

SURFACES ASSOCIÉES AU PLONGEMENT CANONIQUE DES COURBES

JEAN D'ALMEIDA

I. Introduction

Soit C une courbe canonique de genre $g \geq 4$. Le théorème de Enriques-Babbage [ACGH] affirme que l'idéal de C est engendré par $(g-2)(g-3)/2$ hypersurfaces quadriques sauf si C est trigonale ou isomorphe à une quintique plane. Si C est trigonale, elle est tracée sur une surface réglée rationnelle normale dont les génératrices découpent la série trigonale. Si C est isomorphe à une quintique plane lisse, elle est tracée sur une surface de Véronèse.

La question suivante est posée dans [ACGH] p.274: trouver une surface algébrique S et un système linéaire sur S contenant la courbe générale de genre g .

Mori et Mukai [MM] [Muk] ont montré que la courbe générale de genre g pouvait être réalisée comme section hyperplane d'une surface K_3 contenu dans \mathbf{P}^g si seulement si $g \leq 9$ et $g = 11$. Harris et Mumford se sont aussi intéressés à la question [HM]: supposons que pour g donné, la dimension de Kodaira de l'espace des modules \mathcal{M}_g soit supérieure ou égale à zéro, (c'est cas pour $g \geq 23$). Soit C une courbe générale de genre g et F une surface algébrique contenant C tel que le système linéaire $|C|$ soit non trivial. Alors F est birationnellement équivalente à $C \times \mathbf{P}^1$.

On considère ici le problème suivant: étant donnée une courbe canonique générale C de genre g , construire une surface projective lisse S de \mathbf{P}^{g-1} contenant C tel que le système linéaire $|C|$ soit non trivial.

On construit ici une telle surface pour $g \leq 10$. La situation est intéressante lorsque le degré de la surface est assez bas. En effet dans ce cas la surface est

Received March 18, 1991.

Revised September 21, 1994.

birationnellement réglée et on peut en déduire l'existence de séries linéaires spéciales la courbe. Le degré de la surface baisse lorsque la courbe canonique devient moins générale. Le minimum est atteint lorsque la courbe est trigonale ou isomorphe à une quintique Plane lisse. Pour g arbitraire, le degré minimum d'une surface projective (lisse) contenant la courbe canonique générale de genre g ne semble pas être connu. Il serait intéressant d'avoir une estimation de ce degré.

II. Préliminaires

Une surface S est dite birationnellement réglée s'il existe une courbe Y telle que S soit birationnellement isomorphe à $Y \times \mathbf{P}^1$. Si de plus $Y = \mathbf{P}^1$ on dit que S est rationnelle. Une surface géométriquement réglée de base Y est une surface munie d'un morphisme lisse $S \rightarrow Y$ dont les fibres sont isomorphes à \mathbf{P}^1 . Une surface géométriquement réglée de base Y est isomorphe à $P(E)$ où E est un fibré de rang deux sur Y . On note $h^i(\mathcal{F})$ la dimension sur \mathbf{C} du groupe de cohomologie $H^i(\mathcal{F})$ si \mathcal{F} est un faisceau cohérent.

Le résultat suivant est un plus fort qu'un théorème attribué à Chern et Griffiths dans [H1] p.423.

PROPOSITION 1. *Soit S une surface lisse de degré d de \mathbf{P}^n non contenue dans un hyperplan. Si $d < 2n - 2$ alors S est birationnellement réglée.*

Démonstration. Soit H un hyperplan général de \mathbf{P}^n et $Y = S \cap H$. Le faisceau $\mathcal{O}_Y(1)$ est non spécial. En effet s'il était spécial son degré serait inférieur ou égal à $2g - 2$ où g désigne le genre de Y et le théorème de Clifford donnerait $h^0(\mathcal{O}_Y(1)) - 1 \leq d/2$ c'est-à-dire $h^0(\mathcal{O}_Y(1)) < n$. Ceci est absurde compte tenu de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Y(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1) \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \rightarrow 0$$

qui donne $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) \subset H^0(\mathcal{O}_Y(1))$, \mathcal{I}_Y étant le faisceau d'idéaux définissant Y dans H . On a donc $h^0(\mathcal{O}_Y(1)) = d + 1 - g$. Il en résulte que $g \leq d + 1 - n$. Par ailleurs la formule d'adjonction s'écrit $2g - 2 = d + YK_S$ où K_S est le diviseur canonique. On obtient alors $YK_S \leq d - 2n < -2$. On en déduit que tous les plurigenres de S sont nuls et donc que S est birationnellement réglée d'après le théorème de Enriques [GH] p.558. C.Q.F.D.

