M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 101 (1986), 55-109

LE PRINCIPE SEMI-COMPLET DU MAXIMUM POUR LES NOYAUX DE CONVOLUTION RÉELS

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Soit X un groupe abélien localement compact, non-compact, séparé et dénombrable à l'infini. On désignera par ξ une mesure de Haar fixée sur X. Pour les noyaux de convolution réels sur X, le principe semi-complet du maximum est fondamental dans la théorie du potentiel. Soit N un noyau de convolution réel sur X vérifiant le principe semi-complet du maximum (désigné par $N \in (PSM)$). Pour déterminer l'allure de N à l'infini, la N-réduite $\eta_{N,\delta}$ de N à l'infini δ joue un rôle essentiel. Pour une exhaustion $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de compacts de X[1], $(\eta_{N,CK_n})_{n=1}^{\infty}$ est décroissante et $\lim_{n\to\infty} \eta_{N,CK_n}$ est une mesure de Radon réelle sur X ou bien, pour une fonction $f \geqq 0$, $\neq 0$ finie et continue dans X à support compact quelconque, $\lim_{n\to\infty} \int f d\eta_{N,CKn} = -\infty$, où η_{N,CK_n} est la N-réduite de N sur CK_n. Dans ce cas, $\lim_{n\to\infty} \eta_{N,CK_n}$ est indépendant du choix de $(K_n)_{n=1}^{\infty}$. Posons

$$(1.1) \qquad \eta_{N,\delta} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \eta_{N,CK_n} & \text{si elle est une mesure de Radon réelle} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

Dans le cas où $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$, le principe semi-complet du maximum pour N résultera principalement du principe complet du maximum pour les noyaux de convolution de Hunt dont les semi-groupes de convolution sont sous-markoviens.

THÉORÈME 1. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Alors il y a une équivalence entre:*

(1) *$N \in (PSM)$, $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$, $N \neq \eta_{n,\delta}$ et N est non-périodique.*

(2) *N est de la forme*

$$(1.2) \qquad N = N_0 - a\xi_\Gamma + \varphi\xi + N',$$

Received May 28, 1984.

[1] Cela signifie que K_n est compact dans X, $K_n \subset$ l'intérieur de K_{n+1} et $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = X$.

où N_0 est un noyau de convolution de Hunt sur X dont le semi-groupe de convolution est sous-markovien, Γ est un sous-groupe fermé de X vérifiant $\mathrm{supp}(N_0) \subset \Gamma$, *$\xi_\Gamma$ est une mesure de Haar fixée sur Γ, a est une constante réelle vérifiant $\underline{\lim}_{x \to \delta}(N_0 + \check{N}_0 - a\xi_\Gamma) * f(x) \geqq 0$ pour toute $f \in C_K^+(X)$ ou bien $\int dN_0 \geqq a \int d\xi_\Gamma$ d'accord avec $\int d\xi_\Gamma = \infty$ ou bien $\int d\xi_\Gamma < \infty$ et $(N_0 + N' - a\xi_\Gamma) * g * \check{g}(0) \geqq 0$ pour toute $g \in C_K^\circ(X)$, φ est une fonction additive et continue sur X et où N' est une noyau de convolution réel sur X vérifiant les quatre conditions suivantes:*

(a) *$N' \in (PSM)$.*

(b) *Tout le point x de Γ est une période de N', c'est-à-dire, $N' * \varepsilon_x = N'$.*

(c) *N' est pseudo-invariant, c'est-à-dire,*

$$N' \in \bigcap_{K:\ \mathrm{compact}} S_{CK}(N'),$$

où, pour un ouvert ω de X, $S_\omega(N')$ désigne la fermeture de $\{N' * \mu + a\xi;\ \mu \in M_K^+(X),\ \int d\mu = 1,\ \mathrm{supp}(\mu) \subset \omega,\ a$: constante réelle$\}$.

(d) *$N' - a\xi_\Gamma \in S(N')$, où $S(N') = S_X(N')$.*

Dans (2), $\eta_{N,\delta} = N' - \varphi\xi - a\xi_\Gamma$ si Γ est non-compact et $\eta_{N,\delta} = N' - \varphi\xi - a_0\xi_\Gamma$ si Γ est compact, où $a_0 = \max\{a;\ N' - a\xi_\Gamma \in S(N')\}$. Pour une fonction g sur X, on note $\check{g}(x) = g(-x)$ et, pour un noyau de convolution réel N, on désigne par $\check{N}$ le noyau de convolution symétrique de N par rapport à l'origine.

Par conséquent, il est essentiel de déterminer $N \in (PSM)$ vérifiant $\eta_{N,\delta} = -\infty$. Comme une généralisation et une précision du théorème principal dans [7], on aura le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Alors il y a une équivalence entre:*

(1) *$N \in (PSM)$, $\eta_{N,\delta} = -\infty$ et N est non-périodique.*

(2) *N est de la forme*

$$N = N_0 + \varphi\xi, \tag{1.3}$$

où N_0 est un noyau de convolution de type logarithmique sur X et φ est une fonction additive et continue sur X. Dans ce cas, la décomposition (1.3) de N est unique.

On connaît déjà que $N \in (PSM)$ et $N \in (PSB)$ sont équivalents (voir [7], où $N \in (PSB)$ signifie que N vérifie le principe du semi-balayage.

Dans la théorie du potentiel, il est naturel que $N \in (PSB_g)$ est plus important que $N \in (PSB)$, où $N \in (PSB_g)$ signifie que N vérifie le principe du semi-balayage sur tout ouvert. Dans [8], nous avons déjà donné une caractérisation de $N \in (PSB_g)$ et $N \in (PPM)$. Le théorème 3 est sa généralisation.

THÉORÈME 3. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Alors on a:*

(1) *Si $N \in (PSB_g)$ et il existe $x \in X$ tel que $N * (\varepsilon - \varepsilon_x)$ soit non-périodique, alors N est de la forme* (1.3).

(2) *Si N est de la forme* (1.3) *et s'il existe une fonction finie et continue f sur X à support compact telle que $\varphi = O(|N_0 * f|)$ à l'infini, alors $N \in (PSB_g)$ et pour $0 \neq x \in X$ quelconque, $N * (\varepsilon - \varepsilon_x)$ est non-périodique.*

On désigne ici par ε la mesure d'unité à l'origine 0.

Dans [7] et [8], la discussion concernant les noyaux de convolution de type logarithmique sur R ou bien Z n'est pas bien établie, où R et Z sont le groupe additif de nombres réels et le groupe additif d'entiers, respectivement. Nous remarquons que, dans les théorèmes 2 et 3, il n'y a aucune restriction pour X.

Finalement nous déterminerons les groupes abélien localement compacts sur lesquels les noyaux de convolution de type logarithmique existent.

THÉORÈME 4. *Pour qu'il existe un noyau de convolution de type logarithmique sur X, il faut et il suffit que $X \approx R^2 \times F$, $X \approx R \times Z \times F$, $X \approx Z^2 \times F$, $X \approx R \times F$ ou bien $X \approx Z \times F$, où F est un certain groupe abélien compact et séparé.*

Cela est une précision définitive du théorème B dans [7]. Par conséquent, pour $N \in (PSM)$, il est essentiel de discuter les noyaux de convolution réels N sur R^2.

§ 2. Définitions et préliminaires

On désigne par:

$C(X)$ l'espace de Fréchet usuel des fonctions finies et continues sur X;

$C_b(X)$ l'espace de Banach usuel des fonctions continues et bornées sur X;

$C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues sur X à support compact;

$M(X) = C_K(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X muni de la topologie vague;

$M_K(X) = C(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X à support compact;

$C^+(X)$, $C_b^+(X)$, $C_K^+(X)$, $M^+(X)$, $M_K^+(X)$ leur sous-ensembles des éléments $\geqq 0$;

$$C_K^\circ(X) = \left\{ f \in C_K(X); \int f d\xi = 0 \right\} \text{ et } M_K^\circ(X) = \left\{ \mu \in M_K(X); \int d\mu = 0 \right\}.$$

Soient N_1 et N_2 des noyaux de convolution réels (des mesures de Radon réelles) sur X. On désigne par:

$(N_1, N_2) \in (PRSM)$ si, pour f, $g \in C_K^+(X)$ à $f - g \in C_K^\circ(X)$ et $a \in R$ quelconques, $N_1 * f \leqq N_2 * g + a$ sur X dès que $N_1 * f \leqq N_2 * g + a$ sur $\operatorname{supp}(f)$, où $*$ désigne la convolution sur X et $\operatorname{supp}(f)$ désigne le support de f.

$(N_1, N_2) \in (PTMS)$ si, pour f, $g \in C_K^+(X)$ à $f - g \in C_K^\circ(X)$ et $a \in R$ quelconques, $N_1 * f \leqq N_1 * g + a$ sur $\operatorname{supp}(f)$ implique que $N_2 * f \leqq N_2 * g + a$ sur X.

$(N_1, N_2) \in (PRSB)$ si, pour $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert relativement compact $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, il existe $\mu' \in M^+(X)$ et $a \in R$ tels que $\int d\mu' = \int d\mu$, $\operatorname{supp}(\mu') \subset \bar{\omega}$, $N_1 * \mu' + a\xi \leqq N_2 * \mu$ et $N_1 * \mu' + a\xi = N_2 * \mu$ dans ω.

Soit N un noyau de convolution réel sur X. On dit que:

N vérifie le principe semi-complet du maximum (désigné par $N \in (PSM)$) si $(N, N) \in (PTMS)$.

N vérifie le principe du semi-balayage (désigné par $N \in (PSB)$) si $(N, N) \in (PRSB)$.

La proposition suivante est déjà connue (voir les remarque 2 et la proposition 11 dans [7]).

PROPOSITION 1. *Pour deux noyaux de convolution réels N_1 et N_2 sur X, il y a des équivalences entre:*

(1) $(N_1, N_2) \in (PTMS)$.

(2) $(\check{N}_1, \check{N}_2) \in (PTMS)$.

(3) $(N_1, N_2) \in (PRSB)$.

(4) $(\check{N}_1, \check{N}_2) \in (PRSB)$.

On appelle aussi ε le noyau d'identité sur X. On aura encore la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Alors il y a des équivalences entre:*

(1) $N \in (PSM)$.

(2) $N + c\varepsilon \in (PSM)$ *pour toute constante* $c > 0$.

(3) $N + \varphi\xi \in (PSM)$, *où φ est une fonction continue et additive sur X à valeurs réelles.*

L'équivalence entre (1) et (2) est déjà connue (voir la remarque 5 dans [7]). L'équivalence entre (1) et (3) résulte du fait que, pour $\mu \in M_K^\circ(X)$, $\varphi * \mu$ est une constante.

Pour un noyau de convolution réel N sur X, on désigne par $S_T(N)$ la totalité des noyaux de convolution réels M sur X vérifiant $(N, M) \in (PTMS)$.

PROPOSITION 3. *Pour un noyau de convolution N sur X, il y a des équivalences entre:*

(1) $N \in (PSM)$.

(2) *Pour* $\mu, \nu \in M_K^+(X)$ *à* $\mu - \nu \in M_K^\circ(X)$, *un ouvert ω et $a \in R$ quelconques,* $N * \mu \leqq N * \nu + a\xi$ *dès que* $N * \mu \leqq N * \nu + a\xi$ *dans ω et* $\mu(C\omega) = 0$.

(3) *Pour* $0 < a \in R$ *quelconque,* $N \in S(N + a\varepsilon)$.

(4) $S(N) = S_T(N)$.

Les équivalence entre (1), (3) et (4) résultront de la remarque 5 et la proposition 11 dans [7]. Montrons (1) $\Rightarrow$ (2). On peut supposer $\omega \neq \phi$. Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une exhaustion d'ouverts de ω[2] et posons $\lambda_i = \mu|_{C\omega_i}$[3]. D'après $N \in (PSB)$, il existe $\lambda'_i \in M_K^+(X)$ et $a_i \in R$ tels que $\int d\lambda'_i = \int d\lambda_i$, $\mathrm{supp}(\lambda'_i) \subset \bar{\omega}_i$, $N * \lambda'_i + a_i\xi \leqq N * \lambda_i$ et $N * \lambda'_i + a_i\xi = N * \lambda_i$ dans ω_i. Posons $\mu_i = \mu|_{\omega_i} + \lambda'_i$; alors $N * \mu_i \leqq N * \nu + (a - a_i)\xi$ dans ω, $\mathrm{supp}(\mu_i) \subset \bar{\omega}_i \subset \omega$ et $\nu - \mu_i \in M_K^\circ(X)$. D'après la remarque 8, (1), dans [7], on a $N * \mu_i \leqq N * \nu + (a - a_i)\xi$. Comme $\lim_{i \in I} \int d\lambda_i = 0$, on a $\lim_{i \in I}(N * \lambda'_i + a_i\xi) = 0$, et donc $N * \mu \leqq N * \nu + a\xi$, d'où (1) $\Rightarrow$ (2). L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est évident.

De la même manière que dans la remarque 19 dans [7], on aura la proposition suivante:

PROPOSITION 4. *Soit $N \in (PSM)$ et $M \in S(N)$. Alors on a:*

(1) *Pour on ouvert $\omega \neq \phi$ dans X, il existe $\eta_{M,\omega} \in S(N)$ et un seul*

(2) Cela signifie que $(\omega_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante d'ouverts relativement compacts $\neq \phi$ dans X vérifiant $\bar{\omega}_i \subset \omega_j$ $(i \lneqq j)$ et $\cup_{i \in I} \omega_i = \omega$.

(3) Pour $\mu \in M(X)$ et un ensemble μ-mesurable set A, $\mu|_A = \mu$ sur A et $\mu|_A = 0$ sur CA.

tel que $\eta_{M,\omega} \leqq M$, $\eta_{M,\omega} = M$ *dans* ω *et* $\eta_{M,\omega} \in \overline{R_N(M;\omega)}$, *où*

$$R_N(M;\omega) = \Big\{N*\mu + a\xi;\, \mu \in M_K^+(X),$$
$$\int d\mu = 1,\ \mathrm{supp}(\mu) \subset \omega,\, a \in R,\, N*\mu + a\xi \leqq M\Big\}.$$

(2) *L'application* $S(N) \ni M \to \eta_{M,\omega} \in S(N)$ *est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire, pour* $f \in C_K^+(X)$, *la fonction* $\int f d\eta_{M,\omega}$ *de* M *est semi-continue inférieurement.*

(3) $\eta_{M,\omega}$ *est croissant avec* ω *et, pour une exhaustion* $(\omega_i)_{i\in I}$ *d'ouverts de* ω, *on a* $\eta_{M,\omega} = \lim_{i\in I}\eta_{M,\omega_i}$[4].

(4) *Si* $\bar{\omega}$ *est compact, il existe* $\mu'_\omega \in M_K^+(X)$ *et* $a'_\omega \in R$ *tels que* $N*\mu'_\omega + a'_\omega\xi = \eta_{M,\omega}$, $\int d\mu'_\omega = 1$ *et* $\mathrm{supp}(\mu'_\omega) \subset \bar{\omega}$.

On dit que $\eta_{M,\omega}$ est la N-réduite de M sur ω.

Remarque 5. Soient N et M les mêmes que ci-dessus. Alors, pour une exhaustion $(K_n)_{n=1}^\infty$ de compacts de X, $\lim_{n\to\infty}\eta_{M,CK_n} \in M(X)$ ou bien, pour $0 \neq f \in C_K^+(X)$ quelconque, $\lim_{n\to\infty}\int f d\eta_{M,CK_n} = -\infty$.

Cela est obtenu de la même manière que dans la remarque 19 dans [7]. Posons

$$\eta_{M,\delta} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\eta_{M,CK_n} & \text{si} \quad \lim\limits_{n\to\infty}\eta_{M,CK_n} \in M(X) \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\eta_{M,\delta}$ est indépendant du choix de $(K_n)_{n=1}^\infty$ et s'appelle le N-réduite de M à l'infini δ. Evidemment on a, pour $\mu \in M_K^+(X)$ à $\int d\mu = 1$,

$$\eta_{M*\mu,\delta} = \eta_{M,\delta} * \mu$$

dès que $\eta_{M,\delta} \neq -\infty$.

