COMPOSITIO MATHEMATICA

Structure de poids à la Bondarko sur les motifs de Beilinson

David Hébert

Compositio Math. **147** (2011), 1447–1462.

doi:10.1112/S0010437X11005422

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

The London Mathematical Society

Compositio Math. 147 (2011) 1447–1462
doi:10.1112/S0010437X11005422

Structure de poids à la Bondarko sur les motifs de Beilinson

David Hébert

Abstract

Bondarko defines and studies the notion of weight structure and he shows that there exists a weight structure over the category of Voevodsky motives with rational coefficients (over a field of characteristic 0). In this paper we extend this weight structure to the category of Beilinson motives (for any scheme of finite type over a base scheme which is excellent of dimension at most two) introduced and studied by Cisinsky and Déglise. We also check the weight exactness of the Grothendieck operations.

Introduction

Dans [Bon10b], Bondarko définit et étudie la notion de **structure de poids**. Il montre qu'il existe une structure de poids sur la catégorie des motifs à la Voevodsky à coefficients rationnels définie sur un corps de caractéristique 0 (cf. [VSF00]) dont le cœur s'identifie à la catégorie des motifs de Chow sur k. La question qui se pose alors (cf. [Bon10b, Remark 8.2.5.3]) est de savoir comment généraliser cette structure de poids à la catégorie des motifs de Beilinson, introduite et étudiée par Cisinski–Déglise (cf. [CD09]).

Dans la première partie, nous redonnons la définition de structure de poids (définition 1.5) ainsi que la preuve du théorème de construction de Bondarko (théorème 1.9). La seconde partie est entièrement dédiée au rappel du formalisme des six opérations de Grothendieck dans la catégorie des motifs de Beilinson. L'apport nouveau de cet article réside dans la troisième partie dans laquelle nous construisons une structure de poids sur les motifs de Beilinson (théorème 3.3) répondant ainsi positivement à la question posée par Bondarko. Pour finir, nous établissons les propriétés de stabilité par les six opérations (théorème 3.8).

Cet article précède [Bon10a] dans lequel Bondarko donne une autre preuve du théorème 3.3 et prouve la w-exactitude (cf. 1.18) de f^*, f_*, $f_!$ et $f^!$ uniquement lorsque f est un morphisme quasi-projectif.

Notations et conventions. Si $\mathscr{C}$ est une catégorie, la notation $\mathscr{H} \subset \mathscr{C}$ (où $\mathscr{C} \supset \mathscr{H}$) signifiera toujours que $\mathscr{H}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$. Pour cette raison nous décrirons les sous-catégories pleines uniquement par la classe de leurs objets. Nous adopterons également les notations ensemblistes ($\in$, $\exists$, $\cup$, $\cap$, etc.) pour les catégories. Par exemple, la notation $X \in \mathscr{C}$ signifiera toujours que X est un objet de $\mathscr{C}$. Les triangles distingués seront notés $A \to B \to C \xrightarrow{+1}$.

Received 24 September 2010, accepted in final form 4 February 2011, published online 29 July 2011.
2010 Mathematics Subject Classification 14F42 (primary), 18A22, 18E30 (secondary).
Keywords: weight structures, weight filtrations, Chow motives, Beilinson motives, Grothendieck operations.
Partially supported by the *Agence Nationale de la Recherche*, project no. ANR-07-BLAN-0142 'Méthodes à la Voevodsky, motifs mixtes et Géométrie d'Arakelov'.

On note $\mathscr{H}_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}$ formée des objets compacts de $\mathscr{H}$; on rappelle qu'un objet $H \in \mathscr{H}$ est compact si $\mathsf{Hom}_{\mathscr{H}}(H, \bullet)$ commute aux petites sommes.

On note $\mathfrak{Ens}$ la catégorie des ensembles.

Tous les schémas considérés sont de type fini sur une base B excellente de dimension de Krull au plus 2. Les morphismes entre schémas sont séparés.

1. Structure de poids

On fixe $\mathscr{C}$ une catégorie triangulée (on note [1] son foncteur de translation) et $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{H}$ des sous-catégories pleines de $\mathscr{C}$ possédant 0 (l'objet initial et final de $\mathscr{C}$).

Définition 1.1. On considère les sous-catégories pleines de $\mathscr{C}$ suivantes.

(i) **L'enveloppe des rétractes** de $\mathscr{H}$, notée $\mathfrak{R}(\mathscr{H})$, est

$$\mathfrak{R}(\mathscr{H}) := \{X \in \mathscr{C} \mid \exists (X \to H \to X = \mathsf{Id}_X), H \in \mathscr{H}\}.$$

(ii) **L'orthogonal à droite** (respectivement **à gauche**) de $\mathscr{H}$, notée $\mathscr{H}^{\perp}$ (respectivement ${}^{\perp}\mathscr{H}$), est

$$\mathscr{H}^{\perp} := \{X \in \mathscr{C} \mid \forall H \in \mathscr{H}, \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, H) = 0\}$$
$$(\textit{respectivement } {}^{\perp}\mathscr{H} := \{X \in \mathscr{C} \mid \forall H \in \mathscr{H}, \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(H, X) = 0\}).$$

(iii) La catégorie des 1-**extensions** de $\mathscr{B}$ par $\mathscr{A}$, notée $\mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}, \mathscr{A})$, est

$$\mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}, \mathscr{A}) := \{X \in \mathscr{C} \mid \exists (A \to X \to B \xrightarrow{+1}), A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}.$$

On pose $\mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = \mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$.

(iv) On pose $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Ext}^n_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$, appelée **enveloppe des extensions** de $\mathscr{H}$ où

$$\mathfrak{Ext}^0_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = \mathscr{H},$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = \mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{Ext}^n_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})).$$

(v) On note $\langle \mathscr{H} \rangle$ la catégorie **engendrée** par $\mathscr{H}$,

$$\langle \mathscr{H} \rangle := \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}\Bigl(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathscr{H}[n]\Bigr).$$

(vi) On note $\langle \mathscr{H} \rangle^{\text{ép}}$ la catégorie **épaisse engendrée** par $\mathscr{H}$,

$$\langle \mathscr{H} \rangle^{\text{ép}} := \mathfrak{R}(\langle \mathscr{H} \rangle).$$

(vii) On note $\mathscr{H}^{\oplus}$, **l'enveloppe additive** de $\mathscr{H}$,

$$\mathscr{H}^{\oplus} := \left\{ \bigoplus_{i=0}^{n} H_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \forall i \in [[0, n]], H_i \in \mathscr{H} \right\} \cup \{0\}.$$

Remarque 1.2. Les objets de $\mathfrak{R}(\mathscr{H})$ sont en fait les facteurs directs d'objets de $\mathscr{H}$.

La catégorie $\langle \mathscr{H} \rangle$ est la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathscr{C}$ contenant $\mathscr{H}$.

La catégorie $\langle \mathscr{H} \rangle^{\text{ép}}$ est la plus petite sous-catégorie épaisse et triangulée de $\mathscr{C}$ contenant $\mathscr{H}$.

La catégorie $\mathscr{H}^{\oplus}$ est la plus petite sous-catégorie additive de $\mathscr{C}$ contenant $\mathscr{H}$.

Définition 1.3. (i) On dira que $\mathscr{H}$ est **stable par rétractes** si $\mathscr{H} = \mathfrak{R}(\mathscr{H})$.

(ii) On dira que $\mathscr{H}$ est **stable par extensions** si $\mathscr{H} = \mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$.

(iii) On dira que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est une **pondération** de $\mathscr{H}$ si $\mathscr{H} \subset \mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}, \mathscr{A})$.

Remarque 1.4. Tout orthogonal (à gauche ou a droite) est stable par rétractes. La catégorie $\mathfrak{Ext}^1_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}, \mathscr{A})$ est la plus grande sous-catégorie de $\mathscr{C}$ telle que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ en soit une pondération.

Définition 1.5 (Comp. [Bon10b, Definition 1.1.1]). On dira que $w = (\mathscr{C}_{w\leqslant 0}, \mathscr{C}_{w\geqslant 0})$, où $\mathscr{C}_{w\leqslant 0}$, $\mathscr{C}_{w\geqslant 0} \subset \mathscr{C}$, est une **structure de poids** sur $\mathscr{C}$, notée $w/\mathscr{C}$, si les axiomes suivants sont satisfaits.

