales de $H_0 = \frac{x^2+y^2}{2}$.

La forme normale utilisée, dans le cas hamiltonien considéré ici, est la forme normale de Birkhoff.

Dans le premier paragraphe, on prépare la présentation de la notion d'hamiltonien du plan dans le cadre de la théorie des formes normales de familles d'hamiltoniens polynomiaux au voisinage d'un point elliptique de type de Birkhoff [F1] dans $\mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 1$. On écrit alors explicitement les transformations de Lie et les équations homologiques donnant les coefficients des séries normalisantes de Birkhoff.

Puis, au paragraphe 2, dans le cas du plan, on caractérise les champs homogènes en leur attachant les deux premiers coefficients de Birkhoff, qui sont algébriques en les coefficients de la perturbation polynomiale de H_0, et définissent les sphères de Birkhoff. Ces sphères fibrent l'espace des coefficients, et donnent une obstruction à l'intégrabilité [S]. Le caractère isochrone linéaire, *i.e.*, le cas trivial H_0, devient alors clair lorsqu'on étudie la fibre en zéro, avec les propositions 2.1 et 2.2. Le résultat sur la

Reçu par les éditeurs le 16 juillet, 1998; revisée le 12 décembre, 2000.
Classification (AMS) par sujet: 34C20, 58F05, 58F22, 58F30.
Mots clés: Hamiltonian system, normal forms, resonance, linearization.

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-032-9 Published online by Cambridge University Press

non-existence de perturbations isochrones homogènes, théorème 2.3, a été démontré de façon indépendante par C.-J. Christopher et J. Devlin [Ch.D] par des arguments de nature complétement différente.

Au paragraphe 3, on étudie des perturbations plus générales. Le théorème 3.4 permet de donner une condition nécessaire d'isochronisme en cernant une classe d'hamiltoniens par des hypothèses sur certains des coefficients de la perturbation polynomiale. De nombreux exemples sont donnés.

1 Équations homologiques et formes normales

Soit $\big(\mathbb{R}^{2n}, (x, y)\big)$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, avec la 2-forme symplectique $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$. On note

$$\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad \beta = \beta_1, \dots, \beta_n \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n \quad (\alpha - \beta) = (\alpha_i - \beta_i, \dots, \alpha_n - \beta_n)$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \quad \overline{z}^\beta = \overline{z}_1^{\beta_1} \cdots \overline{z}_n^{\beta_n}.$$

On considère l'hamiltonien $H = H_0 + \epsilon H_1$ avec

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i^2 + y_i^2) \tag{1}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \tag{$*$}$$

et

$$H_1 = \sum_{|\alpha|+|\beta|=d} A_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \tag{2}$$

une perturbation polynomiale homogène de H_0.

Soit Ξ_0 le champ de vecteurs hamiltonien associé à H_0 : $i(\Xi_0)\omega = -dH_0$, $\Xi_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (-y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial y_i})$. Il est pertinent de faire un changement de coordonnées pour étudier, en particulier, les valeurs propres de Ξ_0. On pose $z_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + \sqrt{-1} y_i)$ et $\overline{z}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - \sqrt{-1} y_i)$, alors $\omega = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{-1} dz_i \wedge d\overline{z}_i$. Ainsi

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \overline{z}_i \tag{3}$$

et $\Xi_0 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{-1} \lambda_i (z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \overline{z}_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i})$; le point $(0, 0)$ est de type elliptique: les valeurs propres de Ξ_0 sont $\sqrt{-1}\lambda_i$ and $-\sqrt{-1}\lambda_i$, $1 \le i \le n$. On peut écrire

$$H_1 = \sum_{|\alpha|+|\beta|=d} a_{\alpha,\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta \tag{4}$$

tel qu'on impose des conditions de réalité sur les coefficients de H_1.

Pour analyser la classe des hamiltoniens homogènes définis ci-dessus, on se propose de calculer explicitement la forme normale de Birkhoff de H [B].

Proposition 1.1 **[B]** *Il existe un système de coordonnées formelles tel que $H^{\mathrm{Birk}} = H_0 + \sum_{k\geq 1} \mathcal{B}_k.(z\bar{z})^k$, où les coefficients des séries formelles $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_k(a_{\alpha,\beta}, \bar{a}_{\alpha,\beta})$ sont des polynômes en les paramètres $a_{\alpha,\beta}$.*

Définition 1.2 On appelle la série H^{Birk} forme normale de Birkhoff.