Soit $N \in (PSM)$, $M \in S(N)$ et ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X. Pour $\mu \in M^+(X)$ vérifiant $\int d\mu < \infty$ et $M*\mu \in M(X)$ quelconque, on pose

$$\underline{SB}_{N,M}(\mu,\omega) = \Big\{(\mu', a') \in M_K^+(X) \times R\,;$$
$$\int d\mu' = \int d\mu,\ \mathrm{supp}(\mu') \subset \bar{\omega},\ \Big(1\Big/\int d\mu\Big)(N*\mu' + a'\xi) = \eta_{M*\mu/\int d\mu,\,\delta}\Big\}.$$

[4] Pour une famille filtrante $(\mu_i)_{i\in I}$ dans $M(X)$ et $\mu \in M(X)$, on écrit $\mu = \lim_{i\in I}\mu_i$ si $(\mu_i)_{i\in I}$ converge vaguement vers μ.

D'après (4) de la proposition 3, $\underline{SB}_{N,M}(\mu, \omega) \neq \phi$. On note simplement $\underline{SB}_N(\mu, \omega) = \underline{SB}_{N,N}(\mu, \omega)$. Tout l'élément de $\underline{SB}_N(\mu, \omega)$ s'appelle un couple N-semi-balayé intérieurement de μ sur ω.

Remarque 6. Soient N, M et μ les mêmes que ci-dessus, et soient ω_1 et ω_2 deux ouverts relativement compacts $\neq \phi$ dans X vérifiant $\omega_1 \supset \omega_2$. Alors, pour $(\mu_1', a_1') \in \underline{SB}_{N,M}(\mu, \omega_1)$, il existe $(\mu_2', a_2') \in \underline{SB}_{N,M}(\mu, \omega_2)$ tel que $\mu_2' \geqq \mu_1'$ dans ω_2.

Cela se comprend, en considérant $\underline{SB}_{N,M}(\mu_1'|_{C\omega_2}, \omega_2)$.

PROPOSITION 7 (voir la proposition 16 dans [7]). *Soit $N \in (PSM)$ et ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X. Alors on a:*

(1) *Pour $0 < p \in R$ et $\mu \in M_K^+(X)$ quelconques, $\underline{SB}_{N+\varepsilon/p,N}(\mu, \omega)$ forme un seul élément. On le désigne par $(\mu_{p,\omega}', a_{\mu,p,\omega})$ et définit l'opérateur linéaire*

$$V_{p,\omega}: M_K(X) \ni \mu \longrightarrow \frac{1}{p}((\mu^+)_{p,\omega}' - (\mu^-)_{p,\omega}') \in M_K(X)\,.$$

(2) *L'applications $X \ni x \to V_{p,\omega}\varepsilon_x \in M_K^+(X)$ et $X \ni x \to a_{x,p,\omega}$ sont universellement mesurables, où ε_x désigne la mesure d'unité à x et $a_{x,p,\omega} = a_{\varepsilon_x,p,\omega}$.*

(3) *Pour $\mu \in M_K(X)$ quelconque, on a*

$$V_{p,\omega}\mu = \int V_{p,\omega}\varepsilon_x d\mu(x)^{(5)} \quad et \quad a_{\mu,p,\omega} = \int a_{x,p,\omega} d\mu(x)\,.$$

(4) *Pour $\mu \in M_K(X)$ et $0 < p,\ q \in R$ quelconques, on a*

$$V_{p,\omega}\mu - V_{q,\omega}\mu = (q-p)\int V_{q,\omega}\varepsilon_x dV_{p,\omega}\mu(x)$$

$$(\textit{désigné par } (q-p)V_{q,\omega}\cdot V_{p,\omega}\mu)\,.$$

PROPOSITION 8. *Soit ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X, $0 < p \in R$ et $\mu \in M_K(X)$. Alors on a:*

(1) *$V_{p,\omega}\mu(\partial\omega) = 0$, où $\partial\omega$ désigne la frontière de ω.*

(2) *$N * \mu|_\omega = V_{p,\omega}(pN * \mu|_\omega + \mu)$ dès que $\mu \in M_K^\circ(X)$.*

Preuve. Pour (1), on peut supposer que $\mu \in M_K^+(X)$. Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une exhaustion d'ouverts de ω. On a $\lim_{i \in I} V_{p,\omega_i}\mu = V_{p,\omega}\mu$ (voir le corollaire 12 et sa preuve dans [7]), et donc $\lim_{i \in I} a_{\mu,p,\omega_i} = a_{\mu,p,\omega}$. Evidemment

(5) Ce la signifie que, pour $f \in C_K(X)$ quelconque,

$$\int f dV_{p,\omega}\mu = \iint f dV_{p,\omega}\varepsilon_x d\mu(x)\,.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

$((pN+\varepsilon)*V_{p,\omega_i}\mu+a_{\mu,p,\omega_i}\xi)_{i\in I}$ converge d'une manière croissante vers $(pN+\varepsilon)*V_{p,\omega}\mu+a_{\mu,p,\omega}\xi$. D'après $N\in(PSM)$, on a $(N+(1/p)\varepsilon, N)\in(PTMS)$, et donc $(N*(pV_{p,\omega_i}\mu)+a_{\mu,p,\omega_i}\xi)_{i\in I}$ converge aussi d'une manière croissante vers $N*(pV_{p,\omega}\mu)+a_{\mu,p,\omega}\xi$. Soit $i_0\in I$ quelconque fixé. Alors, pour $I\ni i\geqq i_0$ quelconque,

$$V_{p,\omega_i}\mu\leqq(N*\mu-N*(pV_{p,\omega_{i_0}}\mu)-a_{\mu,p,\omega_{i_0}}\xi)|_\omega\,,$$

et donc

$$V_{p,\omega}\mu\leqq(N*\mu-N*(pV_{p,\omega_{i_0}}\mu)-a_{\mu,p,\omega_{i_0}}\xi)|_\omega\,,$$

d où (1). Comme, dans ω,

$$N*(N*\mu|_\omega)=(pN+\varepsilon)*V_{p,\omega}(N*\mu|_\omega)+a_{N*\mu|_\omega,p,\omega}\xi$$

et

$$\begin{aligned}N*(N*\mu|_\omega)&=N*(((pN+\varepsilon)*V_{p,\omega}\mu+a_{\mu,p,\omega}\xi)|_\omega)\\&=(pN+\varepsilon)*\left(\left(N*V_{p,\omega}\mu+\frac{1}{p}a_{\mu,p,\omega}\xi\right)\Big|_\omega\right)-\frac{1}{p}a_{\mu,p,\omega}\xi\,,\end{aligned}$$

$pN+\varepsilon\in(PSM)$, (1), $p\int dV_p\mu=\int d\mu=0$ et la proposition 3, (2) donnent

$$\begin{aligned}&(pN+\varepsilon)*\left(\left(N*V_{p,\omega}\mu+\frac{1}{p}a_{\mu,p,\omega}\xi\right)\Big|_\omega\right)-\frac{1}{p}a_{\mu,p,\omega}\xi\\&\qquad=(pN+\varepsilon)*V_{p,\omega}(N*\mu|_\omega)+a_{N*\mu|_\omega,p,\omega}\xi\ \text{dans}\ X.\end{aligned}$$

D après $\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon, N\right)\in(PTMS)$, on a

$$N*\left(\left(N*V_{p,\omega}\mu+\frac{1}{p}a_{\mu,p,\omega}\xi\right)\Big|_\omega\right)-\frac{1}{p}a_{\mu,p,\omega}\xi=N*V_{p,\omega}(N*\mu|_\omega)+a_{N*\mu|_\omega,p,\omega}\xi\,.$$

et donc

$$\left(N*V_{p,\omega}\mu+\frac{1}{p}a_{\mu,p,\omega}\xi\right)\Big|_\omega=V_{p,\omega}(N*\mu|_\omega)\,,$$

d où (2).

COROLLAIRE 9. (1) *Pour $p>0$ quelconque, on a*

$$pV_{p,\omega}(\xi|_\omega)=\xi|_\omega\,.$$

(2) *Pour $f\in C_K^\circ(X)$ à* supp$(f)\subset\omega$ *et $\mu\in M_K^\circ(X)$ quelconques, on a*

$$\int f dN * \mu = \lim_{p\to 0} \int f dV_{p,\omega}\mu .$$

(3) *Pour une fonction bornée et universellement mesurable f dans X à valeurs réelles vérifiant $f(x)=0$ sur $C\omega$ quelconque,*

$$p\int f(x)d\xi(x)\int f(y)dV_{p,\omega}\varepsilon_x \leqq \int |f|^2 d\xi .$$

Preuve. Soit φ une fonction additive et continue sur X. Alors $N+\varphi\xi \in (PSM)$ (voir la proposition 2) et, pour $0<p\in R$ et $\mu\in M_K^+(X)$ quelconques, $\left(\mu'_{p,\omega}, a_{\mu,p,\omega}+\int \varphi d\mu - \int \varphi d\mu'_{p,\omega}\right) \in \underline{SB}_{N+\varphi\xi+(\varepsilon/p),N+\varphi\xi}(\mu,\omega)$, car $(\varphi\xi)*\mu = \left(\int d\mu\right)\varphi\xi - \left(\int \varphi d\mu\right)\xi$. En utilisant la proposition 7 et proposition 8, (2), pour $N+\varphi\xi$ au lieu de N, on a aussi, pour toute $\mu\in M_K^\circ(X)$,

$$(N+\varphi\xi)*\mu|_\omega = V_{p,\omega}(p(N+\varphi\xi)*\mu|_\omega + \mu) .$$

Par conséquent, on a

$$\left(\int \varphi d\mu\right)\xi|_\omega = pV_{p,\omega}\left(\left(\int \varphi d\mu\right)\xi|_\omega\right) .$$

Comme X est non-compact, il existe une fonction additive et continue $\varphi\neq 0$ sur X, et donc il existe $\mu\in M_K^\circ(X)$ telle que $\int \varphi d\mu \neq 0$, et donc (1) a lieu.

Montrons (2). Soit $f\in C_K^\circ(X)$ à $\mathrm{supp}(f)\subset\omega$ et $\mu\in M_K^\circ(X)$. Comme $\check{N}\in(PSM)$ donne $\sup_{y\in X}|\check{N}*f(y)| = \max_{y\in\mathrm{supp}(f)} |\check{N}*f(y)|$, $\left(p\int f dN * V_{p,\omega}\varepsilon_x\right)_{p>0}$ est uniformément bornée, et donc $\left(\int f dV_{p,\omega}\varepsilon_x\right)_{p>0}$ est uniformément bornée. D'après la proposition 7 et la proposition 8, (2), on a, pour tout $p>0$,

$$\int f dN*\mu = \int f dV_{p,\omega}(pN*\mu|_\omega + \mu) = \int f dV_{p,\omega}\mu + p\iint f dV_{p,\omega}\varepsilon_y dN*\mu|_\omega(y) ,$$

d'où

$$\lim_{p\to 0}\int f dV_{p,\omega}\mu = \int f dN*\mu .$$

Montrons (3). On a, d'après (1) et $p\int dV_{p,\omega}\varepsilon_x = 1$,

$$\int |f|^2 d\xi - p\int f(x)d\xi(x)\int f(y)dV_{p,\omega}\varepsilon_x$$
$$= \frac{1}{2}p\iint |f(x)-f(y)|^2 dV_{p,\omega}\varepsilon_x(y)d\xi(x) \geqq 0 .$$

PROPOSITION 10. *Soit* $N \in (PSM)$ *et* $\sigma \in M_K(X)$. *Supposons que* σ *est de type positif. Alors, pour* $f \in C_K^\circ(X)$ *quelconque, on a*

$$N * \sigma * f * \check{f}(0) \geqq 0 .$$

Preuve. Evidemment il suffit de montrer notre énoncé dans le cas où $\sigma = \varepsilon$, car si c'est vrai, alors $N * f * \check{f} + \check{N} * f * \check{f}$ est aussi de type positif. Soit ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X vérifiant $\omega \supset \operatorname{supp}(f)$. Alors, pour $0 < q \in R$ quelconque fixé, le corollaire 9, (2) donne

$$\begin{aligned} N * f * \check{f}(0) + \frac{1}{q} \int |f|^2 d\xi &= \int f dN * (f\xi) + \frac{1}{q} \int |f|^2 d\xi \\ &= \lim_{p \to 0} \int f dV_{p,\omega}(f\xi)(x) + \frac{1}{q} \int |f|^2 d\xi \\ &= \lim_{p \to 0} \left(\frac{1}{q-p} \int |f|^2 d\xi + \int f d\xi(x) \int f(y) dV_{p,\omega}\varepsilon_x(y) \right) \\ &= \lim_{p \to 0} \int f(x) d\xi(x) \int f(y) d\left(\frac{1}{q-p} \left(\varepsilon_x + \sum_{n=1}^{\infty} (q-p) V_{q,\omega} \right)^n \varepsilon_x \right)(y) , \end{aligned}$$

où $(V_{q,\omega})^n \varepsilon_x = (V_{q,\omega})^{n-1}(V_{q,\omega}\varepsilon_x)$ $(n \geqq 2)$ *et* $(V_{q,\omega})^1 \varepsilon_x = V_{q,\omega}\varepsilon_x$. Posons, pour $0 < p < q$,

$$g_{p,q}(x) = \begin{cases} \int f(y) d\left(\varepsilon_x + \sum_{n=1}^{\infty} \left((q-p) V_{q,\omega} \right)^n \varepsilon_x \right) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in C\omega \end{cases} .$$

Alors

$$g_{p,q}(x) - (q-p) \int g_{p,q}(y) dV_{q,\omega}\varepsilon_x(y) = f(x) ,$$

et donc, d après (3) du corollaire 9,

$$\int f(x) g_{p,q}(x) d\xi(x) = \int |g_{p,q}|^2 d\xi - (q-p) \int g_{p,q}(x) d\xi(x) \int g_{p,q}(y) dV_{q,\omega}\varepsilon_x(y) \geqq 0 .$$

En faisant $q \to \infty$, on arrive à $N * f * \check{f}(0) \geqq 0$, d'où la proposition 10.

PROPOSITION 11 (voir le théorème 20 dans [7]). *Soit* $N \in (PSM)$ *et* $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ *une exhaustion d'ouverts de* X. *Alors, pour* $\mu \in M_K^+(X)$ *et* $0 < p \in R$ *quelconques,* $\lim_{n \to \infty} V_{p,\omega_n}\mu$ *exists dans* $M^+(X)$ *et elle est indépendant du choix de* $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$. *Posons* $N_p = \lim_{n \to \infty} V_{p,\omega_n}\varepsilon$; *alors, pour* $\mu \in M_K^+(X)$,

(2.1) $$\lim_{n \to \infty} V_{p,\omega_n}\mu = N_p * \mu$$

et $(N_p)_{p>0}$ *est une résolvante sous-markovienne, c'est-à-dire, pour* $0 < p \in R$ *et* $0 < q \in R$ *quelconques,* $N_p - N_q = (q-p)N_p * N_q$ *et* $p\int dN_p \leqq 1$.