On considère une surface de degré $d \leq 2g - 5$ de \mathbf{P}^{g-1} contenant une courbe canonique de genre g . La surface est birationnellement réglée et admet une section hyperplane générale Y de genre $g(Y) \leq d - g + 2$. Il existe un morphisme birationnel de S vers un modèle minimal relatif S_0 [H1] p.418. On a $S_0 = \mathbf{P}^2$ où $S_0 = \mathbf{P}(E)$ où E est un fibré de rang deux sur une courbe. Mentionnons enfin le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Soit C une courbe générale de genre $g \geq 2$. Il n'existe pas de morphisme non constant $f : C \rightarrow Y$ où Y est une courbe de genre $g(Y) \geq 1$ avec $Y \neq C$.*

Démonstration. [ACGH] p.367.

III. Le théorème

THÉORÈME 3. *Soit C une courbe canonique générale de genre g . Pour $(g, s) \in \{(4,2); (5,4); (6,5); (7,8); (8,10); (9,13); (10,17)\}$ il existe une surface lisse rationnelle $S \subset \mathbf{P}^{g-1}$ de degré s et un système linéaire non trivial sur S contenant C .*

Démonstration. Soit \mathcal{M}_g l'espace des modules des courbes de genre g et $\mathcal{V}n, g$ la famille des courbes planes irréductibles de degré n et de genre géométrique g .

L'argument de Séveri [S] pour démontrer l'unirationalité de \mathcal{M}_g est le suivant: Soit C une courbe générale de genre $g \leq 10$. Soit n le plus petit entier supérieur ou égal à $(2/3)g + 2$. Alors C est birationnellement équivalente à une courbe plane Γ de degré n . Soit $\delta = (n - 1)(n - 2)/2 - 3g \geq 0$. Cela signifie que les points singuliers de Γ sont des points doubles qui peuvent être pris en position générale dans \mathbf{P}^2 . La famille $\mathcal{V}n, g$ est alors unirationnelle. La courbe Γ étant à modules généraux, on en déduit l'unirationalité de \mathcal{M}_g . Cet argument était évidemment insuffisant car implicitement, il suppose l'irréductibilité de $\mathcal{V}n, g$ qui n'était alors pas démontrée. Arbatello et Sernesi [AS] ont cependant réussi à rendre correct l'argument de Séveri en construisant une composante de $\mathcal{V}n, g$ dont la courbe générique est à modules généraux et a exactement δ points doubles ordinaires en position générale dans \mathbf{P}^2 . L'irréductibilité de $\mathcal{V}n, g$ a finalement été démontrée par Harris [H2].

On note $\phi : C \rightarrow \Gamma \subset \mathbf{P}^2$ et $\Delta \subset C$ le diviseur image réciproque des points doubles ($\deg \Delta = 2\delta$). Le diviseur canonique de C est alors $K_C = \mathcal{O}_C(n - 3) \cdot (-\Delta)$. Les points doubles imposent des conditions indépendantes au système

linéaire des courbes planes de degré $n - 3$. Le système linéaire Σ des courbes de degré $n - 3$ passant par les points doubles $p_1, p_2, \dots, p_\delta$ découpe la série canonique sur C . On considère l'éclatement $\tilde{\mathbf{P}}_2$ de \mathbf{P}^2 en $p_1, p_2, \dots, p_\delta$. On note l l'image réciproque d'une droite générale de \mathbf{P}^2 et E_1, \dots, E_δ , les diviseurs exceptionnels.

On note $H = (n - 3)l - E_1 - E_2 - \dots - E_\delta$. La transformée stricte de Γ est $nl - 2E_1 - \dots - 2E_\delta$. Si le diviseur H est très ample, l'image du morphisme qui lui est associé est surface lisse $S \subset \mathbf{P}^{g-1}$ de degré $(n - 3)^2 - \delta$ contenant C . Pour $g = 10$ cette méthode donne un système linéaire trivial. Pour $g = 8$, elle permet d'obtenir une surface de degré 12. On donnera une deuxième méthode permettant d'obtenir une surface de degré 10.

Cas $g = 4$.

La courbe est de bidegré (3,3) sur une quadrique de \mathbf{P}^3 .

Cas $g = 5$.