On note $\Xi_{H^{\mathrm{Birk}}} = \Xi_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i(z_1\bar{z}_1, \dots, z_n\bar{z}_n).(z_i\frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z}_i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i})$, le champ associé a l'hamiltonien H^{Birk}, où les B_i sont des séries formelles.

Les fréquences de $\Xi_{H^{\mathrm{Birk}}}$ sont les $\lambda_1 + B_1(c_1), \dots, \lambda_n + B_n(c_n)$, et dépendent du tore invariant considéré $z_1\bar{z}_1 = c_1, \dots, z_n\bar{z}_n = c_n$.

Dans ce cadre, on définit un hamiltonien harmonique comme il suit :

Définition 1.3 On dit qu'un hamiltonien de la forme $H = H_0 + H_1$ est harmonique si les fréquences de Ξ_H sont constantes et indépendantes du tore invariant considéré.

Remarque 1.4 Un hamiltonien harmonique est intégrable. La condition $(*)$ implique que toutes les solutions sont quasi-périodiques, *i.e.*, linéaire sur le tore.

Définition 1.5 On dit qu'un hamiltonien est isochrone si toutes ses orbites sont périodiques et toutes de même période.

Remarque 1.6 Dans le cas de la dimension 2, les deux notions coïncident.

Pour le calcul de la forme normale H^{Birk}, *i.e.*, la démonstration constructive de la proposition 1.1, on utilise des transformations de Lie, *i.e.*, on effectue des changements de coordonnées successifs qui sont les flots de champs de vecteurs hamiltoniens.

Soit donc, pour commencer, Ξ_1 un champ de vecteurs hamiltonien, d'hamiltonien K_1, $i(\Xi_1)\omega = -dK_1$. On considère son flot $\Phi_1(\epsilon) = \exp(\epsilon K_1)$. Ainsi la première étape est, grâce au symplectomorphisme Φ_1 tangent à l'identité modulo les termes en ϵ^2, d'annuler, si possible, les termes en ϵ dans l'expression de H.

$$\exp(\epsilon\Xi_1)^*(H_0 + \epsilon H_1) = H_0 + \epsilon(\{K_1, H_0\} + H_1) + O(\epsilon^2).$$

On a alors à résoudre l'équation

$$\{K_1, H_0\} + H_1 = 0$$

qui est équivalente à

$$\{H_0, K_1\} = H_1.$$

La deuxième étape est de faire un changement de coordonnées grâce à un flot d'un champ de vecteurs hamiltoniens Ξ_2, avec K_2 pour fonction d'Hamilton, et de poursuivre le calcul en négligeant les termes d'ordre supérieur à trois.

$$\big(\exp(\epsilon^2\Xi_2)\circ\exp(\epsilon\Xi_1)\big)^*(H_0 + \epsilon H_1) = H_0 + \epsilon^2\big(\{K_2, H_0\} + \{K_1\{K_1, H_0\}\}\big) + O(\epsilon^3).$$

Ainsi, on a à résoudre une seconde équation

$$\begin{aligned}\{H_0, K_2\} &= \big\{K_1, \{K_1, H_0\}\big\}\\ &= -\{K_1, H_1\}\\ &= \{H_1, K_1\}.\end{aligned}$$

On suppose qu'on a annulé tous les termes jusqu'à l'ordre n, et qu'on a trouvé n hamiltoniens qui ont permis de faire les changements de coordonnées. Soient $K_1, \dots, K_n$ ces hamiltoniens et $\Xi_1, \dots, \Xi_n$ les champs de vecteurs associés.

Par récurrence, on suppose qu'on a obtenu n équations :

$$\begin{aligned}&\{H_0, K_1\} = H_1\\ &\{H_0, K_2\} = \{H_1, K_1\}\\ &\{H_0, K_3\} = \big\{\{H_1, K_1\}, K_2\big\}\\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ &\{H_0, K_n\} = \big\{\dots\{H_1, K_1\}, K_2\big\}, \dots\}, K_{n-1}\}.\end{aligned}$$

Soit Ξ_{n+1} tel que $i(\Xi_{n+1})\omega = -dK_{n+1}$. Alors on peut effectuer un nouveau changement de coordonnées tangent à l'identité en négligeant les termes d'ordre ϵ^{n+2}. On considère

$$\begin{aligned}&\big(\exp(\epsilon^{n+1}\Xi_{n+1}) \circ \dots \circ \exp(\epsilon\Xi_1)\big)^*(H_0 + \epsilon H_1)\\ &\quad = (H_0 + \epsilon H_1) \circ \big(\exp(\epsilon^{n+1}\Xi_{n+1}) \circ \dots \circ \exp(\epsilon\Xi_1)\big)\\ &\quad = H_0 + \epsilon^{n+1}\big(\{K_{n+1}, H_0\} + \big\{K_n, \{K_n, H_0\}\big\}\big) + O(\epsilon^{n+2}).\end{aligned}$$