Dans ce cas, on a, pour $p > 0$ quelconque,

$$\lim_{n\to\infty} (pN * V_{p,\omega_n}\varepsilon + a_{0,p,\omega_n}\xi) + N_p = N. \tag{2.2}$$

Soit K un compact de X et $\eta_{N,CK}$ la N-réduite de N sur CK. Comme $\eta_{N,CK} \in S(N)$, $(p\eta_{N,CK} * V_{p,\omega_n}\varepsilon + a_{0,p,\omega_n}\xi)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et

$$\lim_{n\to\infty}(p\eta_{N,CK} * V_{p,\omega_n}\varepsilon + a_{0,p,\omega_n}\xi) \leqq \eta_{N,CK}. \tag{2.3}$$

On choisit un entier $n_0 \geqq 1$ tel que $\omega_{n_0} \supset K$ et $(\varepsilon'_{n,CK}, a'_{n,CK})$ $\underline{SB}_N(\varepsilon; CK \cap \omega_n)$ pour $n \geqq n_0$. Comme $N * \varepsilon'_{n,CK} + a'_{n,CK}\xi \uparrow \eta_{N,CK}$ avce $n \uparrow \infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty}(p\eta_{N,CK} * V_{p,\omega_n}\varepsilon + a_{0,p,\omega_n}\xi) + N_p * \varepsilon'_{CK} \geqq \eta_{N,CK}, \tag{2.4}$$

où ε'_{CK} est un point vaguement adhérent de $(\varepsilon'_{n,CK})_{n=1}^{\infty}$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, on a

$$N - \eta_{N,CK} - N_p * (\varepsilon - \varepsilon'_{CK}) \geqq p(N - \eta_{N,CK}) * N_p \geqq N - \eta_{N,CK} - N_p. \tag{2.5}$$

D'après (2.5), on aura la proposition suivante:

Proposition 12. *Pour que* $(N_p)_{p>0}$ *soit transiente (c'est-à-dire,* $\lim_{p\to 0} N_p \in M^+(X)$*), il faut et il suffit que* $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. *Dans ce cas,* $\lim_{p\to 0} N_p = N - \eta_{N,\delta}$, *pour* $0 < a \in R$ *quelconque,* $\eta_{N+a\varepsilon,\delta} \neq -\infty$ *et* $\eta_{N,\delta} = \eta_{N+a\varepsilon,\delta}$.

Preuve. Supposons que $(N_p)_{p>0}$ est transiente. Alors la deuxième inégalité dans (2.5) donne $\lim_{p\to 0} N_p \geqq N - \eta_{N,CK}$, d'où $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Supposons que $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Alors $N - \eta_{N,\delta} \in M^+(X)$. En faisant $K \uparrow X$ dans (2.5), on a

$$N - \eta_{N,\delta} - N_p = p(N - \eta_{N,\delta}) * N_p,$$

d'où $N - \eta_{N,\delta} \geqq N_p$ $(p > 0)$. Donc $\lim_{p\to 0} N_p \in M^+(X)$, et $\lim_{p\to 0} N_p = N - \eta_{N,\delta}$ en résulte immédiatement. Un calcul élémentaire montre que, pour $n \geqq 1$ et $q > 0$ quelconque,

$$\left(\frac{ap}{1+ap}\varepsilon + \frac{p}{(1+ap)^2} V_{p/(1+ap),\omega_n}\varepsilon, \frac{1}{1+ap} a_{0,1/(1+ap),\omega_n}\right) \in \underline{SB}_{N+a\varepsilon+(1/p)\varepsilon, N+a\varepsilon}(\varepsilon, \omega_n)$$

dès que $\omega_n \ni 0$. Donc la résolvante $(N_{a,p})_{p>0}$ obtenue dans la proposition

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

11 pour $N+a\varepsilon$ au lieu de N vérifie que, pour $p>0$ quelconque,

$$N_{a,p}=\frac{a}{1+ap}\varepsilon+\frac{1}{(1+ap)^2}N_{p/(1+ap)}\,.$$

Comme $\lim_{p\to 0}N_{a,p}=a\varepsilon+\lim_{p\to 0}N_p$, on obtient que $\eta_{N+a\varepsilon,\delta}=\eta_{N,\delta}$. La proposition 12 est ainsi démontrée.

Dans ce cas, on a $\lim_{n\to\infty}pN_0*V_{p,\omega_n}\varepsilon=pN_0*N_p$, où $N_0=\lim_{p\to 0}N_p$, car si $\int dN_0<\infty$, c'est évident et si $\int dN_0=\infty$, alors $p\int dN_p=1$, et donc $\lim_{n\to\infty}\int fdV_{p,\omega_n}\varepsilon=\int fdN_p$ pour toute $f\in C_b(X)$. On remarque ici que, pour $f\in C_K^+(X)$, $\check{N}_0*f\leqq\max_{x\in\operatorname{supp}(f)}\check{N}_0*f(x)$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}p\eta_{N,\delta}*(V_{p,\omega_n}\varepsilon)=\eta_{N,\delta}\,. \tag{2.6}$$

Une famille $(\alpha_t)_{t\geqq 0}\subset M^+(X)$ s'appelle un semi-groupe de convolution si $\alpha_0=\varepsilon$, $\alpha_t*\alpha_s=\alpha_{t+s}$ $(t\geqq 0, s\geqq 0)$ et l'application $t\to\alpha_t$ est vaguement continue. Il est transient (resp. récurrent) si $\int_0^\infty\alpha_t\,dt\in M^+(X)$ (resp. sinon). Un noyau de convolution $N\geqq 0$ sur X est un noyau de convolution de Hunt s'il est de la forme

$$N=\int_0^\infty\alpha_t dt\,,$$

où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe de convolution transient. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est uniquement déterminé (voir [3] p. 650) et s'appelle le semi-groupe de convolution de N.

Un semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est sous-markovien (resp. markovien) si, pour $0\leqq t\in R$ quelconque, $\int d\alpha_t\leqq 1$ (resp. $\int d\alpha_t=1$). Dans ce cas, il existe $0\leqq a\in R$ tel que $\int d\alpha_t=\exp(-at)$.

PROPOSITION 13. *Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe de convolution markovien et $(N_p)_{p>0}$ la résolvante définie par $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$; c'est-à-dire, $N_p=\int_0^\infty\alpha_t\exp(-pt)dt$. Alors il y a des équivalences entre*:

(1) $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$.

(2) $\lim_{p\to 0}pN_p=0$.

(3) $\overline{\bigcup_{t\geqq 0}\operatorname{supp}(\alpha_t)}$ *n'est pas compact.*

Preuve. Les implications (1)$\Rightarrow$(2) et (2)$\Rightarrow$(3) sont évidentes, et donc on montrera que (3) $\Rightarrow$ (1). Comme, pour $0 < t_1 < t_2 \in R$ quelconques, $\alpha_{t_1} * \check{\alpha}_{t_1}$ et $\alpha_{t_1} * \check{\alpha}_{t_1} - \alpha_{t_2} * \check{\alpha}_{t_2}$ sont de type positif, $\lim_{t\to\infty} \alpha_t * \check{\alpha}_t$ existe dans $M^+(X)$. Comme, pour un point vaguement adhérent ν de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ lorsque $t\to\infty$ quelconque, $\lim_{t\to\infty} \alpha_t * \check{\alpha}_t \geqq \nu * \check{\nu}$, on a $\lim_{t\to\infty} \alpha_t = 0$ dès que $\lim_{t\to\infty} \alpha_t * \check{\alpha}_t = 0$. Supposons donc que $\lim_{t\to\infty} \alpha_t * \check{\alpha}_t \neq 0$ et posons $\sigma = \lim_{t\to\infty} \alpha_t * \check{\alpha}_t$. On a $\int d\sigma \leqq 1$. Comme, pour $0 < t \in R$, $\sigma = \sigma * \alpha_t * \check{\alpha}_t$, on a $(\sigma)^2 = \sigma$, où $(\sigma)^2 = \sigma * \sigma$. Donc $\int d\sigma = 1$. En considérant la transformation de Fourier de σ, on voit que σ est une mesure de Haar normalisée sur un certain sous-groupe compact F de X, et donc $\sigma = \sigma * \alpha_t * \check{\alpha}_t$ donne $\overline{\bigcup_{t\geqq 0} \operatorname{supp}(\alpha_t * \check{\alpha}_t)} \subset F$. Pour tout $0 < t \in R$, on choisit $x_t \in \operatorname{supp}(\alpha_t)$. Alors $\operatorname{supp}(\alpha_t) \subset \{x_t\} + F$ et $\bigcup_{0\leqq t\leqq 1} (\{x_t\} + F)$ est compact. Soit v un voisinage compact de l'origine vérifiant $v \supset \bigcup_{0\leqq t\leqq 1} (\{x_t\} + F)$ et X_v le sous-groupe ouvert et fermé engendré par v. Alors $\bigcup_{0\leqq t<\infty} (\{x_t\} + F) \subset X_v$, car $x_t + x_s - x_{t+s} \in F$ pour tous $t \geqq 0$ et $s \geqq 0$. Comme il existe deux entiers $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ et un groupe abélien compact et séparé F_0 tels que $X_v \approx R^m \times Z^n \times F_0$ (voir [12], p. 110), on a $\lim_{t\to\infty} x_t = \delta$, d'où (3) $\Rightarrow$ (1).

Un semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est semi-transient si, pour $\mu \in M_K^\circ(X)$ quelconque, $\left(\int_0^t \alpha_s * \mu ds\right)_{t>0}$ est vaguement bornée.

D'après la proposition 13, on obtiendra immédiatement le corollaire suivant, qui est déjà connu (voir le lemme 39 dans [7]).

Corollaire 14. *Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe de convolution sous-markovien et semi-transient. Alors $\lim_{t\to\infty} \alpha_t = 0$.*

En effet, si $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est transient, alors on a évidemment $\lim_{t\to\infty} \alpha_t = 0$. Si $\overline{\bigcup_{t\geqq 0} \operatorname{supp}(\alpha_t)}$ est compact, alors la semi-transience de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ donne sa transience, car X est non-compact, et donc la proposition 13 donne le corollaire 14.

La proposition suivant est bien connu (voir, par exemple, [4] et [5]).

Proposition 15. *Soit $(N_p)_{p>0}$ une résolvante. Pour $0 < p \in R$, Γ désigne l'ensemble de périodes x de N_p, c'est-à-dire, $N_p = N_p * \varepsilon_x$. Alors on a:*

(1) *Γ est indépendant de p, et Γ est un sous-groupe compact de X.*

(2) *N_p est non-périodique, c'est-à-dire, $\Gamma = \{0\}$, si et seulement s'il existe un semi-groupe convolution $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ tel que $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est uniquement déterminé et $(N_p)_{p>0}$ est transiente (resp. sous-markovienne) si et seulement si $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est transient (resp. semi-markovien).*

COROLLAIRE 16. *Soit $N \in (PSM)$ et supposons que $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Posons $N_0 = N - \eta_{N,\delta}$. Alors N_0 est un noyau de convolution de Hunt si et seulement si N_0 est non-périodique. Dans ce cas, le semi-groupe de convolution de N_0 est sous-markovien.*

Cela est obtenu, d'après les propositions 12 et 15.

§ 3. La preuve de théorème 1

On commencera avec une notation. Pour $\nu \in M(X)$, on écrit, par récurrence, $(\nu)^1 = \nu$, $(\nu)^2 = \nu * \nu, \cdots, (\nu)^n = (\nu)^{n-1} * \nu, \cdots$ dès que ceux sont définis.

LEMME 17. *Soient $\sigma \in M^+(X)$ et $\lambda \in M^+(X)$. Supposons que, pour tout l'entier $n \geqq 1$, $(\varepsilon - \sigma)^n$ et $(\varepsilon - \sigma)^n * \lambda$ sont définis. Si λ est bornée et $(\varepsilon - \sigma)^n * \lambda \in M^+(X)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, alors tout le point du sous-groupe fermé engendré par* $\operatorname{supp}(\sigma)$ *est une période de λ.*

Pour montrer le lemme 17, on utilisera le théorème de Choquet-Deny (voir [2]) et le théorème connu dans [6].

LEMME 18 (voir le théorème 2 dans [2]). *Soient $\sigma \in M^+(X)$ et $\lambda \in M^+(X)$. Supposons que X est à base dénombrable et $\lambda = \lambda * \sigma$. Soit Γ le sous-groupe fermé engendré par* $\operatorname{supp}(\sigma)$ *et E l'ensemble formé par $\nu \in M^+(X)$ vérifiant $\nu * \sigma = \nu$ et, pour $x \in \Gamma$ quelconque, $\nu * \varepsilon_x = \varphi(x)\nu$, où φ est une exponentielle > 0 sur Γ*[6]. *Alors il existe une mesure de Radon positive μ portée par E telle que*

$$\lambda = \int \nu d\mu(\nu)\,. \tag{3.1}$$

LEMME 19 (voir le théorème dans [6]). *Soient σ et λ les mêmes que dans le lemme 17. Alors il existe une mesure positive μ sur $[1, \infty)$ et une application μ-mesurable $[1, \infty) \ni t \to \nu_t \in E_t$*[7] *telles que*

$$\lambda = \int_1^\infty \nu_t d\mu(t)\,, \tag{3.2}$$

où $E_t = \{\nu \in M^+(X); \nu = t\nu * \sigma\}$.

---

(6) Une fonction finie et continue φ sur un groupe abélien localement compact s'appelle une exponentielle si, pour tous x, y, $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

(7) Cela signifie que, pour $f \in C_K(X)$ quelconque, la fonction $\int f d\nu_t$ de t est μ-mesurable.

On remarque ici que, pour $\mu \in M^{+}(X)$ à $\mu \neq 0$ et $\mu = \mu * \sigma$ quelconque, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu)^k \notin M^{+}(X)$.

Preuve de lemme 17. Pour un voisinage compact v de l'origine, X_v désigne le sous-groupe fermé engendré par v. Alors, pour tout l'entier $n \geqq 1$, $(\varepsilon - \sigma|_{X_v})^n * \lambda|_{X_v} = (\varepsilon - \sigma)^n * \lambda|_{X_v}$, et donc il suffit de montrer le lemme 17 dans le cas où X est engendré par un certain voisinage compact de l'origine. D'après le théorème fondamental concernant la structure des groupes abéliens localement compacts (voir [12], p. 98), il existe une famille filtrante $(X_i)_{i\in I}$ à gauche des sous-groupes compacts de X telle que X soit la limite projective de $(X/X_i)_{i\in I}$ et que X/X_i soit isomorphe à un groupe élémentaire de Lie. Soit ξ_i une mesure de Haar normalisée sur X_i. En considérant $\sigma * \xi_i$ et $\lambda * \xi_i$ pour tout $i \in I$ et leur projections canoniques sur X/X_i, il suffit de montrer le lemme 17 dans le cas où X est un groupe élémentaire de Lie. Donc X est à base dénombrable.

Soit Γ le sous-groupe fermé engendré par $\mathrm{supp}(\sigma)$. Pour $t \in [1, \infty)$ quelconque, on pose

$$F_t = \{\nu \in E_t;\ \nu * \varepsilon_x = \varphi_\nu(x)\nu \text{ pour tout } x \in \Gamma\}\,,$$

où φ_ν est exponentielle sur Γ. D'après les lemmes 18 et 19, il existe une mesure positive μ sur $[1, \infty)$ et une famille μ-mesurable $(\nu_t)_{t\geqq 1}$ des mesures de Radon positives telles que ν_t soit portée par F_t et

$$\lambda = \iint \nu d\nu_t(\nu) d\mu(t)\,. \tag{3.3}$$

Pour $x \in \Gamma$ et un entier n quelconques, on a

$$\lambda * \varepsilon_{nx} = \iint (\varphi_\nu(x))^n \nu d\nu_t(\nu) d\mu(t)\,.$$

Comme λ est bornée, on a $\varphi_\nu(x) \leqq 1$ presque partout pour $\int \nu_t d\mu(t)$. De la même manière, on a $\varphi_\nu(-x) \leqq 1$ presque partout pour $\int \nu_t d\mu(t)$, et donc $\varphi_\nu(x) = 1$ presque partout pour $\int \nu_t d\mu(t)$, d'où $\lambda * \varepsilon_x = \lambda$. On voit ainsi que tout $x \in \Gamma$ est une période de λ.

COROLLAIRE 20. *Soit $N \in (PSM)$ et supposons que $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Posons $N_0 = N - \eta_{N,\delta}$. Alors, pour $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ quelconque, tout le point du sous-groupe fermé Γ engendré par* $\mathrm{supp}(N_0)$ *est une période de $\eta_{N,\delta} * \mu$. Si N est non-périodique et $N_0 \neq 0$, alors N_0 est aussi non-périodique.*

Preuve. Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante obtenue dans la proposition 11.