$(SP1)$ **Stabilité par rétractes.**

$$\mathfrak{R}(\mathscr{C}_{w\leqslant 0}) = \mathscr{C}_{w\leqslant 0}, \quad \mathfrak{R}(\mathscr{C}_{w\geqslant 0}) = \mathscr{C}_{w\geqslant 0}.$$

$(SP2)$ **Semi-invariance avec respect des translations.**

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0}[-1] \subset \mathscr{C}_{w\leqslant 0}, \quad \mathscr{C}_{w\geqslant 0}[1] \subset \mathscr{C}_{w\geqslant 0}.$$

$(SP3)$ **Orthogonalité faible.**

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0} \subset \mathscr{C}_{w\geqslant 0}[1]^{\perp}.$$

$(SP4)$ **Filtration par le poids.** La donnée $(\mathscr{C}_{w\leqslant 0}, \mathscr{C}_{w\geqslant 0}[1])$ est une pondération de $\mathscr{C}$. On appellera un triangle $A \to X \to B \xrightarrow{+1}$ où X est un objet quelconque de $\mathscr{C}$, $A \in \mathscr{C}_{w\leqslant 0}$ et $B \in \mathscr{C}_{w\geqslant 0}[1]$, une **filtration par le poids** de X.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$\mathscr{C}_{w\leqslant n} := \mathscr{C}_{w\leqslant 0}[n], \quad \mathscr{C}_{w\geqslant n} := \mathscr{C}_{w\geqslant 0}[n], \quad \mathscr{C}_{w=n} := \mathscr{C}_{w\leqslant n} \cap \mathscr{C}_{w\geqslant n}.$$

On appelle $\mathscr{C}_{w=0}$ le **cœur** de la structure de poids.

À noter que la notion de structure de poids fut indépendamment introduite par Pauksztello dans [Pau08] alors appelée **co-t-structure**.

Proposition 1.6 (Orthogonalité forte ; comp. [Bon10b, Proposition 1.3.3.1]). *Soit $w/\mathscr{C}$ une structure de poids.*

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0} = \mathscr{C}_{w\geqslant 1}^{\perp}, \quad \mathscr{C}_{w\geqslant 0} = {}^{\perp}\mathscr{C}_{w\leqslant -1}.$$

Démonstration. Soient $X \in \mathscr{C}_{w\geqslant 1}^{\perp}$ et $A \to X \to B \xrightarrow{+1}$ une filtration par le poids de X. Via le foncteur cohomologique $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \bullet)$ on obtient la suite exacte $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \to \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X) \to \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B)$. Or $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B) = 0$ d'où un épimorphisme $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \twoheadrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$ qui permet de voir X comme un rétracte de $A \in \mathscr{C}_{w\leqslant 0}$ et $X \in \mathscr{C}_{w\leqslant 0}$ par $(SP1)$. □

À présent nous allons établir un théorème de construction de structure de poids.

Lemme 1.7. *On a les égalités suivantes*

$$\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}^{\perp}) = \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp} = \mathscr{H}^{\perp}, \quad \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}({}^{\perp}\mathscr{H}) = {}^{\perp}\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = {}^{\perp}\mathscr{H}.$$

Démonstration. On a $\mathscr{H} \subset \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$ et l'opération d'orthogonalité inversant les inclusions on aboutit trivialement à $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp} \subset \mathscr{H}^{\perp} \subset \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}^{\perp})$. Pour conclure, on va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'énoncé suivant : pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{Ext}^n_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}^{\perp}) \subset \mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp}$.

Cas initial : $n = 0$. On raisonne par récurrence sur m ; le cas $m = 0$ étant trivial. Supposons que pour un m quelconque fixé on ait $\mathscr{H}^{\perp} \subset \mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp}$. Soit $X \in \mathscr{H}^{\perp}$; on veut voir qu'il s'agit d'un objet de $\mathfrak{Ext}^{m+1}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp}$, c'est à dire que pour tout $Y \in \mathfrak{Ext}^{m+1}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$ on ait $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = 0$. Par définition on a un triangle distingué de $\mathscr{C}$ de la forme $A \to Y \to B \xrightarrow{+1}$ tel que $A, B \in \mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$. Le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \bullet)$ étant cohomologique on en déduit la suite exacte $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \to \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B)$. Par hypothèse de récurrence

$X \in \mathscr{H}^{\perp} \subset \mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$ et comme $A, B \in \mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$ on en déduit que $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) = \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B) = 0$ et nécessairement $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = 0$.

Récurrence. On va montrer que quelque soit l'entier $m \in \mathbb{N}$ on a $\mathfrak{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}^{\perp}) \subset \mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp}$. Soit $X \in \mathfrak{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}^{\perp})$. On veut voir qu'il est dans $\mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp}$, c'est à dire que pour tout $Y \in \mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$, on ait $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = 0$. Il existe par définition $A \to X \to B \xrightarrow{+1}$ tel que $A, B \in \mathfrak{Ext}^n_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}^{\perp})$. Le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, Y)$ étant cohomologique, on en déduit une suite exacte $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, Y)$. Comme $A, B \in \mathfrak{Ext}^n_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}^{\perp})$ qui, par hypothèse de récurrence, est inclus dans $\mathfrak{Ext}^m_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\perp}$, on en déduit que les deux objets extrémaux de cette suite sont nuls et donc que $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = 0$.

On raisonne dualement pour l'orthogonal à gauche. $\square$

Proposition 1.8 (Comp. [Bon10b, Remark 1.5.5]). *Supposons que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}[1]^{\perp}$. Si $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est une pondération de $\mathscr{H}$ alors $(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A}), \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))$ est une pondération de $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$.*

Démonstration. Comme $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Ext}^n_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$, on va raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$; le cas initial $n = 0$ suit de l'hypothèse de l'énoncé. Soit $X \in \mathfrak{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$; par construction il existe un triangle distingué $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ avec X' et X'' des objets de $\mathfrak{Ext}^n_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$ dont, par hypothèse de récurrence, $(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A}), \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))$ est une pondération. C'est à dire qu'il existe $A', A'' \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})$, $B', B'' \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ et un diagramme en trait plein.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, dotted] \arrow[d] & A \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & A'' \arrow[r, dotted] \arrow[d] & A'[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & X'[1] \arrow[d] \\
B' \arrow[r, dotted] \arrow[d, "+1"] & B \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted, "+1"] & B'' \arrow[r, dotted] \arrow[d, "+1"] & B'[1] \arrow[d, "+1"] \\
{} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

Or $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A}) \subset \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}[1]^{\perp}) \overset{1.7}{=} \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})[1]^{\perp}$; on peut alors appliquer [BBD82, la proposition 1.1.9] (sur la partie droite du diagramme) et [BBD82, la proposition 1.1.11], pour compléter le diagramme avec les flèches en pointillées, où toutes les lignes et toutes les colonnes sont des triangles distingués. La stabilité par extension permet de conclure que $A \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})$ et $B \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. $\square$

Théorème 1.9 (Théorème de construction de Bondarko ; comp. [Bon10b, Theorem 4.3.2.II.1, Proposition 5.2.2]). *Supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite*

$$\text{(a) } \mathscr{C} = \langle \mathscr{H} \rangle, \quad \text{(b) } \mathscr{C} \textit{ est pseudo-abélienne et } \mathscr{C} = \langle \mathscr{H} \rangle^{\text{ép}}.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *il existe une unique structure de poids $w/\mathscr{C}$ telle que $\mathscr{H} \subset \mathscr{C}_{w=0}$;*

(ii) $\mathscr{H} \subset (\bigcup_{n>0} \mathscr{H}[n])^{\perp}$.

De plus, dans le cas (b), $\mathscr{C}_{w=0} = \mathfrak{R}(\mathscr{H}^{\oplus})$.

Démonstration. L'orthogonalité faible prouve que la condition (ii) est nécessaire.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005422 Published online by Cambridge University Press

Supposons la condition (a) satisfaite. Sous (ii) on construit la structure de poids suivante :

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0}=\mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}\bigg(\bigcup_{n\leqslant 0}\mathscr{H}[n]\bigg)\bigg),\quad \mathscr{C}_{w\geqslant 0}=\mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}\bigg(\bigcup_{n\geqslant 0}\mathscr{H}[n]\bigg)\bigg).$$

Les axiomes $(SP1)$ et $(SP2)$ viennent de la construction, $(SP3)$ vient de l'hypothèse (ii), quand à $(SP4)$ on considère la pondération triviale sur $\overline{\mathscr{H}}:=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[n]$: on prend un objet X dans cette catégorie, c'est-à-dire qu'il est dans l'un des $\mathscr{H}[n]$; si $n\leqslant 0$ on considère le triangle $X\to X\to 0\xrightarrow{+1}$, sinon (i.e. $n>0$) on considère le triangle $0\to X\to X\xrightarrow{+1}$. Ainsi, en posant $\mathscr{A}=\bigcup_{n\leqslant 0}\mathscr{H}[n]$ et $\mathscr{B}=\bigcup_{n>0}\mathscr{H}[n]$, $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ est une pondération de $\overline{\mathscr{H}}$. Grace à (ii), on peut appliquer 1.8 : $(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A}),\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))$ et *a fortiori* $(\mathfrak{R}(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})),\mathfrak{R}(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})))$ est une pondération de $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\overline{\mathscr{H}})=\langle\mathscr{H}\rangle=\mathscr{C}$. L'unicité de cette structure suit de l'orthogonalité forte.