On obtient une nouvelle équation à résoudre

$$\begin{aligned}\{H_0, K_{n+1}\} &= \big\{K_n, \{K_n, H_0\}\big\}\\ &= -\{K_n, \big\{\dots\{H_1, K_1,\}, \dots, K_{n-1}\big\}\\ &= \big\{\dots\{H_1, K_1\}, K_2\big\}, \dots\}, K_n\}.\end{aligned}$$

Si on veut écrire la forme normale de Birkhoff de $H_0 + \epsilon H_1$, il est nécéssaire de considérer ces équations et d'essayer de les résoudre dans le but d'éliminer les termes "non résonnants". En fait, comme on le montre dans le lemme 1.7, il existe une condition de "non résonance" pour trouver l'opérateur $\mathfrak{J}_0 = \{H_0, .\}^{-1}$ lorsqu'il existe et est défini. Quand la condition n'est pas remplie, il n'est pas possible d'annuler les termes et on les appelle les "monômes résonnants" : les coefficients de ces monômes sont les coefficients de Birkhoff. Si on est capable d'annuler tous les coefficients de Birkhoff, on trouve alors les conditions du centre isochrone. En effet :

Lemme 1.7 *On note $\mathfrak{J}_0 = \{H_0, .\}^{-1}$ lorsque cet opérateur existe. On obtient* $\mathfrak{J}_0.(z^\alpha \bar{z}^\beta) = \frac{z^\alpha \bar{z}^\beta}{\sqrt{-1}(\alpha-\beta)}$, $(\alpha - \beta) \neq 0$.

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-032-9 Published online by Cambridge University Press

Démonstration

$$\begin{aligned}-\sqrt{-1}\{H_0,.\}.(z^\alpha \bar{z}^\beta) &= \left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).(z^\alpha \bar{z}^\beta)\\ &= \alpha z z^{\alpha-1}\bar{z}^\beta - \beta \bar{z} z^\alpha \bar{z}^{\beta-1}\\ &= (\alpha-\beta) z^\alpha \bar{z}^\beta,\end{aligned}$$

donc, si $(\alpha-\beta)\neq 0$ alors on peut calculer l'inverse de l'opérateur $\{H_0,.\}$. ■

Après avoir précisé ce cadre général, on se restreint dans la suite à ne considérer que le cas de la dimension 2.

2 Équations algébriques attachées au problème du centre isochrone pour les champs hamiltoniens polynomiaux homogènes

On calcule explicitement les deux premiers coefficients de Birkhoff de la série normalisante H^{Birk}. On distingue le cas pair du cas impair.

Proposition 2.1

(i) Si $H_1 = H_{2p+1}$ alors $B_1 = 2(2p+1)\sum_{i=0}^{p} |a_{2p+1-i,i}|^2$.
(ii) Si $H_1 = H_{2p}$ alors $B_1 = a_{p,p}$ et $B_2 = 2(2p)\sum_{i=0}^{p-1} |a_{2p-i,i}|^2$.

On note $\mathcal{C}_d[z,\overline{z}]$ l'ensemble des polynômes réels de degré d en $(z,\overline{z})$ à coefficients complexes, *i.e.*, $H_1 \in \mathcal{C}_d[z,\overline{z}]$, $H_1 = \sum_{p+q=d} a_{p,q} z^p \overline{z}^q$ tel que $a_{p,q} = \overline{a}_{q,p}$.

À chaque polynôme H_1 correspond de façon unique un point de l'espace $\mathbb{R}^D$, où $D = 2k+2$ dans le cas impair $d = 2k+1$, et $D = 2k+1$ dans le cas pair $d = 2k$, de la forme $\left(\operatorname{Re}(a_{p,q}), \operatorname{Im}(a_{p,q})\right)$.

De plus, on considère B_1, B_2 comme des applications de l'espace des coefficients complexes $a_{p,q}$ à valeurs réelles.