On a $n = 6$ et $\delta = 5$. Le diviseur H est très ample. L'image de $\tilde{\mathbf{P}}_2$ est une surface de Del Pezzo de degré 4, intersection complète de deux hypersurfaces quadriques de \mathbf{P}^4 .

Cas $g = 6$.

On a $n = 6$ et $\delta = 4$. La courbe C est tracée sur une surface de Del Pezzo de degré 5. On peut montrer que S est l'unique quintique de Del Pezzo contenant C . La courbe est l'intersection complète S et d'une hypersurface quadrique. Ce résultat est utilisé dans [SB] pour montrer la rationalité de \mathcal{M}_6 .

Les trois cas précédents sont classiques et bien connus.

Cas $g = 7, 8, 9$.

Le diviseur H est très ample en vertu du résultat suivant établi dans [AH] Th. 2.3. Si les points $p_1, p_2, \dots, p_\delta$ sont en position assez générale et si $(t + 1) \cdot (t + 2)/2 - \delta \geq 6$ alors le diviseur $tl - E_1 - \dots - E_\delta$ est très ample.

Cas $g = 8, 10$.

On va utiliser la méthode de [AS] pour montrer qu'il existe une composante irréductible (réduite) W de $\mathcal{V}_{(6,6),10}$ (famille des courbes de bidegré (6,6) et de genre géométrique 10 de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$) de dimension 33 dont la courbe générique Γ est à modules généraux et possède 15 points doubles p_1, p_2, \dots, p_{15} en position générale sur la quadrique $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. De façon générale, supposons que $g = 2k$, $k \in \mathbf{N}$. Posons $\delta = k^2 - 2k$ et $h = (k + 1)^2 - 1 - 3\delta$: Soient p_1, \dots, p_δ des points en position générale dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Pour $k \leq 5$ on a $h > 0$; le système linéaire des courbes de bidegré $(k + 1, k + 1)$ ayant les points p_i comme points singuliers est non vide et a une dimension $t \geq h$. Si on fait varier les points p_i on obtient une famille irréductible V de dimension $t + 2\delta \geq h + 2\delta = 6k + 3$. Si Γ est une courbe générique de V on montre comme dans [AS] que Γ est réduite. Soit \tilde{g} le genre géométrique de Γ et W' la famille des courbes réduites de bidegré $(k + 1, k + 1)$ et de genre géométrique \tilde{g} . Soit W une composante irréductible de W' contenant V . On a $\dim W \geq \dim V \geq 6k + 3$. On rappelle le résultat suivant [H2] prop. 2.1.

Soit S une surface lisse rationnelle et $W \subset |D|$ une famille de courbes réduites de genre géométrique \tilde{g} dans le système linéaire $|D|$. On suppose que pour un élément général E de W , la restriction à chaque composante de E du diviseur anticanonique $-K_S$ est un diviseur effectif non nul. Alors $\dim W \leq \tilde{g} - DK_S - 1$. Si l'égalité a lieu alors la courbe générale de W n'a que des points doubles ordinaires comme singularités. Dans notre situation on a donc $\dim W \leq 4k + \tilde{g} + 3$, c'est-à-dire $\tilde{g} \geq 2k$. D'autre part, Γ a au moins δ points doubles, donc $\tilde{g} \leq 2k$. On a alors $\tilde{g} = 2k$ et $\dim W = 6k + 3$. V est donc dense dans W et la courbe générale Γ de W a exactement δ points doubles ordinaires en position générale dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Il faut maintenant montrer que Γ est à modules généraux. Soit C la normalisée de Γ et D_1 (resp. D_2) le diviseur sur C correspondant à l'intersection de Γ et d'une droite de type (1,0) (resp. (0,1)). Il faut montrer que $h^\circ(D_i) = 2$ et que $H^\circ(D_i) \otimes H^\circ(K_C - D_i) \rightarrow H^\circ(K_C)$ est injectif où K_C est le diviseur canonique.

Posons $T = \bigoplus_{\substack{a \geq 0 \\ b \geq 0}} H^\circ(\mathcal{O}(a, b))$ et notons (u, u') et (v, v') des bases de $H^\circ(\mathcal{O}(1,0))$ et $H^\circ(\mathcal{O}(0,1))$. On a un isomorphisme bigradué $T = \mathbf{C}[u, u'] \otimes \mathbf{C}[v, v']$. Soit $\mathcal{I} = \bigoplus_{\substack{a \geq 0 \\ b \geq 0}} \mathcal{I}_{a,b}$ l'idéal bigradué définissant le groupe de points $Z =$

$\{p_1, \dots, p_\delta\}$.