D'après la proposition 12, on a, pour $0 < p \in R$ quelconque, $\operatorname{supp}(N_0) = \operatorname{supp}(N_p)$, car, pour $q > p$, $N_0 = 1/q \sum_{n=1}^{\infty} (qN_q)^n$ et $N_p = 1/(q-p) \sum_{n=1}^{\infty} ((q-p)N_q)^n$. Soit $f \in C_K^+(X)$ quelconque. Comme $\eta_{N,\delta} \in S(N)$, on a, pour $x \in X$,

$$|\eta_{N,\delta} * \mu * f(x)| \leqq \max_{y \in \operatorname{supp}(\mu * f)} |N * \mu * f(y)|$$

(voir la remarque 3 dans [7]). Posons $a = \max_{y \in \operatorname{supp}(\mu * f)} |N * \mu * f(y)|$ et $\lambda = (a + \eta_{N,\delta} * \mu * f)\xi$. Alors $\lambda \in M^+(X)$. D'après (2.6), on a

$$\lim_{n \to \infty} p\lambda * V_{p,\omega_n}\varepsilon = \lambda .$$

Comme $\lambda \in M^+(X)$, on a $\lambda - p\lambda * N_p \in M^+(X)$. On a aussi, pour tout l'entier $n \geqq 1$,

$$\lim_{n \to \infty} p\lambda * (\varepsilon - pN_p)^n * V_{p,\omega_n}\varepsilon = \lambda * (\varepsilon - pN_p)^n ,$$

et donc $\lambda * (\varepsilon - pN_p)^{n+1} \in M^+(X)$ dès que $\lambda * (\varepsilon - pN_p)^n \in M^+(X)$. Ainsi, pour tout l'entier $n \geqq 1$ et tout $0 < p \in R$,

$$(\varepsilon - pN_p)^n * \lambda \geqq 0 \text{ dans } X .$$

Par conséquent, le lemme 17 montre que tout le point de Γ est une période de λ. En faisant $f\xi \to \varepsilon$, on arrive à notre première conclusion. Supposons que N est non-périodique, $N_0 \neq 0$ et, pour $0 \neq x \in X$, $N_0 = N_0 * \varepsilon_x$. Alors, pour tout $0 < p \in R$, $N_p = N_p * \varepsilon_x$, et donc (1) de la proposition 15 montre que x est un élément compact de X. Comme $\operatorname{supp}(N_0) \ni 0$, $\operatorname{supp}(N_0) \ni x$. Donc, pour tout l'entier $n \geqq 1$,

$$N * (\varepsilon - \varepsilon_x) * \varepsilon_{nx} = \eta_{N,\delta} * (\varepsilon - \varepsilon_x) ,$$

et par suite $N * (\varepsilon - \varepsilon_{nx}) = nN * (\varepsilon - \varepsilon_x)$. Comme $(N * (\varepsilon - \varepsilon_{nx}))_{n=1}^{\infty}$ est bornée, on a $N = N * \varepsilon_x$, d'où une contradiction. Ainsi N_0 est non-périodique. Le corollaire 20 est démontré.

Pour un noyau de convolution réel N sur X, on désigne par $\underset{\sim}{S}(N)$ l'ensemble de $\eta \in S(N)$ vérifiant la condition suivante:

($\underset{\sim}{C}$) Il existe des familles filtrantes $(\mu_i)_{i \in I} \subset M_K^+(X)$ et $(c_i)_{i \in I} \subset R$ telles que

$$\int d\mu_i = 1 \text{ et } N * \mu_i + c_i \xi \uparrow \eta .$$

Si $N \in (PSM)$, alors on a évidemment $\underset{\sim}{S}(N) = S(N)$, d'après $N \in (PSB)$.

Pour $f_0 \in C_K^+(X)$ à $\int f_0 d\xi = 1$ fixée, on pose

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

$$S(N; f_0) = \left\{\eta \in S(N); \int f_0 d\eta = 1\right\}.$$

Pour $\eta \in S(N)$ quelconque, il existe $b_\eta \in R$ et un seul tel que $\eta + b_\eta \xi \in S(N; f_0)$.

LEMME 21. *Supposons que* $N \in (PSM)$ *et* $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. *Alors* $S(N; f_0)$ *est un ensemble convexe et compact dans* $M(X)$. *Si* $N_0 = N - \eta_{N,\delta}$ *s'annule à l'infini, alors* $\eta_{N,\delta} + b_{\eta_{N,\delta}}\xi \in \operatorname{ex} S(N; f_0)$, *où* $\operatorname{ex} S(N; f_0)$ *désigne l'ensemble des points extrêmes de* $S(N; f_0)$.

Preuve. Evidemment $S(N; f_0)$ est convexe et vaguement fermé. Il suffit donc de montrer que, pour un compact K de X, il existe une constante $A(K) \geqq 0$ telle que, pour $\eta \in S(N; f_0)$ et $f \in C_K(X)$ à $\operatorname{supp}(f) \subset K$ quelconques,

$$\left|\int f d\eta\right| \leqq A(K)\|f\|, \tag{3.4}$$

où $\|f\|$ désigne la norme dans $C_b(X)$. Posons

$$A(K) = \int_K d\xi + \int_{K + (K \cup \operatorname{supp}(f_0))} d|N| + \sup_{x \in \operatorname{supp}(\check{f}_0) \cup (-K)} |N * \check{f}_0(x)| \int_K d\xi^{(8)},$$

où $|N|$ désigne la variation totale de N. Alors $A(K)$ est une constante demandée, car

$$\begin{aligned}\left|\int f d\eta\right| &\leqq \left|\int f_0 d\eta \int f d\xi\right| + \sup_{x \in X}\left|\eta * \check{f}(x) - \eta * \check{f}_0(x) \int f d\xi\right| \\ &\leqq \left|\int f d\xi\right| + \sup_{x \in X}\left|N * \check{f}(x) - N * \check{f}_0(x) \int f d\xi\right| \\ &= \left|\int f d\xi\right| + \sup_{x \in \operatorname{supp}(\check{f}_0) \cup (-K)}\left|N * \check{f}(x) - N * \check{f}_0(x) \int f d\xi\right|.\end{aligned}$$

Montrons ensuite que, dans le cas où N_0 s'annule à l'infini, $\eta_{N,\delta} + b_{\eta_{N,\delta}}\xi \in \operatorname{ex} S(N; f_0)$. De la même manière que dans le lemme 17, il suffit de le montrer dans le cas où X est à base dénombrable. On utilisera le théorème de Choquet suivant:

LEMME 22 (voir p. 7 et p. 19 dans [9]). *Soit* C *un ensemble convexe, compact et métrisable d'un espace localement convexe* E. *Alors l'ensemble* $\operatorname{ex} C$ *des points extrêmes de* C *forme un ensemble de* G_δ *et, pour* $x \in C$

(8) Pour ensembles A, B dans X, on note $A + B = \{x + y;\ x \in A, y \in B\}$ et $-A = \{-x;\ x \in A\}$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

quelconque, il existe une mesure de probabilité μ sur C portée par $\mathrm{ex}\, C$ *qui représente x.*

Continuous la démonstration de $\eta_{N,\delta} + b_{\eta_{N,\delta}}\xi \in \mathrm{ex}\, S(N; f_0)$. D'après le lemme 22, il existe une mesure de probabilité μ portée par $\mathrm{ex}\, S(N; f_0)$ telle que

$$\eta_{N,\delta} + b_{\eta_{N,\delta}}\xi = \int \eta d\mu(\eta)\,. \tag{3.5}$$

Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion d'ouverts de X. Pour $\eta \in S(N; f_0)$, on choisit $(\varepsilon'_{\eta,n}, a_{\eta,n}) \in \underline{SB}_{N,\eta}(\varepsilon, \omega_n)$. Comme $(N, \eta_{N,\delta}) \in (PTMS)$, on a $N_0 * \varepsilon'_{\eta,n} \geqq N_0 * \varepsilon'_{\eta,n+1}$ dans ω_n, et donc $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_{\eta,n}$ existe. Pour $\eta_1, \eta_2 \in S(N; f_0)$ quelconques, $(\eta_1 * \varepsilon'_{\eta_2,n} + a_{\eta_2,n}\xi)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et

$$\lim_{n\to\infty} (\eta_1 * \varepsilon'_{\eta_2,n} + a_{\eta_2,n}\xi) = \lim_{n\to\infty} (\eta_2 * \varepsilon'_{\eta_1,n} + a_{\eta_1,n}\xi)\,, \tag{3.6}$$

car, pour $f \in C_K^+(X)$ et $n \geqq 1$ quelconques, il existe un entier $m \geqq 1$ tel que

$$\begin{aligned}\int fd(\eta_1 * \varepsilon'_{\eta_2,n} + a_{\eta_2,n}\xi) &= \int fd((N * \varepsilon'_{\eta_1,m} + a_{\eta_1,m}\xi) * \varepsilon'_{\eta_2,n} + a_{\eta_2,n}\xi) \\ &= \int fd((N * \varepsilon'_{\eta_2,n} + a_{\eta_2,n}\xi) * \varepsilon'_{\eta_1,m} + a_{\eta_1,m}\xi) \\ &\leqq \int fd(\eta_2 * \varepsilon'_{\eta_1,m} + a_{\eta_1,m}\xi)\,.\end{aligned}$$

Pour $\eta \in S(N; f_0)$, on pose $\eta' = \eta - \lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_{\eta,n}$. Alors l'application

$$S(N; f_0) \ni \eta \longrightarrow \eta' \in S(N)$$

est semi-continue inférieurement (c'est-à-dire, pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, la fonction $\int fd\eta'$ de η est semi-continue inférieurement), car, pour $n \geqq 1$, l'application $\eta \to N * \varepsilon'_{\eta,n} + a_{\eta,n}\xi$ est semi-continue inférieurement, et donc $\eta \to \eta_{N,\delta} * \varepsilon'_{\eta,n} + a_{\eta,n}\xi$ l'est aussi. Posons $N'' = \eta_{N,\delta} + b_{\eta_{N,\delta}}\xi$. Comme N_0 s'annule à l'infini, on a, pour un point vaguement adhérent λ de $(\varepsilon'_{N'',n})_{n=1}^{\infty}$ lorsque $n \to \infty$ quelconque, $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_{N'',n} = N_0 * \lambda$, et donc $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_{N'',n} = 0$. Comme, pour $n \geqq 1$,

$$N_0 * \varepsilon'_{N'',n} = \int N_0 * \varepsilon'_{\eta,n} d\mu(\eta)$$

et $\int \eta' d\mu(\eta)$ a un sens, on a, pour μ-presque tout η, $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_{\eta,n} = 0$, et donc, pour μ-presque tout η, $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'')$. D'après (3.5) et (3.6), pour $\tilde{\eta} \in$

$\operatorname{ex} S(N; f_0)$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_{\tilde{\eta},n} = 0$ quelconque, on a, pour μ-presque tout η,

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} &= \lim_{n\to\infty} (\eta * \varepsilon'_{\tilde{\eta},n} + a_{\tilde{\eta},n}\xi) + b_{\tilde{\eta},\eta}\xi \\ &= \lim_{n\to\infty} (\tilde{\eta} * \varepsilon'_{\eta,n} + a_{\eta,n}\xi) + b_{\tilde{\eta},\eta}\xi ,\end{aligned} \tag{3.7}$$

où $b_{\tilde{\eta},\eta} \in R$ vérifiant $\lim_{n\to\infty}(\eta * \varepsilon'_{\tilde{\eta},n} + a_{\tilde{\eta},n}\xi) + b_{\tilde{\eta},\eta}\xi \in S(N; f_0)$, car

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} &= \lim_{n\to\infty} (N'' * \varepsilon'_{\tilde{\eta},n} + (a_{\tilde{\eta},n} - b_{\eta_{N,\delta}})\xi) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int (\eta * \varepsilon'_{\tilde{\eta},n} + (a_{\tilde{\eta},n} - b_{\eta_{N,\delta}})\xi) d\mu(\eta) \\ &= \int (\lim_{n\to\infty} (\eta * \varepsilon'_{\tilde{\eta},n} + a_{\tilde{\eta},n}\xi) + b_{\tilde{\eta},\eta}\xi) d\mu(\eta) .\end{aligned}$$

Par conséquent, pour une mesure positive ν sur $S(N; f_0)$ vérifiant $\nu \leqq \mu$ quelconque, on a

$$\begin{aligned}\int \eta d\nu(\eta) &= \iint (\lim_{n\to\infty} (\eta * \varepsilon'_{\tilde{\eta},n} + a_{\tilde{\eta},n}\xi) + b_{\eta,\tilde{\eta}}) d\mu(\tilde{\eta}) d\nu(\eta) \\ &= \lim_{n\to\infty} \iint (\tilde{\eta} * \varepsilon'_{\eta,n} + (a_{\eta,n} + b_{\eta,\tilde{\eta}})\xi) d\nu(\eta) d\mu(\tilde{\eta}) \\ &= \left(\int d\nu\right) \int \tilde{\eta} d\mu(\tilde{\eta}) = \left(\int d\nu\right) N'' ,\end{aligned}$$

et donc μ est portée par un point, d'où $N'' \in \operatorname{ex} S(N; f_0)$. Le lemme 21 est ainsi démontré.

Pour un noyau de convolution réel N sur X, on désigne par $\underset{\sim}{S}'(N)$ $(\subset \underset{\sim}{S}(N))$ l'ensemble de η vérifiant $\eta \leqq N * \nu + a\xi$, où $\nu \in M_K^+(X)$ à $\int d\nu = 1$ et $a \in R$.

Lemme 23. *Soit $N \in (PSM)$ et supposons que $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$, $N \neq \eta_{N,\delta}$ et $N_0 = N - \eta_{N,\delta}$ s'annule à l'infini. Posons $N'' = \eta_{N,\delta} + b_{\eta_{N,\delta}}\xi$ et, pour $\eta \in S(N'')$ et $x \in X$ quelconques,*

$$\eta_x = \eta * \varepsilon_x + (b_{\eta_{N,\delta}} * \varepsilon_x - b_{\eta_{N,\delta}})\xi .$$

Alors il existe une famille filtrant $(x_i)_{i\in I} \subset X$ telle que $\lim_{i\in I} x_i = \delta$ et, pour $\eta \in \underset{\sim}{S}'(N'')$ quelconque, $\lim_{i\in I} \eta_{x_i} = \eta$.