Pour le cas impair,

$B_1\colon\ \mathbb{C}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ (a_{2p+1,0},\dots,a_{p+1,p}) \longmapsto 2(2p+1)\sum_{i=0}^{p} |a_{2p+1-i,i}|^2,$

et le cas pair,

$B_1\colon\ \mathbb{C}^p \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (a_{2p,0},\dots,a_{p+1,p-1},a_{p,p}) \longmapsto a_{p,p},$
$B_2\colon\ \mathbb{C}^p \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ (a_{2p,0},\dots,,a_{p+1,p-1},a_{p,p}) \longmapsto 2(2p)\sum_{i=0}^{p-1} |a_{2p-i,i}|^2.$

On note, pour $\alpha\in\mathbb{R}^+$, l'hyperplan $\mathcal{P}_\alpha = \{(a_{2p,0},\dots,a_{p+1,p-1},a_{p,p}) : a_{p,p} = \alpha\} \simeq \mathbb{R}^{2p} \subset \mathbb{R}^{2p+1}$ et $\mathcal{C}$ le cylindre $\mathbb{S}_\alpha^{2p-1}\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{2p+1}$, où $\mathbb{S}_\alpha^{2p-1} = \{(a_{2p,0},\dots,a_{p+1,p-1}) : \sum_{i=0}^{p-1}|a_{2p-i,i}|^2 = \alpha\}$ est la sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^{2p+1}$.

Proposition 2.2

(i) L'image réciproque de α, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $B_1^{-1}(\alpha)$ est la sphère $\mathbb{S}_\alpha^{2p+1}$.
(ii) De même, les fibres $B_1^{-1}(\alpha_1)$, et $B_2^{-1}(\alpha_2)$, $\alpha_1\in\mathbb{R}$, $\alpha_2\in\mathbb{R}^+$ sont, respectivement, $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^{2p+1}$ et $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^{2p+1}$.

On a alors que $B_1^{-1}(\alpha_1)\cap B_2^{-1}(\alpha_2)$ est $\mathcal{P}\cap\mathcal{C}\simeq\mathbb{S}_\alpha^{2p-1}\subset\mathcal{P}$.

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-032-9 Published online by Cambridge University Press

Le théorème suivant montre qu'il ne peut exister de centre isochrone hamiltonien autre que dans le cas linéaire :

Théorème 2.3

(i) L'image réciproque de 0*,* $B_1^{-1}(0)$ *se réduit au point* $\{0\}$*.*
(ii) De même, la sphère $B_1^{-1}(0) \cap B_2^{-1}(0)$ *se réduit au point* $\{0\}$*.*

Les deux sphères $\mathbb{S}_0^{2p+1} \subset \mathbb{R}^{2p+2}$ *et* $\mathbb{S}_0^{2p-1} \subset \mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^{2p}$ *se réduisent à un point : il ne peut exister de perturbation homogène isochrone non nulle du centre* $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$*.*

Démonstration de la proposition 2.1 Premier cas : $H_1 = H_{2p+1}$.

$$H_{2p+1} = \sum_{i=0}^{2p+1} a_{2p+1-i,i} z^{2p+1-i}\overline{z}^i,$$

$$K_1 = \mathcal{J}_0.H_{2p+1} = -\sqrt{-1}\sum_{i=0}^{2p+1} \frac{a_{2p+1-i,i}}{(2p+1)-2i} z^{2p+1-i}\overline{z}^i,$$

$$\begin{aligned}\{H^{2p+1}, \mathcal{J}_0.H_{2p+1}\} &= \sqrt{-1}\left(\frac{\partial H_{2p+1}}{\partial \overline{z}}.\frac{\partial \mathcal{J}_0.H_{2p+1}}{\partial z} - \frac{\partial H_{2p+1}}{\partial z}.\frac{\partial \mathcal{J}_0.H_{2p+1}}{\partial \overline{z}}\right)\\ &= -2\sqrt{-1}\Re e\left(\frac{\partial H_{2p+1}}{\partial z}.\frac{\partial \mathcal{J}_0.H_{2p+1}}{\partial \overline{z}}\right),\end{aligned}$$

à cause des conditions de réalité sur les coefficients de la perturbation.

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{2p+1}}{\partial z} &= \sum_{i=0}^{2p}(2p+1-i)a_{2p+1-i,i}z^{2p-i}\overline{z}^i\\ &= \sum_{i=1}^{2p+1} i a_{i,2p+1-i} z^{i-1}\overline{z}^{2p+1-i},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_0.H_{2p+1}}{\partial \overline{z}} = -\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{2p+1}\frac{i a_{2p+1-i,i}}{(2p+1-2i)} z^{2p+1-i}\overline{z}^{i-1}.$$

On cherche le coefficient du monôme résonnant de degré $4p$: $z^{2p}\overline{z}^{2p}$ dans le produit