On a alors les identifications:

$$H^\circ(K_c) = \mathcal{I}_{k-1, k-1}, \quad H^\circ(K_c - D_1) = \mathcal{I}_{k-2, k-1} \quad \text{et}$$

$H^\circ(K_c - D_2) = \mathcal{I}_{k-1, k-2}$. Les cupproduits s'écrivent:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{k-2, k-1} \oplus \mathcal{I}_{k-2, k-1} &\rightarrow \mathcal{I}_{k-1, k-1} \\ (F, F') &\rightarrow uF + u'F' \\ \mathcal{I}_{k-1, k-2} \oplus \mathcal{I}_{k-1, k-2} &\rightarrow \mathcal{I}_{k-1, k-1} \\ (F, F') &\rightarrow vF + v'F' \end{aligned}$$

On conclut alors comme dans [AS] Prop. 3.4 (représentation déterminantielle et argument de semicontinuité).

Soit $\Phi : C \rightarrow \Gamma$ la normalisation et $\Delta \subset C$ le diviseur image réciproque des points doubles ($\text{deg } \Delta = 2\delta$). Le diviseur canonique est alors $K_c = \mathcal{O}_c(k-1, k-1) \cdot (-\Delta)$.

On considère l'éclatement $\widetilde{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1}$ de $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ en p_1, \dots, p_δ . On note l_1 et l_2 des images réciproques de deux droites concourantes de $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ et E_1, \dots, E_δ les diviseurs exceptionnels. On note $H = (k-1)l_1 + (k-1)l_2 - E_1 - \dots - E_\delta$. La transformée stricte de Γ est

$$(k+1)l_1 + (k+1)l_2 - 2E_1 - \dots - 2E_\delta.$$

Si H est très ample, l'image est une surface lisse de degré $(k-1)^2 + 1$.

Pour $k = 4$ et 5 on montre que H est très ample en utilisant le théorème de Reider [R]. Par exemple pour $k = 5$, on a $g = 10$.

On a $(H - K_{\widetilde{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1}})^2 = 12 \geq 10$. Si p et q sont deux points non séparés par H , il doit exister un diviseur effectif E passant par p et q tel que $(H - K)E = 0$ et $E^2 = -1$ ou -2 ou bien $(H - K)E = 1$ et $E^2 = -1$ ou 0 ou encore $(H - K)E = 2$ et $E^2 = 0$. Si les points $p_i \ i = 1, \dots, \delta$ sont en position suffisamment générale on vérifie immédiatement qu'un tel diviseur n'existe pas.

BIBLIOGRAPHIE

[ACGH] Arbarello, E., Corbalba, M., Griffiths, P., Harris, J., Geometry of Algebraic curves I, Springer-Verlag, 1985.

- [AH] d'Almeida, J., Hirschowitz, A., Quelques plongements projectifs non spéciaux de surfaces rationnelles., *Math. Zeit.*, **211** (1992), 479–483.
- [AS] Arbarello, E., Sernesi, E., The equation of a plane curve, *Duke Math. J.*, **46** (1979), 469–485.
- [GH] Griffiths, P., Harris, J., *Principles of Algebraic geometry*, Wiley Interscience, 1978.
- [H1] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [H2] Harris, J., On the Severi Problem, *Invent. Math.*, **84** (1986), 445–461.
- [HM] Harris, J., Mumford, D., On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **67** (1982), 23–86.
- [MM] Mori, S., Mukai, S., The uniruledness of the moduli space of curves of genus ≤ 11 *LNM*, **1016** (1983), 334–353.
- [Muk] Mukai, S., Curves, K_3 surfaces and Fano threefolds of genus ≤ 10 , in 'Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M Nagata', (1988), 357–377.
- [R] Reider, I., Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces, *Ann. Math.*, **127** (1988), 309–316.
- [S] Severi, F., *Vorlesungen über Algebraische Geometrie.*, Anhang F. Leipzig Teubner 1921.
- [SB] Sheperd-Barron, N.I., Invariant theory for S_5 and the rationality of \mathcal{M}_6 , *Compositio Math.*, **70** (1989), 13–25

U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées-Bât. M2

U.R.A. au C.N.R.S.D 0751

Université des Sciences et Technologies de Lille

59655-VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (FRANCE)