Preuve. Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion d'ouverts de X et $(\varepsilon'_n, a_n) \in \underset{\sim}{SB}_{N,N''}(\varepsilon, \omega_n)$. Comme N_0 s'annule à l'infini, on a $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon'_n = 0$, et donc

$$N'' = \lim_{n\to\infty} (N'' * \varepsilon'_n + a_n\xi - b_{\eta_{N,\delta}}\xi) = \lim_{n\to\infty} \int N''_x d\varepsilon'_n(x) .$$

Soit $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'')$ quelconque. On choisit des familles filtrantes $(\mu_i)_{i\in I} \subset M_K^+(X)$ à $\int d\mu_i = 1$ et $(c_i)_{i\in I} \subset R$ telles que $N'' * \mu_i + c_i\xi \uparrow \eta$. Alors $(N'' * \mu_i + c_i\xi) * \varepsilon_n' + (a_n - b_{\eta_{N,\delta}})\xi \uparrow N'' * \mu_i + c_i\xi$ $(n \uparrow \infty)$ pour tout i, et donc

$$\eta * \varepsilon_n' + (a_n - b_{\eta_{N,\delta}})\xi \uparrow \eta \qquad (n \uparrow \infty)\,.$$

Par conséquent, on a

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \int \eta_x d\varepsilon_n'(x)\,. \tag{3.8}$$

Pour $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'')$ et $f \in C_K(X)$, on pose $f_\eta(x) = \eta_x * f(0)$ et $Q = \{f_\eta; \eta \in \underset{\sim}{S}'(N''), f \in C_K(X)\}$. Pour $\eta \in \underset{\sim}{S}'(N'')$, il existe $\nu_1, \nu_2 \in M_K^+(X)$ à $\int d\nu_1 = \int d\nu_2 = 1$ et $a_1, a_2 \in R$ tels que

$$N'' * \nu_1 + a_1\xi \leqq \eta \leqq N'' * \nu_2 + a_2\xi\,.$$

Donc, pour $g \in C_K^+(X)$ quelconque,

$$(g * \nu_1)_{N''}(x) + a_1 \leqq g_\eta(x) \leqq (g * \nu_2)_{N''}(x) + a_2\,.$$

Comme $(N_x'')_{x\in X} \subset S(N; f_0)$ et $N * (g * \nu_j) - \left(\int g d\xi\right) N * f_0$ et $N_0 * (g * \nu_j) - \left(\int g d\xi\right) N_0 * f_0$ sont bornées $(j = 1, 2)$, on a $g_\eta \in C_b(X)$, d'où $Q \subset C_b(X)$. Soit $\tilde{X}$ la Q-compacité de X; c'est-à-dire, $\tilde{X}$ est une compacité de X et tout l'élément de Q possède sa prolongement continu sur X. On désigne encore par f_η le prolongement continu de f_η. Soit $\eta \in \underset{\sim}{S}'(N'')$ et soient $\nu_1, \nu_2 \in M_K^+(X)$ et $a_1, a_2 \in R$ les mêmes que ci-dessus. Comme $N_x'' \in S(N; f_0)$, on a, pour un compact K de X et $f \in C_K(X)$ vérifiant $\mathrm{supp}(f) \subset K$ quelconques,

$$\begin{aligned} |(f * \nu_j)_{N''}(x)| = \left|\int \check{f} * \check{\nu}_j dN_x''\right| &\leqq A(-K - \mathrm{supp}(\nu_j))\|f * \nu_j\| \\ &\leqq A(-K - \mathrm{supp}(\nu_j))\|f\| \text{ sur } X \ (j = 1, 2)\,, \end{aligned}$$

où $A(-K - \mathrm{supp}(\nu_j))$ est une constante définie dans le lemme 21. Donc, il existe une constante $B(K; \eta)$ dépendant de η et K tel que, pour tout $x \in X$ et $f \in C_K(X)$ vérifiant $\mathrm{supp}(f) \subset K$

$$|f_\eta(x)| \leqq B(K; \eta)\|f\|\,.$$

Par conséquent, pour $\tilde{x} \in \tilde{X}$ quelconque, il existe $\eta_{\tilde{x}} \in S(N'')$ et un seul tel que, pour toute $f \in C_K(X)$, $\eta_{\tilde{x}} * f(0) = f_\eta(\tilde{x})$. Comme $\int d\varepsilon_n' = 1$, on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n'$ existe dans $M^+(\tilde{X})$. Posons $\lambda = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n'$; alors $\int d\lambda = 1$ et $\lambda = 0$ dans X, car $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon_n' = 0$. Comme $\tilde{X} \ni \tilde{x} \to \eta_{\tilde{x}} \in S(N'')$

et continue dans $M^+(\tilde{X})$, (3.8) montre que

$$\eta = \int \eta_{\tilde{x}} d\lambda(\tilde{x})\,.$$

Pour $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'')$ et $\tilde{x} \in \tilde{X}$, on pose

$$\bar{\eta}_x = \sup\{\tilde{\eta}_{\tilde{x}};\, \tilde{\eta} \in \underset{\sim}{S}'(N''),\, \eta \geqq \tilde{\eta}\}$$

dès que cela est définie au sens des mesures, où $\sup\{\cdot\}$ est au sens des mesures. Alors $\eta_{\tilde{x}} = \bar{\eta}_{\tilde{x}}$ si $\eta \in \underset{\sim}{S}'(N'')$ et, pour $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'')$, on voit que, pour λ-presque tout $\tilde{x}$, $\bar{\eta}_{\tilde{x}}$ est définie et

$$\eta = \int \bar{\eta}_{\tilde{x}} d\lambda(\tilde{x})\,, \tag{3.9}$$

car il existe une suite croissante $(\eta_n)_{n=1}^{\infty} \subset \underset{\sim}{S}'(N'')$ tel que $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta$. On remarque ici que. pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, la fonction $\int f d\bar{\eta}_x$ de x est semi-continue inférieurement. Si $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'') \cap \operatorname{ex} S(N; f_0)$, alors $\bar{\eta}_{\tilde{x}} = \eta$ pour λ-presque tout $\tilde{x}$. D'après le lemme 21, $N''_{\tilde{x}} = N''$ pour tout $\tilde{x} \in \operatorname{supp}(\lambda)$, et donc, pour $\mu \in M_K^+(X)$ à $\int d\mu = 1$ et $b \in R$ quelconques, $(N'' * \mu + b\xi)_{\tilde{x}} = N'' * \mu + b\xi$ pour tout $\tilde{x} \in \operatorname{supp}(\lambda)$. Donc, pour $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'')$ quelconque, $\bar{\eta}_{\tilde{x}} \geqq \eta$ pour tout $\tilde{x} \in \operatorname{supp}(\lambda)$ dès que $\bar{\eta}_{\tilde{x}}$ est définie. D'après (3.9), on a $\bar{\eta}_{\tilde{x}} = \eta$ pour λ-presque tout $\tilde{x}$. En particulier, si $\eta \in \underset{\sim}{S}'(N'')$, alors $\eta_{\tilde{x}} = \eta$ pour tout $\tilde{x} \in \operatorname{supp}(\lambda)$. Cela montre notre lemme.

LEMME 24. *Soit N_0 un noyau de convolution de Hunt dont le semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est sous-markovien. Soient Γ le sous-groupe fermé engendré par* $\operatorname{supp}(N_0)$ *et ξ_Γ une mesure de Haar fixée sur Γ. Alors il existe une constante $a(N_0) \geqq 0$, et une seule telle que*

$$\lim_{x\to\delta} (N_0 + \check{N}_0 - a(N_0)\xi_\Gamma) * \varepsilon_x = 0\,. \tag{3.10}$$

On a encore

$$\lim_{p\to 0} pN_0 * \check{N}_p = 2 \lim_{p\to 0} pN_p * \check{N}_p = a(N_0)\xi_\Gamma\,, \tag{3.11}$$

où $(N_p)_{p>0}$ est la résolvante définie par $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$.

Preuve. Si N_0 s'annule à l'infini, alors $a(N_0) = 0$ et les deuxièmes égalités ont lieu, d'après $\lim_{p\to 0} pN_p = 0$. Supposons que N_0 ne s'annule pas à l'infini. Alors $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est markovien. Donc il existe une fonction définie-négative $\psi(\hat{x})$[9] sur le groupe dual $\hat{X}$ de X telle que $\psi(\hat{0})=0$ et $\hat{\alpha}_t(\hat{x})=\exp(-t\psi(\hat{x}))$, où $\hat{0}$ désigne l'origine de $\hat{X}$ et $\hat{\alpha}_t$ désigne la transformation de Fourier de α_t (voir, par exemple, [1], p. 49). Comme, pour $p>0$, $\hat{N}_p=1/(p+\psi)$, on voit que, pour $0<p<q$,

$$N_p+\check{N}_p-2pN_p*\check{N}_p \text{ et } (N_p+\check{N}_p-2pN_p*\check{N}_p)-(N_q+\check{N}_q-2qN_q*\check{N}_q)$$

sont de type positif, car $\mathrm{Re}\,\psi\geqq 0$. Donc $\lim_{p\to 0}pN_p*\check{N}_p$ existe dans $M^+(X)$. Posons $\eta=\lim_{p\to 0}pN_p*\check{N}_p$; alors, pour $p>0$ quelconque,

$$\eta*(pN_p)=\lim_{q\to 0}qN_q*\check{N}_q*(pN_p)=\lim_{q\to 0}\frac{p}{p-q}(N_q-N_p)*(q\check{N}_q)=\eta\,.$$

Comme η est bornée et $\mathrm{supp}(\eta)\subset\Gamma$, le lemme 17 donne $\eta=a\xi_\Gamma$, où $0\leqq a\in R$. On a donc

$$\widehat{N_0+\check{N}_0-2a\xi_\Gamma}=2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\psi}\right),$$

et $N_0+\check{N}_0-2a\xi_\Gamma$ s'annule à l'infini. En posant $a(N_0)=2a$, on voit que $a(N_0)$ est une constante demandée. On a encore

$$\lim_{p\to 0}p^2(N_0+\check{N}_0)*N_p*\check{N}_p=a(N_0)\xi_\Gamma\,,$$

car $p^2\int dN_p*\check{N}_p=1$, $\lim_{p\to 0}p^2N_p*\check{N}_p=0$ et $N_0+\check{N}_0-2a\xi_\Gamma$ s'annule à l'infini. Soit η' un point vaguement adhérent de $(p^2N_0*N_p*\check{N}_p)_{p>0}$ lorsque $p\to 0$. Alors, de la même manière que pour η, on a, pour $0<p\in R$ quelconque, $\eta'=\eta'*(pN_p)$, $\mathrm{supp}(\eta')\subset\Gamma$ et η' est bornée. Donc $\eta'=b\xi_\Gamma$, où $0\leqq b\in R$. Ainsi $\eta'=\check{\eta}'=b\xi_\Gamma$, et donc $b=\frac{1}{2}a(N_0)$. Par conséquent, $\lim_{p\to 0}p^2N_0*N_p*\check{N}_p=\frac{1}{2}a(N_0)\xi_\Gamma$. D'après l'équation résolvante, on a

$$\lim_{p\to 0}pN_0*\check{N}_p=\lim_{p\to 0}(p^2N_0*N_p*\check{N}_p+pN_p*\check{N}_p)=a(N_0)\xi_\Gamma\,.$$

Le lemme 24 est ainsi démontré.

On montrera désormais le théorème 1 dans ce paragraph. On discutera d'abord (1) $\Rightarrow$ (2). Possons $N_0=N-\eta_{N,\delta}$ et $N''=\eta_{N,\delta}$. On peut supposer que $N''\neq 0$. D'après les propositions 12, 15 et le corollaire 20, N_0 est un noyau de convolution de Hunt dont le semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$

---

(9) Une fonction continue $\psi(\hat{x})$ sur $\hat{X}$ à valeurs complexes est dite définie-négative si $\psi(\hat{o})\geqq 0$, pour $\hat{x}\in\hat{X}$ quelconque, $\psi(-\hat{x})=\overline{\psi(\hat{x})}$ et, pour une famille finie $(\hat{x}_j)_{j=1}^m$ et une famille finie $(\rho_j)_{j=1}^m$ des nombres complexes vérifiant $\sum_{j=1}^m\rho_j=0$ quelconques, $\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m\psi(\hat{x}_j-\hat{x}_k)\rho_j\bar{\rho}_k\leqq 0$,

est sous-markovien. D'après le corollaire 20, on voit que, pour $x \in X$ quelconque, tout le point y du sous-groupe fermé engendré par $\operatorname{supp}(N_0)$ est une période de $N'' * (\varepsilon - \varepsilon_x)$, et donc $N'' * (\varepsilon_y - \varepsilon)$ est invariante par translations sur X, d'où $N'' * (\varepsilon_y - \varepsilon) = c_y \xi$, où $c_y \in R$. Par conséquent il existe une fonction additive et continue φ sur X à valeurs réelles telle que $\varphi(y) = c_y$.

(i) Supposons que $a(N_0) \neq 0$. Posons $a = a(N_0)$, $\Gamma =$ le sous-groupe fermé engendré par $\operatorname{supp}(N_0)$ et $N' = N'' - \varphi\xi + a(N_0)\xi_\Gamma$. On montrera que $N = N_0 - a\xi_\Gamma + \varphi\xi + N'$ sont une décomposition démandée. Alors $N' = N' * \varepsilon_y$ pour tout $y \in \Gamma$, et donc N' est pseudo-invariant. D'après les propositions 2 et 10, on a $(N_0 + N' - a(N_0)\xi_\Gamma) * f * \check{f}(0) = (N - \varphi\xi) * f * \check{f}(0) \geqq 0$ pour toute $f \in C_K^\circ(X)$. Montrons que $N' \in (PSM)$. Supposons que, pour $f,\ g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $b \in R$, $N' * f \leqq N' * g + b$ sur $\operatorname{supp}(f)$. D'après le lemme 24, (3.10), on voit que, pour $0 < c \in R$ quelconque, il existe un compact K de X tel que $N_0 * f(x) \leqq a(N_0)\xi_\Gamma * f(x) + c$ dans CK. On choisit un autre compact F de X vérifiant $CF + \operatorname{supp}(f) \subset CK$ et une exhaustion $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ d'ouverts vérifiant $\omega_1 \supset F$. Soient $\varepsilon'_{CF,n}$ et ε'_{CF} une mesure N_0-balayée de ε sur $CF \cap \omega_n$ et celle de ε sur CF[10]. Alors on peut supposer que $(N_0 * \varepsilon'_{CF,n})_{n=1}^\infty$ converge d'une manière croissante vers $N_0 * \varepsilon'_{CF}$ lorsque $n \to \infty$. Alors $\int d\varepsilon'_{CF,n} \uparrow \int d\varepsilon'_{CF} = 1$ $(n \uparrow \infty)$, car $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est markovien. Comme $\lim_{p \to 0} pN_0 * \check{N}_p = a(N_0)\xi_\Gamma$ (voir le lemme 24), $N_0 * \varepsilon'_{CF,n} * f \leqq a(N_0)\xi_\Gamma * f + c$ sur X $(n = 1, 2, \cdots)$ et il existe $\nu_n \in M_K^+(X)$ telle que $\operatorname{supp}(\nu_n) \subset \overline{CF \cap \omega_n}$, $N_0 * \nu_n \leqq \xi_\Gamma$ et $N_0 * \nu_n = \xi_\Gamma$ dans $CF \cap \omega_n$. Alors $(N_0 * \nu_n)_{n=1}^\infty$ est croissante, et donc $\left(\int d\nu_n\right)_{n=1}^\infty$ est aussi croissante. On choisit un entier $n_0 \geqq 1$ tel que, pour $n \geqq n_0$ quelconque, $1 - \int d\varepsilon'_{CF,n} \leqq c \int d\nu_n$. Posons $a_n = \left(1 - \int d\varepsilon'_{CF,n}\right) \Big/ \int d\nu_n$ $(n \geqq n_0)$; alors $N_0 * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) \leqq N_0 + c\xi_\Gamma$ et $\lim_{n \to \infty} N_0 * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) = N_0 * \varepsilon'_{CF}$. Posons

$$b_n = b + \int \varphi(g - (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f) d\xi + c(1 + \sup_{x \in X} \xi_\Gamma * f(x)).$$

Comme $\operatorname{supp}(\varepsilon'_{CF,n}) \subset \Gamma$ et $\operatorname{supp}(\nu_n) \subset \Gamma$, on a, pour $x \in (\operatorname{supp}(f) + \Gamma) \cap CK$,

$$\begin{aligned} N * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f(x) &= N_0 * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f(x) + N' * f(x) + \varphi(x) \\ &\quad - \int \varphi(\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f d\xi - a(N_0)\xi_\Gamma * f(x) \end{aligned}$$

---

(10) Pour $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert ω dans X, $\mu'_\omega \in M^+(X)$ s'appelle une mesure N_0-balayée de μ sur ω si $\operatorname{supp}(\mu'_\omega) \subset \bar{\omega}$, $N_0 * \mu'_\omega \leqq N_0 * \mu$ et $N_0 * \mu'_\omega = N_0 * \mu$ dans ω.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

$$\leqq N' * g(x) + \varphi(x) - \int \varphi g d\xi + b_n$$
$$= (N'' + a(N_0)\xi_\Gamma) * g(x) + b_n .$$

Soit $p > 0$ quelconque. Comme $\mathrm{supp}(\check{N}_p) \subset \Gamma$, on a $p(N'' - \varphi\xi) * \check{N}_p = N'' - \varphi\xi$, et donc $\lim_{n\to\infty} p(N - \varphi\xi) * \check{N}_p = N'$, d'où $(N - \varphi\xi, N') \in (PRSM)$. Par conséquent, $(N, N'' + a(N_0)\xi_\Gamma) \in (PRSM)$. On a alors

$$N * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f(x) \leqq (N'' + a(N_0)\xi_\Gamma) * g(x) + b_n \text{ sur } X .$$

En utilisant le lemme 24, on a

$$(N'' + a(N_0)\xi_\Gamma) * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f(x) \leqq (N'' + a(N_0)\xi_\Gamma) * g(x) + b_n \text{ sur } X ,$$

car

$$\begin{aligned}(N'' * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f - N'' * g) * (p\check{N}_p) \\ = (N'' - \varphi\xi) * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f - (N'' - \varphi\xi) * g \\ + \left(\int \varphi((\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f - g) d\xi\right) * (p\check{N}_p) \\ = N'' * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f - N'' * g .\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}N' * f(x) &= \lim_{n\to\infty} N' * (\varepsilon'_{CF,n} + a_n\nu_n) * f(x) \\ &\leqq N' * g(x) + b + c(1 + \sup_{x\in X} \xi_\Gamma * f(x)) \text{ sur } X .\end{aligned}$$

En faisant $c \downarrow 0$, on arrive à $N' * f(x) \leqq N' * g(x) + b$ sur X, d'où $N' \in (PSM)$.