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H_{2p+1}}{\partial z}.\frac{\partial \mathcal{J}_0.H_{2p+1}}{\partial \overline{z}}\\ &\quad= -\sqrt{-1}\left(\sum_{i=1}^{2p+1} i a_{i,2p+1-i} z^{i-1}\overline{z}^{2p+1-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{2p+1}\frac{i a_{2p+1-i,i}}{(2p+1-2i)} z^{2p+1-i}\overline{z}^{i-1}\right)\\ &\quad= -\sqrt{-1}\left(\sum_{i=1}^{2p+1}\frac{i^2}{(2p+1)-2i}|a_{2p+1-i,i}|^2\right) z^{2p}\overline{z}^{2p}\\ &\qquad\quad + \text{“termes non résonnants”}.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-032-9 Published online by Cambridge University Press

On note B_1 le premier coefficient de Birkhoff, *i.e.*, le coefficient de $z^{2p}\overline{z}^{2p}$ dans le produit ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1}B_1 &= \sum_{i=1}^{2p+1} \frac{i^2}{(2p+1)-2i}|a_{2p+1-i,i}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{i^2}{(2p+1)-2i}|a_{2p+1-i,i}|^2 - \sum_{i=1}^{p} \frac{(2p+1-i)^2}{(2p+1)-2i}|a_{i,2p+1-i}|^2 \\
&\quad + \frac{(2p+1)^2}{-(2p+1)}|a_{2p+1,0}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{i^2-(2p+1-i)^2}{(2p+1)-2i}|a_{2p+1-i,i}|^2 - (2p+1)|a_{2p+1,0}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{(i-2p-1+i)(i+2p+1-i)}{(2p+1)-2i}|a_{2p+1-i,i}|^2 - (2p+1)|a_{2p+1,0}|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{p}(2p+1)|a_{2p+1-i,i}|^2 - (2p+1)|a_{2p+1,0}|^2.
\end{aligned}$$

Finalement, l'expression de B_1 est

$$B_1 = 2(2p+1)\sum_{i=0}^{p}|a_{2p+1-i,i}|^2.$$

Deuxième cas : $H_1 = H_{2p}$.

$$H_{2p} = \sum_{i=0}^{2p} a_{2p-i,i} z^{2p-i}\overline{z}^i,$$

$$\mathcal{J}_0.H_{2p} = -\sqrt{-1}\left(\sum_{i=0}^{i=p-1} \frac{a_{2p-i,i}}{2p-2i} z^{2p-i}\overline{z}^i + \sum_{i=p+1}^{2p} \frac{a_{2p-i,i}}{2p-2i} z^{2p-i}\overline{z}^i\right),$$

car $a_{p,p}z^p\overline{z}^p$ est un monôme résonnant.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_{2p}}{\partial z} &= \sum_{i=0}^{2p-1}(2p-i)a_{2p-i,i}z^{2p-i-1}\overline{z}^i \\
&= \sum_{i=1}^{2p} i a_{i,2p-i} z^{i-1}\overline{z}^{2p-i},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_0.H_{2p}}{\partial \overline{z}} = -\sqrt{-1}\left(\sum_{i=1}^{p-1} i\frac{a_{2p-i,i}}{2p-2i} z^{2p-i}\overline{z}^{i-1} + \sum_{i=p+1}^{2p} i\frac{a_{2p-i,i}}{2p-2i} z^{2p-i}\overline{z}^{i-1}\right),$$

$$\frac{\partial H_{2p}}{\partial z}.\frac{\partial \mathcal{J}_0.H_{2p}}{\partial \overline{z}} = -\sqrt{-1}\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{i^2|a_{2p-i,i}|^2}{2p-2i} + \sum_{i=p+1}^{2p}\frac{i^2|a_{2p-i,i}|^2}{2p-2i}\right) z^{2p-1}\overline{z}^{2p-1}$$
$$+ \text{“termes non résonnants”}.$$

On note B_2 le coefficient de $z^{2p-1}\overline{z}^{2p-1}$. On rappelle que le premier coefficient de Birkhoff est $B_1 = a_{p,p}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1}B_2 &= \sum_{i=1}^{p-1}\frac{i^2|a_{2p-i,i}|^2}{2p-2i} + \sum_{i=p+1}^{2p}\frac{i^2|a_{2p-i,i}|^2}{2p-2i}\\
&= \sum_{i=1}^{p-1}\frac{i^2|a_{2p-i,i}|^2}{2p-2i} - \sum_{i=1}^{p-1}\frac{(2p-i)^2}{2p-2i}|a_{2p-i,i}|^2 - 2p|a_{2p,0}|^2\\
&= \sum_{i=1}^{p-1}\frac{i^2-(2p-i)^2}{2p-2i}|a_{2p-i,i}|^2 - 2p|a_{2p,0}|^2\\
&= -2p\sum_{i=0}^{p-1}|a_{2p-i,i}|^2.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$B_2 = 2(2p)\sum_{i=0}^{p-1}|a_{2p-i,i}|^2. \qquad \blacksquare$$