Supposons à présent la condition (b) satisfaite. Quitte à remplacer $\mathscr{H}$ par $\mathscr{H}^{\oplus}$, on peut supposer que $\mathscr{H}$ est additive. Notons $\mathfrak{e}(\mathscr{H})$ la petite enveloppe de $\mathscr{H}$ [Bon10b, Definition 4.3.1.3] et $\mathfrak{E}(\mathscr{H})$ son enveloppe pseudo-abélienne (voir par exemple [BS01, Definition 1.2] ; à noter que l'on ne peut pas prendre ces enveloppes si $\mathscr{H}$ n'est pas additive ; à noter de plus qu'il existe une équivalence de catégorie entre $\mathfrak{R}(\mathscr{H})$ et $\mathfrak{E}(\mathscr{H})$) de sorte que l'on ait les inclusions suivantes $\mathscr{H}\subset\mathfrak{e}(\mathscr{H})\subset\mathfrak{E}(\mathscr{H})$ qui sont des égalités lorsque $\mathscr{H}$ est pseudo-abélienne.

Le raisonnement précédent amène une structure de poids d sur $\mathscr{D}=\langle\mathscr{H}\rangle$. Puisque c'est le cas de $\mathscr{D}_{d=0}$ (orthogonalité faible), $\mathfrak{E}(\mathscr{D}_{d=0})$ vérifie la condition (ii), ainsi en appliquant encore le raisonnement précédent il existe une unique structure de poids d' sur $\mathscr{D}'=\langle\mathfrak{E}(\mathscr{D}_{d=0})\rangle\subset\mathfrak{E}(\mathscr{D})$ telle que $\mathfrak{E}(\mathscr{D}_{d=0})\subset\mathscr{D}'_{d'=0}$. D'aprés [Bon10b, Theorem 4.3.2.II.2] on a $\mathfrak{E}(\mathscr{D}_{d=0})=\mathfrak{e}(\mathfrak{E}(\mathscr{D}_{d=0}))=\mathscr{D}'_{d'=0}$. Le cœur de d' est pseudo-abélien il en va donc de même pour $\mathscr{D}'$ (cf. [Bon10b, Lemma 5.2.1]) et nécessairement $\mathscr{D}'=\mathfrak{E}(\mathscr{D})=\mathscr{C}$.

Nous avons ainsi trouvé une structure de poids sur $w/\mathscr{C}$ qui est d'. En particulier $\mathscr{C}_{w=0}=\mathscr{D}'_{d'=0}=\mathfrak{E}(\mathscr{D}_{d=0})=\mathfrak{E}(\mathfrak{e}(\mathscr{H}))=\mathfrak{R}(\mathscr{H})$. □

Remarque 1.10. Dans le cas de la condition (b) on peut donner explicitement la structure de poids comme dans la condition (a). En reprenant les notations précédentes, on arrive à

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0}=\mathscr{D}'_{d'\leqslant 0}=\mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathfrak{E}(\mathscr{D})}\bigg(\bigcup_{n\leqslant 0}\mathfrak{E}(\mathscr{D}_{d=n})\bigg)\bigg).$$

Sachant qu'il existe une équivalence de catégorie entre l'enveloppe des rétractes et l'enveloppe pseudo-abélienne, que $\mathfrak{E}(\mathscr{D})=\mathscr{C}$ et que $\mathscr{D}_{d=0}=\mathfrak{e}(\mathscr{H}^{\oplus})$ on en déduit

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0}=\mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}\bigg(\bigcup_{n\leqslant 0}\mathfrak{R}(\mathscr{H}^{\oplus})[n]\bigg)\bigg)=\mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}\bigg(\mathfrak{R}\bigg(\bigcup_{n\leqslant 0}\mathscr{H}^{\oplus}[n]\bigg)\bigg)\bigg).$$

De même en changeant le symbole $\leqslant$ par $\geqslant$.

On peut 'ajouter' aux précédents résultats des petites sommes. On suppose dans la suite que les objets de $\mathscr{C}$ sont stables par petites sommes.

Définition 1.11. On considère les sous-catégories pleines de $\mathscr{C}$ suivantes :

(i) $\mathscr{H}^{\infty}:=\{\bigoplus_{i\in I}H_i\mid I\in\mathfrak{Ens},\forall i\in I,H_i\in\mathscr{H}\}$;

(ii) $\mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}):=\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\infty})$;

(iii) $\langle\mathscr{H}\rangle_{\infty}:=\mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathscr{C}}(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[n])$;

(iv) $\langle\mathscr{H}\rangle^{\text{ép}}_{\infty}:=\mathfrak{R}(\langle\mathscr{H}\rangle_{\infty})$.

Lemme 1.12. *On a les égalités suivantes*

$$^{\perp}\mathscr{H} = {}^{\perp}(\mathscr{H}^{\infty}) \subset ({}^{\perp}\mathscr{H})^{\infty}.$$

Si de plus les objets de $\mathscr{H}$ sont compacts (i.e. $\mathscr{H} = \mathscr{H}_c$) alors l'inclusion est une égalité.

Démonstration. Trivialement ${}^{\perp}\mathscr{H} \subset ({}^{\perp}\mathscr{H})^{\infty}$. De même $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}^{\infty}$ d'où ${}^{\perp}(\mathscr{H}^{\infty}) \subset {}^{\perp}\mathscr{H}$. Vérifions l'inclusion inverse : soient $X \in {}^{\perp}\mathscr{H}$ et $H \in \mathscr{H}^{\infty}$ c'est-à-dire qu'il existe un ensemble d'indices I et $H_i \in \mathscr{H}$ indexé par I tel que $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$; mais

$$\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(H, X) = \prod_{i\in I} \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(H_i, X) = 0.$$

Supposons à présent que les objets de $\mathscr{H}$ sont compacts et montrons que $({}^{\perp}\mathscr{H})^{\infty} \subset {}^{\perp}(\mathscr{H}^{\infty})$: soient $X \in ({}^{\perp}\mathscr{H})^{\infty}$ et $H \in \mathscr{H}^{\infty}$; cela signifie qu'il existe des ensembles d'indices I et J tel que $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ et $X = \bigoplus_{j\in J} X_j$ où chaque $H_i \in \mathscr{H}$ et $X_j \in {}^{\perp}\mathscr{H}$, ainsi

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(H, X) &= \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}\Big(\bigoplus_{i\in I} H_i, \bigoplus_{j\in J} X_j\Big)\\ &\overset{\text{compacité}}{=} \prod_{i\in I}\bigoplus_{j\in J} \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(H_i, X_j)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Lemme 1.13. *On a les égalités suivantes*

$$^{\perp}\mathscr{H} = {}^{\perp}\mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = {}^{\perp}(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\infty}) \subset (\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}({}^{\perp}\mathscr{H}))^{\infty}.$$

Si de plus $\mathscr{H} = \mathscr{H}_c$ alors l'inclusion est une égalité.