Montrons finalement que $N' - a(N_0)\xi_\Gamma \in S(N')$. On peut supposer que $\varphi = 0$, et donc tout x de Γ est une période de $N'' = \eta_{N,\delta}$ et de N'. Soit $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ une exhaustion d'ouverts de X. D'après $\lim_{p\to 0} N_0 * (p\check{N}_p) = a(N_0)\xi_\Gamma$ et $p\int d\check{N}_p = 1$, le principe du balayage et le principe de positivité de masse pour N_0 montrent qu'il existe $\lambda_n \in M_K^+(X)$ vérifiant $\int d\lambda_n \leqq 1$, $\mathrm{supp}(\lambda_n) \subset \overline{\omega}_n \cap \Gamma$, $N_0 * \lambda_n \leqq a(N_0)\xi_\Gamma$ dans X et $N_0 * \lambda_n = a(N_0)\xi_\Gamma$ dans ω_n. D'après le principe de domination pour N_0, $(N_0 * \lambda_n)_{n=1}^\infty$ est croissante, et donc, d'après le principe de positivité de masse pour N_0, $\left(\int d\lambda_n\right)_{n=1}^\infty$ est aussi croissante. Comme $\lim_{p\to\infty} pN * (\varepsilon - pN_p) = \varepsilon$, on a $\lambda_n \geqq \lambda_{n+1}$ dans ω_n. Donc $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ existe. Posons $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$. Alors $\lambda_n \geqq \lambda$ dans ω_n et, pour $p > 0$ quelconque,

$$pN_p * (a(N_0)\xi_\Gamma - N_0 * \lambda) = \lim_{n\to\infty} pN_p * (N_0 * \lambda_n - N_0 * \lambda)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{p\to 0} (N_0 - N_p) * (\lambda_n - \lambda) \\ &= \lim_{p\to 0} (N_0 * (\lambda_n - \lambda)) \\ &= a(N_0)\xi_\Gamma - N_0 * \lambda\,, \end{aligned}$$

car $\int dN_p = 1/p$ et $\int d\lambda_n \leqq 1$. Donc $pN_p * N_0 * \lambda = N_0 * \lambda$, et $N_p * \lambda = 0$, d'où $\lambda = 0$. Ainsi on a $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Donc, d'après (3.10), on a

$$0 = \lim_{n\to\infty} (N_0 + \check{N}_0 - a(N_0)\xi_\Gamma) * \lambda_n \geqq a(N_0)\xi_\Gamma - a(N_0)\Bigl(\lim_{n\to\infty}\int d\lambda_n\Bigr)\xi_\Gamma \geqq 0\,,$$

d'où $\lim_{n\to\infty}\int d\lambda_n = 1$. Soit $(\varepsilon_n', a_n) \in \underline{SB}_{N,N''}(\varepsilon, \omega_n)$. Alors $N * \varepsilon_n' + a_n\xi \uparrow N''$ avec $n \uparrow \infty$. Posons $\lambda_n' = \Bigl(1\Big/\int d\lambda_n\Bigr)\lambda_n$. Alors, d'après $N'' = N'' * \varepsilon_x$ pour tout $x \in \Gamma$, on a

$$N'' = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(N * \varepsilon_n' + a_n\xi) * \lambda_m'\,.$$

Comme, pour $m_1 \geqq m_2$ et $n_1 \geqq n_2$ quelconques,

$$\begin{aligned} (N * \varepsilon_{n_1}' + a_{n_1}\xi) * \lambda_{m_1}' &\geqq (N * \varepsilon_{n_2}' + a_{n_2}\xi) * \lambda_{m_2}' \\ &+ \Biggl(\frac{1}{\int d\lambda_{m_1}} - 1\Biggr)N_0 * \lambda_{m_1} * \varepsilon_{n_1}' - \Biggl(\frac{1}{\int d\lambda_{m_2}} - 1\Biggr)N_0 * \lambda_{m_2} * \varepsilon_{n_1}' \end{aligned}$$

et, pour $f \in C_K(X)$, $N_0 * f$ est bornée, on a

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(N * \varepsilon_n' + a_n\xi) * \lambda_m' = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(N * \varepsilon_n' + a_n\xi) * \lambda_m'\,,$$

et donc

$$N'' = \lim_{n\to\infty}((a\xi_\Gamma + N'') * \varepsilon_n' + a_n\xi) = \lim_{n\to\infty}(N' * \varepsilon_n' + a_n\xi)$$

d'où $N' - a\xi_\Gamma = N'' \in S(N')$.

(ii) Supposons que $a(N_0) = 0$ et qu'il existe une fonction additive et continue φ sur X et un sous-groupe non-compact Γ de X tels que $(N'' - \varphi\xi) * \varepsilon_y = N'' - \varphi\xi$ pour tout $y \in \Gamma$. Posons $a = 0$ et $N' = N'' - \varphi\xi$. Alors N' vérifie la condition (c) dans le théorème 1 et $N' \in S(N')$. Pour que $N' \in (PSM)$, il suffit de montrer que $N'' \in (PSM)$ (voir la proposition 2). Supposons que, pour f, $g \in C_K^+(X)$ à $\int fd\xi = \int gd\xi$ et $b \in R$, $N'' * f \leqq N'' * g + b$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Soit $0 < c \in R$ quelconque. Comme N_0 s'annule à l'infini (voir le lemme 24), il existe une famille $(x_j)_{j=0}^m \subset \Gamma$ telle que $x_0 = 0$, $\mathrm{supp}(f * \varepsilon_{x_j}) \cap \mathrm{supp}(f * \varepsilon_{x_k}) = \phi$ $(j \neq k)$, $(1/m)N_0 * f \leqq c/2$ sur $\mathrm{supp}(f)$ et, pour $0 \leqq j \leqq m$ quelconque,

$$\sum_{k=0}^{j-1} N_0 * (f * \varepsilon_{x_k}) + \sum_{k=j+1}^{m} N_0 * (f * \varepsilon_{x_k}) \leqq \frac{c}{2} \qquad \text{sur } \operatorname{supp}(f * \varepsilon_{x_j}) .$$

D'après le principe classique du maximum pour N_0[11], on a

$$\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} N_0 * (f * \varepsilon_{x_j}) \leqq c \qquad \text{sur } X .$$

Comme tout le point de Γ est une période de $N'' * (g - f)$, on a

$$\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} N * (f * \varepsilon_{x_j}) \leqq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} N'' * (g * \varepsilon_{x_j}) + b + c \quad \text{sur } \bigcup_{j=0}^{m} \operatorname{supp}(f * \varepsilon_{x_j}) ,$$

et donc la même inégalité a lieu sur X, d'où $N'' * f \leqq N'' * g + b + c$ sur X. En faisant $c \downarrow 0$, on arrive à $N'' * f \leqq N'' * g + b$ sur X. Ainsi $N' \in (PSM)$. On obtient ainsi la décomposition de (1.2).

On remarque qu'il existe une fonction additive et continue φ sur X telle que le sous-groupe fermé des périodes de $N'' - \varphi\xi \supset \operatorname{supp}(N_0)$ (voir la première partie de cette preuve).

(iii) Supposons que N_0 est à support compact et que, pour une fonction additive et continue φ sur X quelconque, le sous-groupe fermé des périodes de $N'' - \varphi\xi$ est compact dès qu'il contient $\operatorname{supp}(N_0)$. Comme le sous-groupe fermé engendré par $\operatorname{supp}(N_0)$ est compact, N'' est périodique à tout le point du sous-groupe fermé engendré par $\operatorname{supp}(N_0)$. Posons $\varphi = 0$, $\Gamma =$ le sous-groupe fermé des périodes de N'', $a = \inf\{b \geqq 0;\, N'' + b\xi_\Gamma \in (PSM)\}$ et $N' = N'' + a\xi_\Gamma$. D'après $N'' + \left(\int dN_0/d\xi_\Gamma\right)\xi_\Gamma \in (PSM)$, on a $\int dN_0 \geqq a \int d\xi_\Gamma$. On a encore $N = N_0 - a\xi_\Gamma + N'$, $N' \in (PSM)$ et $N' - a\xi_\Gamma = N'' \in S(N')$, d'après le lemme 23. Donc il suffit de montrer que N' est pseudo-invariant.

On peut supposer que $N_0(\{0\}) > 0$, car on considère $N + c\varepsilon$ $(0 < c \in R)$ au lieu de N si c'est nécessaire. Soit $f_0 \in C_K^+(X)$ vérifiant $\int f_0 d\xi = 1$. D'après le lemme 23, il existe une famille filtrante $(x_i)_{i \in I} \subset X$ telle que $\lim_{i \in I} x_i = \delta$ et, pour $\eta \in S'(N'')$ quelconque, $\eta_{x_i} \to \eta$, où $\eta_x = \eta * \varepsilon_x + b_x\xi$ et $\int f_0 d(N'' * \varepsilon_x + b_x\xi) = 1$. Comme $(N'' * \varepsilon_{-x_i} + b_{-x_i}\xi)_{i \in I}$ est vaguement bornée (voir le lemme 21), on peut supposer qu'elle converge vaguement. Posons $M = \lim_{i \in I} (N'' * \varepsilon_{-x_i} + b_{-x_i}\xi)$. Il suffit de montrer que $N' = N''$ ou bien

(11) Cela signifie que, pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque,

$$\sup_{x \in X} N_0 * f(x) = \max_{x \in \operatorname{supp}(f)} N_0 * f(x) .$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

$N' = M + c\xi$, où $c \in R$. On montrera d'abord que $(M, N'') \in (PRSB)$. Soient $\mu \in M_K^+(X)$ à $\int d\mu = 1$ et $\omega \neq \phi$ un ouvert relativement compact dans X. On peut supposer que, pour $i \neq j \in I$ quelconques, $\overline{\omega - \{x_i\}} \cap \overline{\omega - \{x_j\}} = \phi$ et $(\Gamma + \overline{\omega - \{x_i\}}) \cap \overline{\omega} = \phi$. Posons

$$\tilde{\omega}_i = \omega - \{x_i\} \text{ et } \Omega_i = \bigcup_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} \tilde{\omega}_j \quad (i \in I).$$

Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion d'ouverts de X vérifiant $\omega_1 \supset \Gamma$. On choisit $(\mu'_{i,n}, b_{i,n}) \in \underline{SB}_{N,N''}(\mu; (\omega \cup \Omega_i) \cap \omega_n)$. Comme $N_0(\{0\}) > 0$, de la même manière que dans la proposition 8, (1), on a $\mu'_{i,n}(\partial((\omega \cup \Omega_i) \cap \omega_n)) = 0$. Donc $\mu'_{i,n} \geqq \mu'_{i,n+1}$ dans ω_n, car $\underline{SB}_N(\mu'_{i,n+1}, (\omega \cup \Omega_i) \cap \omega_n)$ forme un seul élément et $(\mu'_{i,n}, b_{i,n} - b_{i,n+1}) \in \underline{SB}_N(\mu'_{i,n+1}; (\omega \cup \Omega_i) \cap \omega_n)$. D'autre part, $(N'' * \mu'_{i,n} + b_{i,n}\xi)_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Posons $\eta_i = \lim_{n\to\infty} (N'' * \mu_{i,n} + b_{i,n}\xi)$ et $\mu'_i = \lim_{n\to\infty} \mu'_{i,n}$; alors $\eta_i \in S'(N'')$, $\int d\mu'_i \leqq 1$, $\mu'_1(C(\omega \cup \Omega_i)) = 0$ et $N_0 * \mu'_i + \eta_i = N'' * \mu$ dans $\omega \cup \Omega_i$. D'après le lemme 23, on a

$$\lim_{j \in I} (\eta_i * (\varepsilon - \varepsilon_{x_j}) + (b_0 - b_{x_j})\xi) = \lim_{j \in I} (N'' * (\varepsilon - \varepsilon_{x_j}) + (b_0 - b_{x_j})\xi) = 0,$$

et donc $N_0 * \mu'_i = 0$ dans ω, car, pour $j \in I$ quelconque,

$$(N_0 * \mu'_i + \eta_i) * (\varepsilon - \varepsilon_{x_j}) = (N'' * \mu) * (\varepsilon - \varepsilon_{x_j}) \text{ dans } \omega.$$

Donc $\mu'_i|_\omega = 0$. On obtient ainsi $\lim_{n\to\infty} (N * (\mu'_{i,n}|_{C\omega}) + b_{i,n}\xi) = N'' * \mu$ dans ω et $\lim_{n\to\infty} (N * (\mu'_{i,n}|_{C\omega}) + b_{i,n}\xi) \leqq N'' * \mu$ dans X. Posons $\mu_{i,n,j} = \mu'_{i,n}|_{\tilde{\omega}_j} * \varepsilon_{x_j}$ $(i \leqq j)$; alors $\operatorname{supp}(\mu_{i,n,j}) \subset \overline{\omega}$, $\sum_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} \int d\mu_{i,n,j} \leqq 1$ et $\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} d\mu_{i,n,j} = 1$. Soient $f \in C_K^+(X)$ à $\operatorname{supp}(f) \subset \omega$ et $0 < \alpha \in R$ quelconques. Alors, il existe $i_0 \in I$ tel que, pour $i \geqq i_0$ quelconque, $|(N'' * \varepsilon_{-x_i} + b_{-x_i}\xi - M) * f(-x)| < \alpha$ pour tout $x \in \overline{\omega}$. Comme

$$\begin{aligned} N'' * (\mu'_{i,n}|_{C\omega}) &= \sum_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} (N'' * \varepsilon_{-x_j}) * \mu_{i,n,j} \\ &= \sum_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} (N'' * \varepsilon_{-x_j} + b_{-x_j}\xi) * \mu_{i,n,j} - \Big(\sum_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} b_{-x_j} \int d\mu_{i,n,j}\Big)\xi, \end{aligned}$$

on a, pour $i \geqq i_0$,

$$\begin{aligned} &|N'' * (\mu'_{i,n}|_{C\omega}) * f(0) - M * (\sum_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} \mu_{i,n,j}) * f(0) \\ &+ \Big(\sum_{\substack{j \in I \\ j \geqq i}} b_{-x_j} \int d\mu_{i,n,j}\Big) \int f d\xi| < \alpha. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Soit ν_i un point vaguement adhérent de $(\sum_{j\in i}^{j\in I}\mu_{i,n,j})_{n=1}^{\infty}$ lorsque $n\to\infty$ et ν un point vaguement adhérent de $(\nu_i)_{i\in I}$ lorsque $x_i\to\delta$. Alors $\int d\nu=1$ et $\mathrm{supp}(\nu)\subset\bar{\omega}$. D'après (3.12), il existe $c\in R$ telle que $M*\nu+c\xi\leqq N''*\mu$ dans X et $M*\nu+c\xi=N''*\mu$ dans ω, car $N_0*(\mu'_{i,n}|_{C\omega})=0$ dans ω. On voit ainsi $(M,N'')\in(PRSB)$. Comme $M\in S(N'')$, on a encore $M\in(PSB)$ (c'est-à-dire, $M\in(PSM)$).