3 Étude des hamiltoniens non homogènes : sur une classe de perturbations polynomiales

On généralise, en complétant ainsi l'étude du problème du centre isochrone des champs hamiltoniens, le résultat obtenu précédemment pour les perturbations homogènes. Ce faisant, on comprend ainsi plus en détail le comportement des premiers coefficients de Birkhoff. On commence par établir un théorème qui permet de cerner une classe de polynômes qui ne sont nécessairement isochrones que dans le cas linéaire H_0. Un intérêt évident ressort de ce début de classification des champs hamiltoniens polynomiaux : pour obtenir un champ de vecteurs isochrone autre que H_0, il est nécessaire d'être dans le complémentaire de cette classe de polynômes. On met ainsi en évidence un critère de choix effectif pour les hamiltoniens isochrones.

On peut consulter [G] pour trouver une condition nécessaire d'isochronisme. Celle-ci donne une caractérisation de la fibre de la fonction d'hamilton des champs linéarisable de $\left(\mathbb{C}^2, (x, y)\right)$. L'étude de l'homologie évanescente $H_1\left(H^{-1}(z), \mathbb{Z}\right)$ de la surface de Riemann associée à $H^{-1}(z)$ permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture **(L. Gavrilov)** Si $H(x, y)$ est un hamiltonien polynomial isochrone, alors le cycle évanescent en zéro de la fibre $H^{-1}(z)$ est homologue à zéro.

La conjecture est vraie dans le cas des points singuliers de type simple (A_k, D_k, E_6, E_7, E_8) [G].

On calcule les deux premiers coefficients de Birkhoff pour des perturbations non homogènes de H_0 du type $H_p + H_{2p-2}$, $p \geq 3$.

Proposition 3.1 *Soit $p \geq 1$.*

(i) Si $H_1 = H_{2p+1} + H_{4p}$ alors $B_1 = a_{2p,2p} + 2(2p+1)\sum_{i=0}^{p} |a_{2p+1-i,i}|^2$.
(ii) Si $H_1 = H_{2p} + H_{4p-2}$, alors $B_1 = a_{p,p}$ et $B_2 = a_{2p-1,2p-1} + 2(2p)\sum_{i=0}^{p-1} |a_{2p-i,i}|^2$.

Démonstration Premier cas : $H_1 = H_{2p+1} + H_{4p}$.

Le premier coefficient de Birkhoff B_1 est le coefficient de $(z\bar{z})^{4p}$ dans la série

$$H^{\mathrm{Birk}} = z\bar{z} + B_1(z\bar{z})^{4p} + \cdots$$

donnant la forme normale de l'hamiltonien. On résout les équations homologiques composantes homogènes par composantes homogènes : on reprend le calcul des séries de Lie explicité dans le cas homogène. Soit Ξ_1 un champ de vecteurs hamiltonien tel que $i(\Xi_1)\omega = -dK_1$.

$$\exp(\Xi_1)^*(H_0 + H_1) = H_0 + (\{K_1, H_0\} + H_{2p+1}) + \big\{K_1, \{K_1, H_0\}\big\} + H_{4p} + \cdots .$$

On a à résoudre l'équation

$$\{H_0, K_1\} = H_{2p+1}.$$

Soit alors Ξ_2 tel que $i(\Xi_2)\omega = -dK_2$, et on obtient

$$\big(\exp(\Xi_2) \circ \exp(\Xi_1)\big)^*(H_0 + H_1) = H_0 + \big(\{K_2, H_0\} + \big\{K_1, \{K_1, H_0\}\big\} + H_{4p}\big) + \cdots$$

d'où

$$\{H_0, K_2\} = \{H_{2p+1}, K_1\} + H_{4p}.$$

À ce stade, on est déjà en mesure de calculer explicitement le premier coefficient de Birkhoff de la forme normale de l'hamiltonien considéré. En effet, la première équation homologique permet d'obtenir K_1, de degré $2p+1$, puis la recherche du premier monôme résonnant de degré $4p$ généré par le crochet de Poisson $\{H_{2p+1}, K_1\}$ se fait comme dans le cas homogène auquel il faut ajouter le terme $a_{2p,2p}$ provenant de la partie homogène H_{4p} de degré $4p$. On obtient donc

$$H^{\mathrm{Birk}} = H_0 + B_1(z\bar{z})^{2p} + \cdots$$

où

$$B_1 = a_{2p,2p} + 2(2p+1)\sum_{i=0}^{p} |a_{2p+1-i,i}|^2.$$

Deuxième cas : $H_1 = H_{2p} + H_{4p-2}$.