Démonstration. C'est le lemme précédent et 1.7. □

Lemme 1.14. *Supposons que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_c$. Alors on a les équivalences suivantes.*

$$\begin{array}{ccc}(\mathscr{A} \subset \mathscr{B}^{\perp}) & \Longleftrightarrow & (\mathscr{A}^{\infty} \subset (\mathscr{B}^{\infty})^{\perp})\\ \Updownarrow & & \Updownarrow\\ (\mathscr{B} \subset {}^{\perp}\mathscr{A}) & \Longleftrightarrow & (\mathscr{B}^{\infty} \subset {}^{\perp}(\mathscr{A}^{\infty}))\end{array}$$

Démonstration. Les équivalences verticales sont triviales. Il suffit de vérifier que $\mathscr{B} \subset {}^{\perp}\mathscr{A}$ équivaut à $\mathscr{B}^{\infty} \subset {}^{\perp}(\mathscr{A}^{\infty})$. L'orthogonalité inversant le sens des inclusions on a $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}^{\infty} \subset {}^{\perp}(\mathscr{A}^{\infty}) \subset {}^{\perp}\mathscr{A}$ ce qui prouve la condition suffisante. Pour la réciproque on remarque que ${}^{\perp}\mathscr{A} = {}^{\perp}(\mathscr{A}^{\infty})$ est stable par somme quelconque (cf. 1.12) ; donc si $\mathscr{B} \subset {}^{\perp}\mathscr{A}$ alors $\mathscr{B}^{\infty} \subset {}^{\perp}(\mathscr{A}^{\infty})$. □

Proposition 1.15. *Supposons $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}[1]^{\perp}$ et $\mathscr{A} = \mathscr{A}_c$. Si $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est une pondération de $\mathscr{H}$ alors $(\mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A}), \mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))$ est une pondération de $\mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$.*

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\infty}$, c'est-à-dire $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ pour un certain ensemble d'indices I où chaque $X_i \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$. D'aprés 1.8, il existe $A_i \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(A)$, $B_i \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ et un triangle distingué $A_i \to X_i \to B_i \xrightarrow{+1}$. En sommant ces triangles on obtient le triangle $A \to X \to B \xrightarrow{+1}$ où $A \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})^{\infty}$ et $B \in \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})^{\infty}$. Nous avons ainsi prouvé que $(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})^{\infty}, \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})^{\infty})$ est une pondération de $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})^{\infty}$. D'aprés le lemme 1.14, comme les objets de $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})$ sont compacts, on a $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})^{\infty} \subset (\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})^{\infty}[1])^{\perp}$. On conclut en appliquant encore 1.8. □

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005422 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 1.16. *Supposons que $\mathscr{H} = \mathscr{H}_c$ et que l'une des conditions suivantes soit satisfaite*

$$(\mathrm{a}_\infty)\ \mathscr{C} = \langle \mathscr{H} \rangle_\infty, \quad (\mathrm{b}_\infty)\ \mathscr{C} = \langle \mathscr{H} \rangle_\infty^{\text{ép}}.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *il existe une unique structure de poids $w/\mathscr{C}$ telle que $\mathscr{H}^\infty \subset \mathscr{C}_{w=0}$;*

(ii) $\mathscr{H} \subset (\bigcup_{n>0} \mathscr{H}[n])^\perp$.

Démonstration. On raisonne comme pour 1.9 en 'ajoutant' des sommes infinies. Dans le cas (a_∞) on construit la structure de poids suivante :

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0} = \mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}^\infty\bigg(\bigcup_{n\leqslant 0} \mathscr{H}[n]\bigg)\bigg), \quad \mathscr{C}_{w\geqslant 0} = \mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}^\infty\bigg(\bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{H}[n]\bigg)\bigg).$$

On raisonne comme dans le cas (a) de 1.9 : soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\overline{\mathscr{H}}$ comme dans la preuve du cas (a). Alors $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}[1]^\perp$ par (ii) donc $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A}) \subset \mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})[1]^\perp$; par 1.14 on en déduit $\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A})^\infty \subset (\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})^\infty[1])^\perp$ ce qui prouve l'axiome $(SP3)$ (via 1.7). Nous avons vu que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est une pondération de $\overline{\mathscr{H}}$; on prouve $(SP4)$ en appliquant 1.15. Le cas (b_∞) se traite comme le cas (b) de 1.9 sachant que $\mathscr{C}$ est pseudo-abélienne (voir par exemple [Nee01, Proposition 1.6.8]). □

Remarque 1.17. Dans le cas (b_∞) on peut décrire la structure de poids :

$$\mathscr{C}_{w\leqslant 0} = \mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}^\infty\bigg(\mathfrak{R}\bigg(\bigcup_{n\leqslant 0} \mathscr{H}^\oplus[n]\bigg)\bigg)\bigg), \quad \mathscr{C}_{w\geqslant 0} = \mathfrak{R}\bigg(\mathfrak{Ext}_{\mathscr{C}}^\infty\bigg(\mathfrak{R}\bigg(\bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{H}^\oplus[n]\bigg)\bigg)\bigg).$$

DÉFINITION 1.18 (Comp. [Bon10a, Definition 1.2.1.VI]). Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des catégories triangulées, $c/\mathscr{C}$, $c'/\mathscr{C}'$ des structures de poids et $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur de catégories triangulées.

- On dira que F est w-**exact à gauche** si F transforme les objets de $\mathscr{C}_{c\leqslant 0}$ en objets de $\mathscr{C}'_{c'\leqslant 0}$.
- On dira que F est w-**exact à droite** si F transforme les objets de $\mathscr{C}_{c\geqslant 0}$ en objets de $\mathscr{C}'_{c'\geqslant 0}$.
- On dira que F est w-**exact** s'il est w-exact à gauche et à droite.
- Supposons $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$; on dira que c' est une **restriction** de c, notée $c' = c_{|\mathscr{C}'}$ si le foncteur d'inclusion canonique de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$ est w-exact.

Les théorèmes 1.9 et 1.16 ainsi que la description des structures de poids qu'ils décrivent permettent d'établir les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1.19. *Supposons que les conditions du théorème 1.16 soient satisfaites ainsi que la condition (ii) de loc. cit. Notons respectivement*

$$(\mathrm{a}_\infty)\ \mathscr{C}' = \langle \mathscr{H} \rangle, \quad (\mathrm{b}_\infty)\ \mathscr{C}' = \langle \mathscr{H} \rangle^{\text{ép}}.$$

Alors il existe des structures de poids $w/\mathscr{C}$ et $w'/\mathscr{C}'$ telles que $w' = w_{|\mathscr{C}'}$.

COROLLAIRE 1.20. *Supposons que l'une des conditions* (a), (b), (a_∞) *ou* (b_∞) *des théorèmes 1.9 et 1.16 soit satisfaite (avec les conditions qui s'imposent sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$). Supposons également que $\mathscr{H}$ satisfasse la condition (ii) de théorème 1.16 Soit $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$. Notons respectivement*

$$(\mathrm{a})\ \mathscr{C}' = \langle \mathscr{H}' \rangle, \qquad (\mathrm{a}_\infty)\ \mathscr{C}' = \langle \mathscr{H}' \rangle_\infty,$$
$$(\mathrm{b})\ \mathscr{C}' = \langle \mathscr{H}' \rangle^{\text{ép}}, \quad (\mathrm{b}_\infty)\ \mathscr{C}' = \langle \mathscr{H}' \rangle_\infty^{\text{ép}}.$$

Alors il existe des structures de poids $w/\mathscr{C}$ et $w'/\mathscr{C}'$ telles que $w' = w_{|\mathscr{C}'}$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005422 Published online by Cambridge University Press

2. Les motifs de Beilinson en dix leçons

Dans la suite on choisit de se placer dans la catégorie des **motifs de Beilinson** [CD09, Definition 13.2.1]

$$\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$$

où S désigne un schéma de base (de type fini au dessus de B ; cf. Introduction). Elle peut se définir à partir des faisceaux étales (sur le site $(Sm/S)_{\text{ét}}$) à coefficients rationnels [CD09, Theorem 15.2.16] : on considère la catégorie dérivée de cette catégorie de faisceaux. Dans cette catégorie on veut identifier X à $\mathbb{A}^1_X$. Ce procédé s'appelle la $\mathbb{A}^1$-localisation [CD09, Definition 5.2.16]. Avec cette localisation on obtient la catégorie 'effective' des motifs de Beilinson [CD09, Example 5.2.17] ; cette catégorie effective est monoïdale symétrique [CD09, Proposition 5.2.2]. Pour arriver à $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ on inverse (pour le produit tensoriel) le twist de Tate, noté $\mathbb{1}_S(1)$ [CD09, Definition 5.3.22, Example 5.3.34].

Pour $S = \mathsf{Spec}(k)$ (et de manière générale lorsque S est géométriquement unibranche) il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des motifs de Beilinson et la catégorie des motifs à la Voevodsky (construite à partir de faisceaux avec transferts) à coefficients rationnels [CD09, Theorem 15.1.4].

Voici une liste des propriétés de la catégorie des motifs de Beilinson, $f : S \to T$ désignant un morphisme de schémas.