Supposons d'abord que $M\in\underset{\sim}{S}(N'')$. Dans ce cas, on montrera que $N'=N''$. Pour cela, il suffit de montrer que $N''\in(PSM)$. Comme $(N,M)\in(PRSB)$ et $(M,N'')\in(PRSB)$, $(M_x)_{x\in X}$ est vaguement bornée, car il existe $\nu_1,\nu_2\in M_K^+(X)$ et $c_1,c_2\in R$ tels que $\int d\nu_1=\int d\nu_2=1$, $N''*\nu_1+c_1\xi\leqq N*\nu_1+c_1\xi\leqq M$ et $M*\nu_2+c_2\xi\leqq N''$. Comme $M\in\underset{\sim}{S}(N'')$, il existe une famille filtrante $(\eta_i)_{i\in I}$ à droite telle que $\eta_i\uparrow M$, et le lemme 23 montre que tout le point vaguement adhérent de $(M_{x_i})_{i\in I}$ lorsque $x_i\to\delta$ est $\geqq M$. On peut supposer encore que $\lim_{i\in I}M_{x_i}$ existe. Posons $M'=\lim_{i\in I}M_{x_i}$; alors $M'\geqq M$. Pour $N''\in(PSM)$, il suffit de montrer l'énoncé suivant:

Soit $0<\alpha\in R$. Si $(\alpha N_0+N'',N'')\in(PRSM)$, alors $(\frac{1}{2}\alpha N_0+N'',N'')\in(PRSM)$.

On remarque ici que $(N_0+N'',N'')\in(PRSB)$. Supposons que, pour $f,g\in C_K^+(X)$ à $\int fd\xi=\int gd\xi$ et $d\in R$, $(N''+\frac{1}{2}\alpha N_0)*f\leqq N''*g+d$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Soit $0<\beta\in R$ quelconque. On choisit $i_0\in I$ tel que, pour $I\ni i\geqq i_0$ quelconque, $\mathrm{supp}(N_0*f)\cap\mathrm{supp}(N_0*f*\varepsilon_{x_i})=\phi$, $|N_0''*f-N_{x_i}''*f|<\beta$ et $|N_0''*g-N_{x_i}''*g|<\beta$ sur $\mathrm{supp}(f)$, où $N_0''=N''+b_0\xi$. Alors, pour $i\geqq i_0$,

$$(N_0''+\tfrac{1}{2}\alpha N_0)*f*\varepsilon_{x_i}\leqq N_0''*g*\varepsilon_{x_i}+d+2\beta \text{ sur } \mathrm{supp}(f)\cup\mathrm{supp}(f*\varepsilon_{x_i}),$$

et donc

$$N_{x_i}''*f+\tfrac{1}{2}\alpha N_0*f*\varepsilon_{x_i}\leqq N_{x_i}''*g+d+2\beta \text{ sur } \mathrm{supp}(f)\cup\mathrm{supp}(f*\varepsilon_{x_i}).$$

Comme $M\in(PSM)$ et $M'\geqq M$, il existe $i_1\in I$ tel que, pour $i\geqq i_1$ quelconque

$$M_{x_i}*f+\beta\geqq M*f \quad \text{sur} \quad X,$$

et donc

$$N_{x_i}''*f+\beta\geqq N_0''*f=N''*f+b_0\int fd\xi \quad \text{sur} \quad X,$$

car $(M,N'')\in(PRSB)$, et $(M,N'')\in(PTMS)$ (voir la proposition 1). Par conséquent, on a

$$\tfrac{1}{2}(N_0'' * f(x) + N_{x_i}'' * f(x)) + \tfrac{1}{2}\alpha(N_0 * f(x) + N_0 * f * \varepsilon_{x_i}(x)) \\ \leqq N_{x_i}'' * g(x) + d + \tfrac{5}{2}\beta$$

sur $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(f * \varepsilon_{x_i})$ $(i \geqq i_0, \geqq i_1)$. D'après $(N'' + \alpha N_0, N'') \in (PRSM)$, on a

$$\tfrac{1}{2}(N_0'' * f + N_{x_i}'' * f) + \tfrac{1}{2}\alpha(N_0 * f + N_0 * f * \varepsilon_{x_i}) \\ \leqq N_{x_i}'' * g(x) + d + \tfrac{5}{2}\beta \text{ sur } X.$$

En faisant $x_i \to \delta$ et ensuite $\beta \downarrow 0$, on arrive à

$$N_0'' * f + \tfrac{1}{2}\alpha N_0 * f \leqq N_0'' * g + d \text{ sur } X,$$

d'où $N'' \in (PSM)$.

Supposons ensuite que $M \notin \underset{\sim}{S}(N')$. Comme $(N, M) \in (PRSB)$, on choisit $(\varepsilon_n'', a_n'') \in \underline{SB}_{N,M}(\varepsilon, \omega_n)$. On remarque que $\underline{SB}_{N,M}(\varepsilon, \omega_n)$ forme un seul élément, et donc $\varepsilon_n'' \geqq \varepsilon_{n+1}''$ dans ω_n et $(N'' * \varepsilon_n'' + a_n''\xi)_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Posons $\lambda = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n''$ et $\eta = \lim_{n\to\infty} (N'' * \varepsilon_n'' + a_n''\xi)$; alors $\lambda \neq 0$, $\int d\lambda \leqq 1$, $\eta \in \underset{\sim}{S}(N'')$ et

$$M = \eta + N_0 * \lambda. \tag{3.13}$$

Montrons que $\eta = \eta_{M,\delta}$. Soient F_1 et F_2 deux compacts dans X vérifiant $F_1 \subset$ l'intérieur de F_2. On choisit un entier $n_0 \geqq 1$ tel que $\omega_{n_0} \supset F_2$. Soient $(\varepsilon'_{CF_2,n}, b'_{CF_2,n}) \in \underline{SB}_N(\varepsilon, CF_2 \cap \omega_n)$ et $(\varepsilon''_{CF_1,n}, b''_{CF_1,n}) \in \underline{SB}_M(\varepsilon, CF_1 \cap \omega_n)$ $(n \geqq n_0)$. Alors, d'après $(N, M) \in (PTMS)$ et $M \in (PSM)$, on a

$$M * \varepsilon'_{CF_2,n} + b'_{CF_2,n}\xi \leqq M * \varepsilon''_{CF_1,n+1} + b''_{CF_1,n+1}\xi \text{ dans } X.$$

D'après $(N, \eta) \in (PTMS)$, $N'' * \varepsilon'_{CF_2,n} + b'_{CF_2,n}\xi \uparrow N''$ $(n \uparrow \infty)$ et (3.6), on a

$$\eta * \varepsilon'_{CF_2,n} + b'_{CF_2,n}\xi \uparrow \eta \ (n \uparrow \infty).$$

Donc, en faisant $n \to \infty$ et $F_1 \uparrow X$, on arrive à $\eta \leqq \eta_{M,\delta}$. D'autre part, pour $n \geqq n_0$ et $f \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = 1$,

$$(M * \varepsilon''_{CF_1,n} + b''_{CF_1,n}) * f \leqq \eta * f + \sup_{y \in CF_1 + \mathrm{supp}(f)} N_0 * \lambda * f(y) \text{ sur } X,$$

car $N'' \in S(M)$, $M \in (PSM)$, et donc $(M, \eta) \in (PRMS)$. En faisant $n \to \infty$, $F_1 \uparrow X$ et $f\xi \to \varepsilon$(vaguement), on arrive à $\eta_{M,\delta} \leqq \eta$, d'où $\eta_{M,\delta} = \eta$. On voit ainsi qu'il existe une résolvante sous-markovien $(M_p)_{p>0}$ vérifiant $\lim_{p\to 0} M_p = N_0 * \lambda$ et que, pour tout $x \in X$, $\eta - \eta * \varepsilon_x$ est périodique à tout le point du sous-groupe fermé Γ' engendré par $\mathrm{supp}(N_0 * \lambda)$. Comme $(M, N'') \in$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

$(PRSB)$, on a $N'' \in \underset{\sim}{S}(\eta)$, car, en choisissant $(\lambda'_n, c_n) \in \underline{SB}_{M,N''}(\varepsilon, \omega_n)$ et prenant un point vaguement adhérent λ' de (λ'_n) lorsque $n \to \infty$, on obtient que $\lim_{n\to\infty} (\eta * \lambda'_n + c_n\xi) \in \underset{\sim}{S}(\eta)$ et $N'' = N_0 * \lambda * \lambda' + \lim_{n\to\infty} (\eta * \lambda'_n + c_n\xi)$, d'où $\lambda' = 0$. On remarque ici que $\underset{\sim}{S}(\eta) \subset \underset{\sim}{S}(N'')$. Donc, pour $x \in X$ quelconque, $N'' - N'' * \varepsilon_x$ est périodique à tout le point de Γ'. Si Γ' est compact, alors on voit facilement que $\Gamma' \subset \Gamma$. Si Γ' est non-compact, alors, de la même manière que au début cette preuve, il existe une fonction additive et continue ψ sur X telle que $N'' - \psi\xi$ soit périodique à tout le point de Γ', qui est en contradiction avec notre hypothèse de (iii). On a ainsi $\Gamma' \subset \Gamma$. D'après $M = \lim_{i\in I} (N'' * \varepsilon_{-x_j} + b_{-x_j}\xi)$ et (3.12), $N_0 * \lambda$ est périodique à tout le point de Γ, et donc $\Gamma' = \Gamma$. Comme N_0 est un noyau de convolution de Hunt, il existe $\alpha \in R$ tel que $\lambda = \alpha\xi_\Gamma$. On suppose $\int d\xi_\Gamma = 1$, et donc $0 < \alpha \leqq 1$. Si $\alpha = 1$, alors, d'après $\varepsilon''_n \geqq \lambda$ dès que $\omega_n \supset \Gamma$ et $\int d\varepsilon''_n = 1$, on a $\varepsilon''_n = \lambda(\omega_n \supset \Gamma)$, et donc $M = \left(\int dN_0\right)\xi_\Gamma + N'' * \xi_\Gamma + c\xi = \left(\int dN_0\right)\xi_\Gamma + N'' + c\xi$, où $c \in R$. Supposons que $\alpha < 1$. Alors

$$M = \left(\alpha\int dN_0\right)\xi_\Gamma + \alpha N'' + (1-\alpha)\lim_{n\to\infty}\left(N'' * \left(\frac{\varepsilon''_n - \lambda}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{1-\alpha}a''_n\xi\right)$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\left(N'' * \left(\frac{\varepsilon''_n - \lambda}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{1-\alpha}a''_n\xi\right) \in \underset{\sim}{S}(N'').$$

Posons

$$N'' = \alpha N'' + (1-\alpha)\lim_{n\to\infty}\left(N'' * \left(\frac{\varepsilon''_n - \lambda}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{1-\alpha}a''_n\xi\right).$$

Comme $M \in (PSM)$, on a $\left(\int dN_0\right)\xi_\Gamma + N''' \in (PSM)$, et donc $N_0 + N''' \in (PSM)$. D'après le lemme 21, on voit que

$$N'' - \lim_{n\to\infty}\left(N'' * \left(\frac{\varepsilon''_n - \lambda}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{1-\alpha}a''_n\xi\right)$$

est proportionnel à ξ. Par conséquent, on obtient que

$$M = \left(\alpha\int dN_0\right)\xi_\Gamma + N'' + c\xi,$$

où $0 < \alpha \leqq 1$ et $c \in R$. Comme $(N', M) \in (PRSB)$, on a $a \geqq \left(\alpha\int dN_0\right)$, et donc $a = \alpha\int dN_0$, d'où $N' = M - c\xi$.

On obtient ainsi que (1) $\Rightarrow$ (2).

On montrera ensuite (2) $\Rightarrow$ (1). Pour cela, il faut préparer les lemmes suivants:

LEMME 25 (voir [10]). *Soit H un espace hilbertien sur R; la norme dans H est désignée par $\|\cdot\|_H$ et le produit scalaire associé est désigné par $(\cdot,\cdot)_H$. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire et continue sur $H\times H$ qui vérifie*

$$a(u, u) \geqq c\|u\|_H^2$$

pour tout $u\in H$, où c est une constante >0. Alors, pour ensemble convexe et fermé $A\neq\phi$ dans H et une forme linéaire et continue L sur H, il existe $u_A\in A$ et un seul tel que, pour $u\in A$ quelconque,

$$a(u_A, u-u_A) \geqq L(u-u_A)\,. \tag{3.14}$$

On désigne par $L^2(\xi)$ l'espace hilbertien usuel des fonctions réelles dont les carrés sont ξ-sommables. Pour une fonction ξ-sommable f dans X à support compact, $N*(f\xi)$ est absolument continue par rapport à ξ. Sa densité s'écrit aussi $N*f$. On remarque que, pour $f\in L^2(\xi)$ à support compact, $(N*g)^2$ est localement ξ-sommable.

LEMME 26. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Supposons que, pour $g\in C_K^0(X)$ quelconque, $N*g*\check{g}(0)\geqq 0$. Soit $0\leqq f\in L^2(\xi)$ à support compact, K un compact dans X à $\xi(K)>0$ et c une constante >0. Alors il existe $0\leqq f_{c,K}\in L^2(\xi)$ à $\operatorname{supp}(f_{c,K}\xi)\subset K$ et à $\int f_{c,K}d\xi=\int fd\xi$ et une constante $a_{f,c,K}\in R$ telles que l'on ait:*

$$N*f_{c,K}+cf_{c,K}+a_{f,c,K}\geqq N*f+cf \ \ \xi\text{-p.p. sur } K\,, \tag{3.15}$$

$$N*f_{c,K}+cf_{c,K}+a_{f,c,K}= N*f+cf \ \ \xi\text{-p.p. sur } \{x\in X;\ f_{c,K}(x)>0\}\,. \tag{3.16}$$

Dans ce cas, $(f_{c,K}, a_{f,c,K})$ est uniquement déterminé. En particulier, si $N\in(PSM)$, alors

$$N*f_{c,K}+cf_{c,K}+a_{f,c,K}\leqq N*f+cf \ \ \xi\text{-p.p. sur } X$$

et $N*f_{c,K}+cf_{c,K}+a_{f,c,K}$ croît ξ-p.p. lorsque K croît.