La démonstration est identique au cas précédent, mais cette fois on est obligé de calculer les deux premiers coefficients de Birkhoff du fait de l'existence d'un monôme

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-032-9 Published online by Cambridge University Press

résonnant dans la partie perturbative H_{2p}. On peut donc écrire ainsi les premiers termes de la forme normale de Birkhoff

$$H^{\text{Birk}} = H_0 + B_1(z\bar{z})^p + B_2(z\bar{z})^{2p-1} + \cdots$$

où

$$B_1 = a_{p,p} \quad \text{et} \quad B_2 = a_{2p-1,2p-1} + 2(2p)\sum_{i=0}^{p-1} |a_{2p_i,i}|^2. \qquad \blacksquare$$

Proposition 3.2

(i) *Soit $H = H_0 + H_1$, avec $H_1 = H_{2p+1} + H_{4p}$. Si $a_{2p,2p} \geq 0$ alors il ne peut exister de centre isochrone autre que dans le cas linéaire H_0.*

(ii) *Soit $H = H_0 + H_1$, avec $H_1 = H_{2p} + H_{4p-2}$. Si $a_{2p-1,2p-1} \geq 0$ alors on conclut de même.*

Démonstration Dans le cas (i), d'après le théorème précédent, si $a_{2p,2p} \geq 0$ alors on est en présence d'une sphère de Birkhoff et on sait qu'elle se réduit à zéro au-dessus de 0, *i.e.*, on a $H_{2p+1} \equiv 0$ et $a_{2p,2p} = 0$. On est donc ramené à l'étude d'une perturbation homogène $H_1 = H_{4p}$: on sait que la sphère de Birkhoff associée à H_{4p} se réduit à zéro au dessus de 0. Par conséquent, il ne peut exister de centre isochrone autre que dans le cas linéaire H_0.

Le deuxième cas se traite par le même raisonnement. $\blacksquare$

Théorème 3.3 *Soit $H = H_0 + H_1$ avec $H_1 = \sum_{p=3}^{d} H_p$, où $d = 2k$ ou bien $d = 2k+1$. Si tous les coefficients $a_{p,p}$, $4 \leq p \leq d$, provenant des monômes résonnants des composantes homogènes de degrés pairs de la partie perturbative H_1 sont tels que $a_{p,p} \geq 0$, $4 \leq p \leq d$, alors il ne peut exister de centre isochrone autre que dans le cas linéaire H_0.*

Démonstration Ce théorème est un corollaire des propositions 4.1 et 4.2. On étudie l'hamiltonien composantes homogènes par composantes homogènes, on applique les deux propositions précédentes, et on réduit à zéro les sphères de Birkhoff produites au cours de la procédure.

En effet, on obtient que $a_{22} = 0$ et $H_3 \equiv 0$, d'après les propositions 3.1 et 3.2 (i), avec $p = 1$.

On considère alors H_4 et H_6, et on applique les propositions 3.1 et 3.2 (ii), avec $p = 2$, d'où $H_4 \equiv 0$ et $H_6 \equiv 0$.

Ensuite, $p = 2$, alors $H_5 \equiv 0$ et $a_{44} = 0$ par (i).

Pour la composante de degré pair $2p$, on a $H_{2p} \equiv 0$ et $H_{4p-2} \equiv 0$ par (ii), et pour la composante $2p+1$, on a $H_{2p+1} \equiv 0$ et $a_{2p,2p} = 0$ par (i).

En appliquant ainsi, pour tout p tel que $3 \leq p \leq d$, les deux propositions, dans les cas (i) et (ii) alternativement, on élimine toutes les composantes de l'hamiltonien H. Il ne peut alors exister de centre hamiltonien isochrone autrement que dans le cas $H = H_0$. $\blacksquare$

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-032-9 Published online by Cambridge University Press

Condition nécessaire d'isochronisme Pour que H soit isochrone non trivial, il est nécessaire que H ne soit pas de la forme donné par le théorème 3.3.

Exemple 3.4 $H = H_0 + \sum_{p=1}^{d} H_{2p+1}$, *i.e.*, un hamiltonien où il n'y a que des composantes homogènes de degré impair. Le champ de vecteurs associé n'est pas isochrone.