(1) On a les six opérations de Grothendieck : issu du foncteur de restriction, on a le foncteur $f^* : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ qui admet un adjoint à droite f_*. Par exemple, en notant $\mathbb{1}_S$ l'unité pour le produit tensoriel (issu du faisceau constant sur S qui vaut $\mathbb{Q}$), on a $f^*\mathbb{1}_T = \mathbb{1}_S$. Dans le cas ou f est lisse, f^* admet également un adjoint à gauche $f_\sharp : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)$ (issu du foncteur d'oubli de la base). Partant du foncteur de prolongement par zéro, on a $f_! : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)$ qui admet un adjoint à droite $f^!$. En particulier si f est propre $f_! = f_*$ [CD09, Theorem 2.2.14(1)]. La catégorie $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ est monoïdale symétrique fermée ; on notera $\otimes_S$ le produit tensoriel et $\underline{\mathsf{Hom}}_S$ son adjoint à droite. À noter enfin la formule de projection [CD09, Theorem 2.4.21.v]) : pour tout $M \in \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$, $N \in \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)$, $f_!M \otimes_T N \simeq f_!(M \otimes_S f^*N)$.

(2) On a des isomorphismes de changement de base. Précisement, pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

on a $\beta^*\alpha_! \simeq \alpha'_!\beta'^*$ et $\beta'_*\alpha'^! \simeq \alpha^!\beta_*$ [CD09, Theorem 2.2.14(4c)].

(3) Si f est lisse de dimension relative d on a un isomorphisme de pureté relative [CD09, Theorem 2.4.15(iii), Remark 2.4.16] :

$$f^!\mathbb{1}_T \simeq f^*\mathbb{1}_T(d)[2d] = \mathbb{1}_S(d)[2d], \quad f_!\mathbb{1}_T \simeq f_\sharp\mathbb{1}_T(-d)[-2d].$$

(4) Si f est une immersion fermée de codimension c entre schémas réguliers on a un isomorphisme de pureté absolue [CD09, Theorem 13.4.1] :

$$f^!\mathbb{1}_T \simeq \mathbb{1}_S(-c)[-2c].$$

(5) Si U est un ouvert de S de fermé complémentaire Z, alors en notant $j : U \hookrightarrow S$

et $i : Z \hookrightarrow S$ les immersions canoniques, on a le triangle distingué de localisation [CD09, Proposition 2.3.3(2), Theorem 2.2.14(2)]

$$j_!\mathbb{1}_U \to \mathbb{1}_S \to i_!\mathbb{1}_Z \xrightarrow{+1} .$$

(6) On a la h-descente : considérons le diagramme suivant, où les carrés sont cartésiens

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, "a"] & T' \arrow[d, "p"] & U' \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ Z \arrow[r, hook, "i"'] & T & U \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

où p est une altération de Galois de groupe G telle que génériquement $T'/G \to T$ est fini, surjectif et radiciel, U est normal et $U' \to U$ est fini alors on a le triangle distingué pour tout $M \in \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T)$ [CD09, Theorem 14.3.7]

$$M \to i_!i^*M \oplus (p_!p^*M)^G \to (a_!a^*M)^G \xrightarrow{+1} .$$

(7) Si S est régulier on a [CD09, Corollary 13.2.14]

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(\mathbb{1}_S, \mathbb{1}_S(a)[b]) \simeq \mathsf{Gr}^a_\gamma \mathsf{K}_{2a-b}(S)_{\mathbb{Q}},$$

où Gr_γ désigne le gradué pour la filtration γ [CD09, § 13.1] et $\mathsf{K}_n(S)_{\mathbb{Q}} := \mathsf{K}_n(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ la K-théorie rationnelle de Quillen qui est nulle si $n < 0$.

(8) Lorsque f est lisse, on pose $M_T(S) := f_\sharp \mathbb{1}_S$; c'est le **motif associé** à S. La catégorie des **motifs constructibles** [CD09, Definition 1.4.7] est $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T) := \langle \mathscr{G}_T \rangle^{\text{ép}}$ où

$$\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T) \supset \mathscr{G}_T := \{M_T(S)(n) \mid n \in \mathbb{Z},\, f : S \to T \text{ lisse}\}.$$

La catégorie $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T)$ correspond à la sous-catégorie pleine de $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)$ formée des objets compacts $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)_c$ [CD09, Corollary 5.2.37]. À noter de plus que $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) = \langle \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \rangle^{\text{ép}}_\infty$.

(9) Les six opérations de Grothendieck respectent les objets constructibles [CD09, Theorem 14.1.31].

(10) Les catégories $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ et $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ sont pseudo-abéliennes : par construction $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ est une catégorie triangulée admettant des petites sommes (voir par exemple [Nee01, Proposition 1.6.8]). De même, par construction, la catégorie $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ est épaisse.

Remarque 2.1. À noter que le lecteur pourra également choisir de se placer dans la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}$ (cf. [Ayo07, les définitions 4.5.52, 4.2.21] avec $\mathfrak{M}$ la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels ; la topologie étant la topologie étale). D'aprés [CD09, Theorem 15.2.16] celle-ci est équivalente à $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$. Une majeur partie des propriétés précédentes est d'ailleurs prouvée intrinsèquement dans [Ayo07].

3. Structure de poids et motifs

Dans cette partie, nous allons déterminer une structure de poids sur la catégorie des motifs de Beilinson et par restriction sur la catégorie des motifs de Beilinson constructibles. Pour cela nous allons utiliser les théorèmes de construction 1.9 et 1.16.

La notation (rap. i) fait référence au rappel numéro i de la section précédente.

Lemme 3.1 (Lemme de Chow motivique). *Soit $p : X \to S$ un morphisme propre à domaine régulier. Il existe un morphisme $\pi : X_0 \to X$ projectif à domaine régulier tel que :*

(i) *le morphisme composé $p\pi$ est projectif ;*

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005422 Published online by Cambridge University Press

(ii) *le schéma X_0 a la même dimension q ue le schéma X ;*

(iii) *le motif $p_!\mathbb{1}_X$ est un rétracte de $(p\pi)_!\mathbb{1}_{X_0}$.*

Démonstration. Appliquons le lemme de Chow au morphisme p (cf. [DG61, le corollaire 5.6.2]) : on trouve un morphisme $\pi' : X'_0 \to X$ projectif tel que $p\pi'$ est projectif et tel que X'_0 a la même dimension que X. On considère une altération de Galois $X_0 \to X'_0$ et on note $\pi : X_0 \to X$ le morphisme composé ; c'est un morphisme projectif, c'est à dire composé d'une immersion fermée $i : X_0 \hookrightarrow Y$ et d'un morphisme lisse $s : Y \to X$; via (rap. 3) et (rap. 4), on a

$$\begin{aligned} \pi^!\mathbb{1}_X &= i^! s^! \mathbb{1}_X \\ &\simeq i^!\mathbb{1}_Y(c)[2c] \\ &\simeq \mathbb{1}_{X_0}(c-c)[2c-2c] \\ &= \mathbb{1}_{X_0}. \end{aligned}$$

Considérons alors la composé d'adjonction $\alpha : \mathbb{1}_X \to \pi_*\pi^*\mathbb{1}_X = \pi_!\mathbb{1}_{X_0} \simeq \pi_!\pi^!\mathbb{1}_X \to \mathbb{1}_X$. On observe que $\alpha \simeq d \cdot \mathsf{Id}_{\mathbb{1}_X}$. En effet, sans perdre en généralité, on peut supposer que X et X_0 sont connexes ; pour n'importe quelle immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ le morphisme $j^* : \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B},c}(X)}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B},c}(U)}(\mathbb{1}_U, \mathbb{1}_U)$ est un isomorphisme (car $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B},c}(X)}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B},c}(U)}(\mathbb{1}_U, \mathbb{1}_U) \simeq \mathbb{Q}$; [CD09, Proposition 10.2.11(1)]) de sorte que le changement de base propre (rap. 2) permet de se ramener à prouver que $\alpha \simeq d \cdot \mathsf{Id}_{\mathbb{1}_X}$ pour n'importe quelle restriction de π.

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_U"'] & X_0 \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, hook, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

On peut trouver un ouvert U de X tel que π_U est plat, fini de degré $d = [\kappa(X_0) : \kappa(X)]$ ($\kappa(X)$ désignant le corps des fonctions de X ; ceci est possible éssentielement parce que π induit un morphisme plat fini de degré d entre $\mathsf{Spec}(\kappa(X_0))$ et $\mathsf{Spec}(\kappa(X))$). La conclusion suit de [CD09, Proposition 12.7.6]. Puisque nous travaillons à coéfficients rationnels, d est inversible et donc $\mathbb{1}_X$ s'identifie à un rétracte de $\pi_!\mathbb{1}_{X_0}$. On conclut en composant par $p_!$ (qui est un foncteur additif). □

Théorème 3.2. *Soit $f : T \to Y$ un morphisme de schémas tel que Y soit régulier. Alors*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, b > 2a, \quad \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B}}(Y)}(f_!\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_Y(a)[b]) = 0.$$

Démonstration. **ÉTAPE 1 : L'énoncé est vrai pour les immersions fermées entre schémas réguliers.** Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B}}(Y)}(f_!\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_Y(a)[b]) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B}}(T)}(\mathbb{1}_T, f^!\mathbb{1}_Y(a)[b]) \\ &\underset{a'=a-c, b'=b-2c}{\overset{\text{(rap. 4)}}{\simeq}} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathbb{B}}(T)}(\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_T(a')[b']) \\ &\overset{\text{(rap. 7)}}{\simeq} \mathsf{Gr}_\gamma^{a'} \mathsf{K}_{2a'-b'}(T)_{\mathbb{Q}} \\ &\underset{2a'-b'<0}{=} 0. \end{aligned}$$

ÉTAPE 2 : On peut supposer T régulier. Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de T. Pour cela on considère une altération de Galois comme dans (rap. 6), qui existe en vertue de [CD09, Theorem 14.3.6], avec $M = \mathbb{1}_T$ pour obtenir le triangle distingué $\mathbb{1}_T \to i_!\mathbb{1}_Z \oplus (p_!\mathbb{1}_{T'})^G \to (a_!\mathbb{1}_{Z'})^G \xrightarrow{+1}$, où T' est régulier. En le composant par $f_!$ et en décalant on aboutit à

$$f_!(a_!\mathbb{1}_{Z'})^G[-1] \to f_!\mathbb{1}_T \to (fi)_!\mathbb{1}_Z \oplus f_!(p_!\mathbb{1}_{T'})^G \xrightarrow{+1}.$$

On applique le foncteur cohomologique $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(\bullet, \mathbb{1}_Y(a)[b])$ pour obtenir la suite exacte.

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}((fi)_!\mathbb{1}_Z, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(f_!(p_!\mathbb{1}_{T'})^G, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\
\Vert \\
\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}((fi)_!\mathbb{1}_Z \oplus f_!(p_!\mathbb{1}_{T'})^G, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\
\downarrow \\
\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(f_!\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\
\downarrow \\
\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(f_!(a_!\mathbb{1}_{Z'})^G[-1], \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\
\Vert \\
\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(f_!(a_!\mathbb{1}_{Z'})^G, \mathbb{1}_Y(a)[b+1])
\end{array}$$

La conclusion suit de l'hypothèse de récurrence et du fait que T' soit régulier.

ÉTAPE 3 : L'énoncé est vrai pour les morphismes projectifs. D'après l'étape 2, on peut supposer que T est régulier (dans la preuve de l'étape 2, les morphismes p, i et a sont projectifs, de sorte que l'on ne change pas la nature du morphisme f). On a une factorisation de f en une immersion fermée $c : T \hookrightarrow P$ et un morphisme lisse $s : P \to Y$, où P est régulier (car s est lisse). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(f_!\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_Y(a)[b]) &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(s_!c_!\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(P)}(c_!\mathbb{1}_T, s^!\mathbb{1}_Y(a)[b]) \\
&\underset{a'=a+d, b'=b+2d}{\overset{(\text{rap. } 3)}{\simeq}} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(P)}(c_!\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_P(a')[b']) \\
&\overset{\text{Étape 1}}{=} 0.
\end{aligned}$$

ÉTAPE 4 : L'énoncé est vrai pour les morphismes propres. On se ramène au cas projectif par le lemme de Chow motivique.

ÉTAPE 5 : conclusion. On choisit une compactification de T (voir par exemple [Nag63, § 4, Theorem 2]).

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{T} \arrow[d, "p"] & \partial\overline{T} \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

On compose le triangle de localisation $j_!\mathbb{1}_T \to \mathbb{1}_{\overline{T}} \to i_!\mathbb{1}_{\partial\overline{T}} \xrightarrow{+1}$ par $p_!$ et on le décale :

$$g_!\mathbb{1}_{\partial\overline{T}}[-1] \to f_!\mathbb{1}_T \to p_!\mathbb{1}_{\overline{T}} \xrightarrow{+1}.$$

On applique $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(Y)}(\bullet, \mathbb{1}_Y(a)[b])$ pour conclure (via l'étape 5 ; les morphismes p et g sont propres). □

Théorème 3.3. *Soit*

$$\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \supset \mathscr{H}_S := \{f_!\mathbb{1}_X(x)[2x] \mid x \in \mathbb{Z},\ f : X \to S \textit{ propre à domaine régulier}\}.$$

(i) *Il existe une unique structure de poids* $W/\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)$ *telle que* $\mathscr{H}_S^{\infty} \subset \mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)_{W=0}$.

(ii) *Il existe une unique structure de poids* $w/\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)$ *telle que* $\mathscr{H}_S \subset \mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)_{w=0}$. *Précisément* $\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)_{w=0} = \mathfrak{R}(\mathscr{H}_S^{\oplus})$.

(iii) $w = W_{|\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)}$.

Démonstration. On applique 1.19(b_∞).

- La catégorie $\mathscr{H}_S$ engendre $\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)$: [CD09, Corollary 14.3.9]. Ainsi $\langle \mathscr{H}_S \rangle^{\text{ép}} = \mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)$, ce qui implique par (rap. 8), $\langle \mathscr{H}_S \rangle_{\infty}^{\text{ép}} = \mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)$.
- Il faut voir que si H_1 et H_2 sont des objets de $\mathscr{H}_S$ et que $i \in \mathbb{N}_{>0}$ alors $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)}(H_1, H_2[i]) = 0$. On se ramène au calcul de $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)}(f_!\mathbb{1}_X, g_!\mathbb{1}_Y(a)[b])$ lorsque $b > 2a$. Considérons le diagramme cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)}(f_!\mathbb{1}_X, g_!\mathbb{1}_Y(a)[b]) &\overset{(\text{rap. }1)}{=} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)}(f_!\mathbb{1}_X, g_*\mathbb{1}_Y(a)[b]) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(Y)}(g^* f_!\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\ &\overset{(\text{rap. }2)}{\simeq} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(Y)}(f'_! g'^*\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\ &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(Y)}(f'_!\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\ &\overset{3.2}{=} 0. \end{aligned}$$

La détermination exacte du cœur suit du théorème 1.9. □

Remarque 3.4. On arrive au même résultat lorsqu'on demande que les objets de $\mathscr{H}_S$ proviennent de morphismes projectifs à domaine régulier. Ceci prouve en particulier que W (respectivement w) coïncide avec la structure de poids notée $w_{\text{Chow}}^{\text{big}}$ (respectivement w_{Chow}) dans [Bon10a, Theorem 2.2.1].

Remarque 3.5. Lorsque $S = \mathsf{Spec}(k)$, k désignant un corps de caractéristique 0, on retrouve la structure de poids de [Bon10b, § 6.5] ; autrement dit : $\mathfrak{R}(\mathscr{H}_k^{\oplus}) = \mathsf{DM}_{\text{Б},c}(k)_{w=0}$ est la catégorie des motifs de Chow sur k.

Remarque 3.6. Considérons les catégories suivantes

$$\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S) \supset \mathsf{NEG}_S := \{f_!\mathbb{1}_X(a)[b] \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2, b \leqslant 2a, f : X \to S \text{ propre à domaine régulier}\}^{\oplus}.$$
$$\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S) \supset \mathsf{POS}_S := \{f_!\mathbb{1}_X(a)[b] \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2, b \geqslant 2a, f : X \to S \text{ propre à domaine régulier}\}^{\oplus}.$$

Alors par construction (cf. preuve de 1.9 et 1.16 ainsi que les remarques 1.10 et 1.17)

$$\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)_{W\leqslant 0} = \mathfrak{R}(\mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)}(\mathfrak{R}(\mathsf{NEG}_S))), \quad \mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)_{W\geqslant 0} = \mathfrak{R}(\mathfrak{Ext}^{\infty}_{\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)}(\mathfrak{R}(\mathsf{POS}_S))).$$
$$\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)_{w\leqslant 0} = \mathfrak{R}(\mathfrak{Ext}_{\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)}(\mathfrak{R}(\mathsf{NEG}_S))), \quad \mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)_{w\geqslant 0} = \mathfrak{R}(\mathfrak{Ext}_{\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)}(\mathfrak{R}(\mathsf{POS}_S))).$$

De plus l'orthogonalité forte, la remarque 1.4, le lemme 1.7 et le lemme 1.13 nous donnent

$$\mathsf{DM}_{\text{Б}}(S)_{W\geqslant 0} = {}^{\perp}\mathsf{NEG}_S[-1]$$
$$\mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)_{w\leqslant 0} = \mathsf{POS}_S[1]^{\perp}, \quad \mathsf{DM}_{\text{Б},c}(S)_{w\geqslant 0} = {}^{\perp}\mathsf{NEG}_S[-1].$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005422 Published online by Cambridge University Press

On prendra garde que l'orthogonal de la première égalité se calcule dans $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ tandis que les autres orthogonaux se calculent dans $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$.