Exemple 3.5 $H = H_0 + H_3 + \mathbf{H_5} + H_6 + H_7 + H_9 + H_{11} + H_{13}$ n'est pas isochrone.

On utilise les propositions 3.1 et 3.2, succesivement dans les cas (i) et (ii), pour chaque degré p des composantes homogènes de H :

$p = 1$ $H_3 \equiv 0$ par les propositions 3.1 et 3.2 (i)
$p = 2$ $H_5 \equiv 0$ en utilisant le (i) des deux propositions 3.1 et 3.2,
$p = 3$ $H_6 \equiv 0$ en utilisant (ii),
$p = 3$ $H_7 \equiv 0$ par (i),
$p = 4$ $H_9 \equiv 0$ par (i),
$p = 5$ $H_{11} \equiv 0$ par (i),

puis, pour la composante homogène de degré 13, *i.e.*,

$p = 6$ on obtient $H_{13} \equiv 0$ par (i).

Exemple 3.6 $H = H_0 + H_3 + H_6 + H_7 + \mathbf{H_8} + H_9 + H_{11} + H_{13}$ n'est pas isochrone.

De même,

$p = 1$ $H_3 \equiv 0$ par (i)
$p = 3$ $H_6 \equiv 0$ par (ii),
$p = 3$ $H_7 \equiv 0$ par (i),
$p = 4$ $H_8 \equiv 0$ par (ii),
$p = 4$ $H_9 \equiv 0$ par (i),
$p = 5$ $H_{11} \equiv 0$ par (i),
$p = 6$ $H_{13} \equiv 0$ par (i).

Des deux exemples 3.5 et 3.6, on voit que la composante H_5 donne, lorsqu'on calcule le crochet de Poisson provenant des équations homologiques, un polynôme de degré 8. Les deux hamiltoniens ont, soit H_5, soit H_8 pour composante homogène, pour être dans le cadre de la condition nécessaire d'isochronisme. C'est un *critère effectif de choix* : $H = H_0 + H_5 + H_8$ est un hamiltonien polynomial qui peut donner un centre isochrone non linéaire, sans que l'on sache explicitement calculer les conditions d'isochronisme.

La condition nécessaire d'isochronisme implique, sur ces exemples, que l'on considère $H = H_0 + H_3 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{11} + H_{13}$, avec $a_{4,4} < 0$. Ce champ peut être isochrone.

De même, $H = H_0 + H_3$ n'est pas isochrone autrement que dans le cas linéaire, mais $H = H_0 + H_3 + H_4$ peut l'être, sans que l'on sache calculer explicitement ces conditions d'isochronisme. ■

Références

[A1] V. I. Arnold, *Dynamical systems III.* Encyclopaedia Math. Sci. Vol. **3**, Springer Verlag, 1988.

[A2] ______, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.* Grundlehren Math. Wiss. **250**, Springer-Verlag, 1988; *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires.* Mir, Moscou, 1980.

[B] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **IX**, 1927.

[Ch.D] C.-J. Christopher and J. Devlin, *Isochronous centers in planar polynomial systems.* SIAM J. Math. Anal. **28**(1997), 162–177.

[F1] J.-P. Françoise, *Birkhoff normal forms and analytic geometry.* Dans: Symplectic singularities and geometry of gauge fields, Banach Center Publ. **39**, Polish Acad. Sci., Warszawa, 1997, 49–56.

[F2] ______, *The successive derivatives of the period function of a plane vector field.* J. Differential Equations **146**(1998), 320–335.

[G] L. Gavrilov, *Isochronicity of plane polynomial Hamiltonian systems.* Nonlinearity **10**(1997), 433–448.

[L] W. S. Loud, *Behaviour of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers.* Contributions to Differential Equations **3**(1964), 21–36.

[P] I. I. Pleshkan, *A new method of investigating the isochronicity of a system of two differential equations.* Differential Equations **5**(1969), 796–802.

[R.T1] C. Rousseau and B. Toni, *Local bifurcation of critical periods in vector fields with homogeneous nonlinearities of the third degree.* Canad. Math. Bull. (4) **36**(1993), 473–484.

[R.T2] ______, *Local bifurcation of critical periods in the reduced Kukles system.* Canad. J. Math. (2) **49**(1997), 338–358.

[S] B. Schuman, *Sur la forme normale de Birkhoff et les centres isochrones.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **322**(1996), 21–24.

Université Pierre et Marie Curie, Paris 6,
Tour 46-0, 5ème étage, case 172
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France
courriel: schuman@math.jussieu.fr

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-032-9 Published online by Cambridge University Press