Lemme 3.7. *Notons*

$$\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \supset \mathscr{G}_S^- := \{f_\sharp \mathbb{1}_X(a)[b] \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2, b \leqslant 2a, f : X \to S \text{ lisse}\}.$$

Alors on a $\mathfrak{R}(\mathfrak{Ext}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)}(\mathfrak{R}(\mathscr{G}_S^-))) \subset \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w\leqslant 0}$.

Démonstration. D'aprés la remarque 3.6, il suffit de voir que $\mathscr{G}_S^-$ est orthogonale à $\mathsf{POS}[1]$ (où l'orthogonal est pris dans $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$) ; il s'agit donc de prouver que $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(f_\sharp \mathbb{1}_X, g_! \mathbb{1}_Y(a)[b]) = 0$ lorsque a et b sont des entiers tels que $b > 2a$, $f : X \to S$ est un morphisme lisse et $g : Y \to S$ est un morphisme propre à domaine régulier. Considérons le diagramme cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(f_\sharp \mathbb{1}_X, g_! \mathbb{1}_Y(a)[b]) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(X)}(\mathbb{1}_X, f^* g_! \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\ &\overset{\text{(rap. 2)}}{\simeq} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(X)}(\mathbb{1}_X, g'_! f'^* \mathbb{1}_Y(a)[b]) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(X)}(\mathbb{1}_X, g'_! \mathbb{1}_T(a)[b]) \\ &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(X)}(\mathbb{1}_X, g'_* \mathbb{1}_T(a)[b]) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)}(g'^* \mathbb{1}_X, \mathbb{1}_T(a)[b]) \\ &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)}(\mathbb{1}_T, \mathbb{1}_T(a)[b]) \\ &\overset{3.2}{=} 0. \end{aligned}$$

Le schéma T est régulier car Y est régulier et f' est lisse. □

À présent nous allons établir les relations de w-exactitude des opérations de Grothendieck.

Théorème 3.8. *Soit $\alpha : S \to T$ un morphisme de schémas.*

(i) *Les foncteurs $\alpha^* : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ et $\alpha_! : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)$ sont w-exacts à gauche.*

(i′) *Les foncteurs $\alpha_* : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)$ et $\alpha^! : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ sont w-exacts à droite.*

($\mathrm{i_c}$) *Les foncteurs $\alpha^* : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ et $\alpha_! : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T)$ sont w-exacts à gauche.*

($\mathrm{i'_c}$) *Les foncteurs $\alpha_* : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T)$ et $\alpha^! : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ sont w-exacts à droite.*

(ii) *Supposons que α soit lisse, alors le foncteur $\alpha_\sharp : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)$ est w-exact à gauche.*

(ii′) *Supposons que α soit lisse, alors le foncteur $\alpha^* : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ est w-exact.*

($\mathrm{ii_c}$) *Supposons que α soit lisse, alors le foncteur $\alpha_\sharp : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T)$ est w-exact à gauche.*

($\mathrm{ii'_c}$) *Supposons que α soit lisse, alors le foncteur $\alpha^* : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(T) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ est w-exact.*

(iii) *Soit $(n, n') \in \mathbb{Z}^2$. Le bifoncteur $\otimes_S : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ induit un bifoncteur $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\leqslant n} \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\leqslant n'} \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\leqslant n+n'}$.*

(iii′) *Soit* $(n,p)\in\mathbb{Z}^2$*. Le bifoncteur* $\underline{\mathsf{Hom}}_S : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)^{\mathsf{opp}} \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ *induit un bifoncteur* $\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)^{\mathsf{opp}}_{W\leqslant n} \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\geqslant p} \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\geqslant p-n}$.

(iii$_{\mathrm{c}}$) *Soit* $(n,n')\in\mathbb{Z}^2$*. Le bifoncteur* $\otimes_S : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ *induit un bifoncteur* $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w\leqslant n} \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w\leqslant n'} \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w\leqslant n+n'}$.

(iii$'_{\mathrm{c}}$) *Soit* $(n,p)\in\mathbb{Z}^2$*. Le bifoncteur* $\underline{\mathsf{Hom}}_S : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)^{\mathsf{opp}} \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S) \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ *induit un bifoncteur* $\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)^{\mathsf{opp}}_{w\leqslant n} \times \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w\geqslant p} \to \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w\geqslant p-n}$.

(iv) *Pour tout entier* $n\in\mathbb{Z}$*, le foncteur* $\bullet\otimes_S \mathbb{1}_S(n)[2n] : \mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)\to\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)$ *est w-exact.*

(iv$_{\mathrm{c}}$) *Pour tout entier* $n\in\mathbb{Z}$*, le foncteur* $\bullet\otimes_S \mathbb{1}_S(n)[2n] : \mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)\to\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)$ *est w-exact.*

(v) *On a toujours* $\mathbb{1}_S\in\mathscr{G}_S^-\subset\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w\leqslant 0}$*. De plus si S est régulier alors* $\mathbb{1}_S\in\mathscr{H}_S\subset\mathsf{DM}_{\mathrm{B},c}(S)_{w=0}$.

Démonstration. Le morphisme $\mathsf{Id}_S : S\to S$ est lisse donc $\mathbb{1}_S\in\mathscr{G}_S^-$. Si de plus S est régulier alors Id_S est propre à domaine régulier donc $\mathbb{1}_S\in\mathscr{H}_S$ ce qui prouve (v).

Soit $?\in\{\mathrm{i},\mathrm{ii},\mathrm{iii}\}$. On démontre (cf. [Bon10a, Proposition 1.2.3.9]) qu'un adjoint à gauche est w-exact à gauche si et seulement si l'adjoint à droite associé est w-exact à droite ; ainsi l'énoncé (?) (respectivement (?$_{\mathrm{c}}$)) équivaut à (?′) (respectivement (?$'_{\mathrm{c}}$)). L'énoncé (?$_{\mathrm{c}}$) (respectivement (?$'_{\mathrm{c}}$)) se déduit de (?) (respectivement (?′)) par 3.3(iii) et (rap. 9). En conclusion, il suffit de montrer (i′), (ii′), (iii) et (iv).

(i′) Soit $P\in\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\geqslant 0}$; on veut montrer que $\alpha_*P\in\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)_{W\geqslant 0}$. D'aprés la remarque 3.6, il suffit de voir que pour tout $f_!\mathbb{1}_X(a)[b]\in\mathsf{NEG}_T$, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)}(f_!\mathbb{1}_X(a)[b],\alpha_*P[1])=0$. Considérons le diagramme cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "\alpha"'] & T \end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)}(f_!\mathbb{1}_X(a)[b],\alpha_*P[1]) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(\alpha^*f_!\mathbb{1}_X(a)[b],P[1])\\ &\overset{\text{(rap. 2)}}{\simeq} \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(f'_!\alpha'^*\mathbb{1}_X(a)[b],P[1])\\ &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(f'_!\mathbb{1}_Y(a)[b],P[1])\\ &= 0.\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité : en utilisant l'argument de l'étape 2 de la preuve de 3.2 (on applique le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(\bullet,P[1])$ pour la conclusion), on peut supposer que Y est régulier. Dans ce cas $f'_!\mathbb{1}_Y(a)[b]\in\mathsf{NEG}_S\subset\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\leqslant 0}=\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)_{W\geqslant 0}[1]^{\perp}$.

Pour le second foncteur on raisonne comme précédement : il suffit de montrer que pour tout $P\in\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)_{W\geqslant 0}$ et $f_!\mathbb{1}_X(a)[b]\in\mathsf{NEG}_S$ on a $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(f_!\mathbb{1}_X(a)[b],\alpha^!P[1])=0$. Par adjonction il revient au même de montrer que $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)}((\alpha f)_!\mathbb{1}_X(a)[b],P[1])=0$. En utilisant le principe de l'étape 5 (cf. 3.2), on peut supposer αf propre (et X est toujours régulier). Ainsi $(\alpha f)_!\mathbb{1}_X(a)[b]\in\mathsf{NEG}_T\subset\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)_{W\leqslant 0}=\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)_{W\geqslant 0}[1]^{\perp}$.

(ii′) On montre que α^* est w-exact à droite. Soit $P\in\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)_{W\geqslant 0}$; comme pour le cas (i)′, il suffit de montrer que pour tout $f_!\mathbb{1}_X(a)[b]\in\mathsf{NEG}_S$ on a $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(S)}(f_!\mathbb{1}_X(a)[b],\alpha^*P[1])=0$. Par adjonction il revient au même de montrer que $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\mathrm{B}}(T)}(\alpha_\sharp f_!\mathbb{1}_X(a)[b],P[1])=0$. En utilisant la pureté relative (rap. 3), on peut remplacer le symbole $\sharp$ par ! ; dans ce cas a est remplacé

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005422 Published online by Cambridge University Press

par $a' = a + d$ et b par $b' = b + 2d$, où d est la dimension relative de α. D'aprés le point (v) déjà prouvé, $\mathbb{1}_X(a')[b'] \in \mathscr{G}_X^- \subset \mathsf{DM}_{\text{B},c}(X)_{w\leqslant 0}$. Par le point (i), $(\alpha f)_!\mathbb{1}_X(a')[b'] \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(T)_{W\leqslant 0}$. La conclusion suit par orthogonalité.

(iv) Soit $P \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\geqslant 0}$. On va montrer que $P(n)[2n] \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\geqslant 0}$. Il suffit de voir que pour tout $f_!\mathbb{1}_S(a)[b] \in \mathsf{NEG}_S$, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)}(f_!\mathbb{1}_S(a)[b], P(n)[2n+1]) = 0$. Or ce groupe s'identifie à $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)}(f_!\mathbb{1}_S(a-n)[b-2n], P[1])$ et $f_!\mathbb{1}_S(a-n)[b-2n] \in \mathsf{NEG}_S$.

Soit $N \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$. On va montrer que $N(n)[2n] \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$. Il suffit de voir que pour tout $P \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\geqslant 0}$, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)}(N(n)[2n], P[1]) = 0$. Or ce groupe s'identifie à $\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)}(N, P(-n)[-2n+1])$ et le raisonement précédent donne $P(-n)[-2n] \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\geqslant 0}$.

(iii) Soient $f_!\mathbb{1}_X(a)[b] \in \mathsf{NEG}_S$, $N \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$ et $P \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\geqslant 0}$ alors, utilisant la formule de projection rappelée en (rap. 1), on a

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)}(f_!\mathbb{1}_X(a)[b] \otimes_S N, P[1]) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)}(f_!(\mathbb{1}_X(a)[b] \otimes_X f^*N), P)\\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{DM}_{\text{B}}(X)}(f^*N(a)[b], f^!P[1])\\ &= 0.\end{aligned}$$

Les points (i) et (iv) justifient que $f^*N(a)[b] \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(X)_{W\leqslant 0}$, (i′) justifie $f^!P \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(X)_{W\geqslant 0}$; la dernière égalité suit par orthogonalité. On a ainsi montré que, pour tout $N \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$, $\bullet \otimes_S N : \mathsf{DM}_{\text{B}}(S) \to \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)$ transforme les objets de NEG_S en objet de $\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\geqslant 0}[1]^{\perp} = \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$. On peut sans peine remplacer NEG_S par ses retractes, ses extensions et des sommes arbitraires reconstruisant ainsi $\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$. Nous avons ainsi montré que le produit tensoriel induit un bifoncteur $\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0} \times \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0} \to \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$. Si $N \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant n}$ et $N' \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant n'}$ alors $N[-n], N'[-n'] \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$ ce qui implique par le raisonnement précédent $N \otimes_S N'[-n-n'] = N[-n] \otimes_S N'[-n] \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant 0}$, soit encore $N \otimes_S N' \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\leqslant n+n'}$. □

Corollaire 3.9. *Soient $f : S \to T$ un morphisme de schémas, $n \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathsf{DM}_{\text{B}}(T)_{W\geqslant 0}$. Le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_S(\bullet, f^!P) : \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)^{\mathsf{opp}}\mathsf{DM}_{\text{B}}(S) \to$ induit un foncteur $\mathsf{DM}_{\text{B}}(S)^{\mathsf{opp}}_{W\leqslant n} \to \mathsf{DM}_{\text{B}}(S)_{W\geqslant -n}$. Si de plus P est constructible alors il induit également un foncteur $\mathsf{DM}_{\text{B},c}(S)^{\mathsf{opp}}_{w\leqslant n} \to \mathsf{DM}_{\text{B},c}(S)_{w\geqslant -n}$.*

C'est en particulier le cas pour le foncteur de dualité locale (cf. [CD09, § 14.3.30]).

Démonstration. C'est un cas particulier de (i′), (i′$_c$), (iii′), (iii′$_c$). □

Remarque 3.10. On prouve que, lorsque le schéma de base B est régulier (cf. notations et conventions) et que le morphisme structural $\pi : S \to B$ est lisse, le foncteur de dualité locale induit une équivalence de catégories entre $\mathsf{DM}_{\text{B},c}(S)^{\mathsf{opp}}_{w\leqslant 0}$ et $\mathsf{DM}_{\text{B},c}(S)_{w\geqslant 0}$ [Héb10, le corollaire 2.2.5].

Proposition 3.11. *Supposons que S soit régulier. Soit*

$$\mathsf{DM}_{\text{B}}(S) \supset \mathscr{L}_S := \{f_!\mathbb{1}_X(x)[2x] \mid x \in \mathbb{Z}, f : X \to S \textit{ lisse et propre}\}.$$

Notons $\mathsf{DM}_{\text{B},s}(S) := \langle \mathscr{L}_S \rangle^{\text{ép}}$ la catégorie des motifs lisses de Levine (cf. [Lev08]). Alors il existe $s/\mathsf{DM}_{\text{B},s}(S)$ une structure de poids telle que $s = w_{|\mathsf{DM}_{\text{B},s}(S)}$.

Démonstration. cf. 1.20. □

Remerciements

Mes remerciements les plus profonds vont à Jörg Wildeshaus pour m'avoir introduit à l'élégante théorie des motifs. Je le remercie également pour m'avoir suggéré un énoncé simple du lemme de Chow motivique 3.1. Je remercie Denis-Charles Cisinski pour m'en avoir indiqué la preuve.

Je remercie également Frédéric Déglise pour toutes les discussions que nous avons entretenues. Je tiens tout particulièrement à remercier Bradley Drew pour m'avoir indiqué une preuve simple de 3.8(iii$_c$) ainsi que pour sa patiente écoute et sa relecture scrupuleuse.

References

Ayo07 J. Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I–II)*, Astérisque, vol. 314–315 (Société Mathématique de France, Paris, 2007).

BS01 P. Balmer and M. Schlichting, *Idempotent completion of triangulated categories*, J. Algebra **236** (2001), 819–834.

BBD82 A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque, vol. 100 (Société Mathématique de France, Paris, 1982), 1–172.

Bon10a M. Bondarko, *Weight for relative motives; relation with mixed sheaves* (2010), arXiv:1007.4543v1 [math.AG].

Bon10b M. Bondarko, *Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)*, J. K-Theory **6** (2010), 387–504.

CD09 D.-C. Cinsinski and F. Déglise, *Triangulated categories of mixed motives* (2009), arXiv:0912.2110v2 [math.AG].

DG61 J. Dieudonné and A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique II*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, vol. 8 (Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-Sur-Yvette, France, 1961).

Héb10 D. Hébert, *Complexe de Poids, Dualité et Motifs de Beilinson* (2010), arXiv:1010.5469v1 [math.AG].

Lev08 M. Levine, *Smooth motives* (2008), arXiv:0807.2265v1 [math.AG].

Nag63 M. Nagata, *A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963), 89–102.

Nee01 A. Neeman, *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 148 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001).

Pau08 D. Pauksztello, *Compact corigid objects in triangulated categories and co-t-structures*, Cent. Eur. J. Math. **6** (2008), 25–42.

VSF00 V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, *Cycles, transfers and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 143 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000).

David Hébert hebert@math.univ-paris13.fr
LAGA - UMR CNRS 7539, Institut Galilée - Université Paris 13, 99 avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005422 Published online by Cambridge University Press