Preuve. On remarque d'abord que, pour $g\in L^2(\xi)$ à support compact et à $\int gd\xi=0$, $N*g*\check{g}(0)\geqq 0$. On peut supposer que $\int fd\xi=1$. Posons $F=K\cup\operatorname{supp}(f\xi)$ et

$$E=\left\{c(g-f)+N*(g-f)|_F;\ 0\leqq g\in L^2(\xi),\ \int gd\xi=1,\ \operatorname{supp}(g\xi)\subset K\right\},$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

où $N*(g-f)|_F$ désigne la restreinte de $N*(g-f)$ sur F. Posons

$$H = \left\{c\left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right) + N*\left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right)\Big|_F ; g \in L^2(\xi), \operatorname{supp}(g\xi) \subset K\right\}.$$

L'application $H \ni c\left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right) + N*\left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right)\Big|_F \to g \in L^2(\xi)$ est injective. On écrit

$$u_g = c\left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right) + N*\left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right)\Big|_F .$$

Posons, pour u_g, $u_h \in H$ quelconques,

$$\begin{aligned}(u_g, u_h) = c^2 \int \left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right)\left(h - \left(\int h d\xi\right)f\right)d\xi \\ + \frac{1}{2}(N + \check{N}) * \left(g - \left(\int g d\xi\right)f\right) * \left(\check{h} - \left(\int h d\xi\right)\check{f}\right)(0)\end{aligned}$$

et

$$a(u_g, u_h) = \int u_g\left(h - \left(\int h d\xi\right)f\right)d\xi .$$

Alors $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur H et

$$a(u_g, u_g) = (u_g, u_g) = \|u_g\|_H^2 ,$$

où $\|\cdot\|_H$ désigne la norme associée. Comme l'application

$$H \ni u_g \longrightarrow g \in L^2(\xi)$$

est continue, H est un espace hilbertien par $(\cdot, \cdot)$ et $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire et continue sur $H \times H$, car, pour u_g, $u_h \in H$ quelconques,

$$\begin{aligned}\left|\int u_g\left(h - \left(\int h d\xi\right)f\right)d\xi\right| &\leqq \left(\int |u_g|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int \left|h - \left(\int h d\xi\right)f\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &\leqq \frac{1}{c^2}\left(c + \int_{F-F} d|N|\right)\|u_g\|_H \|u_h\|_H .\end{aligned}$$

Comme E est $\neq \phi$, convexe et fermé dans H, le lemme 25 montre qu'il existe $u_g \in E$ et un seul tel que, pour $u_h \in E$ quelconque,

$$a(u_g, u_h - u_g) \geqq 0 .$$

Donc, pour $0 \leqq h \in L^2(\xi)$ à $\operatorname{supp}(h\xi) \subset K$ et à $\int h d\xi = 1$ quelconque,

$$\int (c(g-f) + N*g - N*f)(h-g)d\xi \geqq 0 .$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

Posons $f_{c,K} = g$ et $a_{f,c,K} = \int (c(f-g) + N*f - N*g)gd\xi$; alors on a

$$\int (c(g-f) + N*g - N*f + a_{f,c,K})hd\xi \geqq 0\,,$$

et donc

$$N*f_{c,K} + cf_{c,K} + a_{f,c,K} \geqq N*f + cf \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } K\,.$$

Comme

$$\int (c(g-f) + N*g - N*f + a_{f,c,K})gd\xi = a(u_g, u_g - u_g) = 0\,,$$

on a

$$N*f_{c,K} + cf_{c,K} + a_{f,c,K} = N*f + cf \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x \in X; f_{c,K}(x) > 0\}\,.$$

L'unicité de $(f_{c,K}, a_{f,c,K})$ est un résultat immédiat de celle de u_A dans le lemme 25. Comme, pour $0 \leqq f$, $0 \leqq g \in L^2(\xi)$ à support compact et à $\int fd\xi = \int gd\xi$ quelconques,

$$\begin{aligned}\int |f_{c,K} - g_{c,K}|^2 d\xi &\leqq \frac{1}{c}\| u_{f_{c,K}} - u_{g_{c,K}}\|_H^2 \leqq \frac{1}{c} a(u_f - u_g, u_{f_{c,K}} - u_{g_{c,K}}) \\ &\leqq \frac{1}{c}\Big(\int_K |u_f - u_g|^2 d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int |f_{c,K} - g_{c,K}|^2 d\xi\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

et, pour $0 < b \in R$ quelconque, $(bf)_{c,K} = bf_{c,K}$, on obtient que, pour un compact K_1 dans X quelconque, l'application $L^2_+(K_1) \ni f \to f_{c,K}$ est continue dans $L^2(\xi)$, où $L^2_+(K_1) = \{f \in L^2(\xi); f \geqq 0, \operatorname{supp}(f\xi) \subset K_1\}$.

Supposons ensuite que $N \in (PSM)$. On peut supposer que $f \in C_K^+(X)$. Pour $n \geqq 1$ quelconque, il existe un voisinage compact v_n de l'origine tel que $|N - N(\{0\})\varepsilon|(v_n - v_n) < 1/n$. Alors, pour $g \in L^2(\xi)$ à $\operatorname{supp}(g\xi) \subset v_n$,

$$(N - N(\{0\})\varepsilon) * g * \check{g}(0) \leqq \frac{1}{n}\int |g|^2 d\xi,$$

car $|g * \check{g}(x)| \leqq \int |g|^2 d\xi$ sur X. Donc $N(\{0\}) \geqq 0$. On peut supposer que $c + N(\{0\}) = 1$. Posons $\sigma = N - N(\{0\})\varepsilon$. Soit $\omega \neq \phi$ un ouvert relativement compact dans X vérifiant $|\sigma|(\bar{\omega} - \bar{\omega}) < 1$ et soit $(\mu'_\omega, a_\omega) \in \underline{SB}_{N+c\varepsilon}(f\xi; \omega)$. Alors, d'après la proposition 8, (1), on a $\mu'_\omega(\partial\omega) = 0$, car $\mu'_\omega = f|_\omega \xi + \int_{C\omega} \varepsilon'_x f(x) d\xi(x)$, où $(\varepsilon'_x, a'_x) \in \underline{SB}_{N+c\varepsilon}(\varepsilon_x, \omega)$ (voir la proposition 7, (3)). On remarque ici que, pour $x \notin \omega$, $\underline{SB}_{N+c\varepsilon}(\varepsilon_x, \omega) = \underline{SB}_{N+c\varepsilon, N}(\varepsilon_x, \omega)$. Posons $\sigma_\omega = \sigma$ sur $\bar{\omega} - \bar{\omega}$

et $\sigma_\omega = 0$ dans $C(\bar\omega - \bar\omega)$. Alors $(N + c\varepsilon) * \mu'_\omega = \sigma_\omega * \mu'_\omega + \mu'_\omega$ sur $\bar\omega$. Posons $u = (N * f + cf - a_\omega)|_\omega$. On définit l'opérateur T: $M(\omega) \to M(\omega)$ par $T_\sigma \mu = \sigma_\omega * \mu|_\omega$, où $M(\omega) = \{\mu \in M(X); |\mu|(C\omega) = 0\}$. Alors, pour $n \geqq 1$ quelconque,

$$\mu'_\omega - (T_\sigma)^{n+1}\mu'_\omega = u\xi + \sum_{k=1}^{n} (-T_\sigma)^k (u\xi)\,, \tag{3.17}$$

où $T^1_\sigma = T_\sigma$ et $(T_\sigma)^k = (T_\sigma)^{k-1} \cdot T_\sigma$ $(k \geqq 2)$. Comme, pour $\mu \in M(\omega)$,

$$|(T_\sigma)^n \mu| \leqq (|\sigma_\omega|)^n * |\mu| \quad (n = 1, 2, \cdots)\,,$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-T_\sigma)^k (u\xi)$ converge vaguement et sa limite est absolument continue par rapport à ξ. Donc μ'_ω est absolument continue par rapport à ξ. Posons $\mu'_\omega = f'_\omega \xi$; alors

$$(N + c\varepsilon) * f'_\omega + a_\omega \leqq (N + c\varepsilon) * f \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } X$$

et

$$(N + c\varepsilon) * f'_\omega + a_\omega = (N + c\varepsilon) * f \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \omega\,.$$

Comme $N * (f - f'_\omega) * (\check f - \check f'_\omega)(0) \geqq 0$, on a $f'_\omega \in L^2(\xi)$.

Soit $\omega \neq \phi$ un ouvert relativement compact dans X quelconque. Alors μ'_ω est aussi absolument continue par rapport à ξ et sa densité est dans $L^2(\xi)$, car, pour un ouvert $\omega' \neq \phi$ vérifiant $\omega' \subset \omega$ et $|\sigma|(\bar\omega' - \bar\omega') < 1$ quelconque, $\mu'_{\omega'} \geqq \mu'_\omega$ dans ω' et $\mu'_\omega(\partial\omega) = 0$.

Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille filtrante d'ouverts relativement compact dans X vérifiant $\bigcap_{i \in I} \omega_i = K$ et $\bar\omega_i \subset \omega_j$ $(i \gneqq j)$. Soit $(f'_i\xi, a_i) \in \underline{SB}_{N+c\varepsilon}(f\xi, \omega_i)$. Alors, pour $i \geqq j \in I$ quelconques,

$$\begin{aligned}
\int |f'_i - f'_j|^2 d\xi &\leqq \frac{1}{c}(N + c\varepsilon) * (f'_i - f'_j) * (\check f'_i - \check f'_j)(0) \\
&= \frac{1}{c}((N + c\varepsilon) * f'_i + a_i - (N + c\varepsilon) * f'_j - a_j) * (\check f'_i - \check f'_j)(0) \\
&= -\frac{1}{c}((N + c\varepsilon) * f'_i + a_i - (N + c\varepsilon) * f'_j - a_j) * \check f'_j(0) \\
&= -\frac{1}{c}\int (u_{f'_i} - u_{f'_j}) f'_j d\xi - \frac{1}{c}(a_i - a_j)\int f'_j d\xi \\
&\leqq \frac{1}{c}\Big(\int |u_{f'_i} - u_{f'_j}|^2 d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int |f'_j|^2 d\xi\Big)^{1/2} + \frac{1}{c}|a_i - a_j|\int f'_j d\xi \\
&\leqq \frac{1}{c}\Big(c + \int_{F-F} d|N|\Big)\Big(\int |f'_i - f'_j|^2 d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int |f'_j|^2 d\xi\Big)^{1/2} + \frac{1}{c}|a_i - a_j|\int f'_j d\xi.
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

Comme l'on a, avec la fonction caractéristique χ_K de X,

$$\begin{aligned}\int_K (N+c\varepsilon)*fd\xi &= \int_K (N+c\varepsilon)*f'_i d\xi + a_i\int_K d\xi \\ &= \int (\check{N}+c\varepsilon)*\chi_K f'_i d\xi + a_i\int_K d\xi\end{aligned}$$

et $\check{N}*\chi_K$ est localement bornée, $(a_i)_{i\in I}$ est bornée et donc $(f'_i)_{i\in I}$ est bornée dans $L^2(\xi)$. Alors on peut supposer que $(f'_i)_{i\in I}$ converge faiblement dans $L^2(\xi)$. Désignons par f' sa limite faible. Alors on voit que $(a_i)_{i\in I}$ converge. Posons $a=\lim_{i\in I} a_i$. Alors on a $\mathrm{supp}(f'\xi)\subset K$, $\int f'd\xi=1$, $N*f'+cf'+a \leqq (N+c\varepsilon)*f$ sur X et $N*f'+cf'+a=(N+c\varepsilon)*f$ sur K. Cela montre que $f'=f_{c,K}$ et $a=a_{f,c,K}$. Soient K_1 et K_2 deux compacts dans X vérifiant $\xi(K_1)>0$ et $K_1\subset K_2$ et soit $(\omega_{k,i})_{i\in I}$ $(k=1,2)$ une famille filtrante d'ouverts relativement compacts dans X vérifiant $\bigcap_{i\in I}\omega_{k,i}=K_k$ et $\bar{\omega}_{k,i}\subset\omega_{k,i}$ $(i\gneqq j)$. Prenons $(f'_{k,i}, a_{k,i})\in \underline{SB}_{N+c\varepsilon}(f\xi,\omega_{k,i})$ $(k=1,2; i\in I)$. On a alors $f'_{k,i}\to f_{c,K_k}$ faiblement dans $L^2(\xi)$ et $a_{k,i}\to a_{f,c,K}$ lorsque $\omega_{k,i}\downarrow K_k$ $(k=1,2)$. Comme l'on peut supposer $\omega_{1,i}\subset\omega_{2,i}$, on a $(N+c\varepsilon)*f'_{1,i}+a_{1,i}\leqq(N+c\varepsilon)*f'_{2,i}+a_{2,i}$ ξ-$p.p.$, et donc

$$(N+c\varepsilon)*f_{c,K_1}+a_{f,c,K_1}\leqq(N+c\varepsilon)*f_{c,K_2}+a_{f,c,K_2}\ \xi\text{-}p.p..$$

Le lemme 26 est ainsi démontré.

Corollaire 27. *Soit $N\in(PSM)$. Alors, pour $0\leqq f$, $0\leqq g\in L^2(\xi)$ à support compact et à $\int fd\xi=\int gd\xi>0$ et pour $0<c$, $a\in R$, $(N+c\varepsilon)*f+a\leqq N*g$ ξ-p.p. sur $\{x\in X;\ f(x)>0\}$ implique que la même inégalité a lieu ξ-p.p. sur X.*

Preuve. Soit $(K_n)_{n=1}^\infty$ une suite croissante de compacts dans X telle que $\xi(K_1)>0$ et $\xi(K_n)\uparrow\xi(\{x\in X;\ f(x)>0\})$. Soit $0\leqq h\in L^2(\xi)$ à support compact. D'après $\check{N}\in(PSM)$, la proposition 10 et le lemme 26, il existe $h'_n\in L^2(\xi)$ et $b_n\in R$ telles que $\int h'_n d\xi=\int hd\xi$, $\mathrm{supp}(h'_n\xi)\subset K_n$, $(\check{N}+c\varepsilon)*h'_n+b_n\leqq(\check{N}+c\varepsilon)*h$ ξ-$p.p.$ sur X et $(\check{N}+c\varepsilon)*h'_n+b_n=(\check{N}+c\varepsilon)*h$ ξ-$p.p.$ sur K_n. De la même manière que dans la deuxième partie du lemme 26, on a, pour tous $n\geqq m\geqq 1$,

$$\int|h'_n-h'_m|^2d\xi\leqq\frac{1}{c}\int((\check{N}+c\varepsilon)*h'_n+b_n-(\check{N}+c\varepsilon)*h'_m-b_m)h'_nd\xi$$

et $(b_n)_{n=1}^\infty$ et $(h'_n)_{n=1}^\infty$ sont bornées dans R et dans $L^2(\xi)$. D'après le lemme

26, $(h'_n)_{n=1}^\infty$ converge fortement dans $L^2(\xi)$, et donc $(b_n)_{n=1}^\infty$ converge. Posons $h' = \lim_{n\to\infty} h'_n$ (fortement) dans $L^2(\xi)$ et $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Alors $\int h'd\xi = \int hd\xi$, $h' = 0$ ξ-$p.p.$ sur $C\{x \in X;\ f(x) > 0\}$, $(\check{N} + c\varepsilon) * h' + b \leqq (\check{N} + c\varepsilon) * h$ ξ-$p.p.$ sur X et $(\check{N} + c\varepsilon) * h' + b = (\check{N} + c\varepsilon) * h$ ξ-$p.p.$ sur $\{x \in X;\ f(x) > 0\}$. Soit ω un ouvert relativement compact dans X vérifiant $\omega \supset \operatorname{supp}(f\xi) - \operatorname{supp}(g\xi)$ et soit $(\varepsilon'', a'') \in SB_{N+c\varepsilon, N}(\varepsilon;\ \omega)$. Alors $N * g = (N + c\varepsilon) * \varepsilon'' * g + a'' \int gd\xi$ ξ-$p.p.$ dans un certain voisinage de $\operatorname{supp}(f\xi)$ et $N * g \geqq (N + c\varepsilon) * \varepsilon'' * g + a'' \int gd\xi$ ξ-$p.p.$ sur X. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int N * ghd\xi &\geqq \int \left((N + c\varepsilon) * \varepsilon'' * g + a'' \int gd\xi\right) hd\xi \\
&= \int (\check{N} + c\varepsilon) * h(\varepsilon'' * g)d\xi + a'' \int gd\xi \int hd\xi \\
&\geqq \int ((\check{N} + c\varepsilon) * h' + b)(\varepsilon'' * g)a\xi + a'' \int gd\xi \int hd\xi \\
&= \int (N + c\varepsilon) * (\varepsilon'' * g)h'd\xi + b \int gd\xi + a'' \int gd\xi \int h'd\xi \\
&\geqq \int ((N + c\varepsilon) * f + a)h'd\xi + b \int fd\xi \\
&= \int ((\check{N} + c\varepsilon) * h' + b)fd\xi + a \int h'd\xi \\
&= \int (\check{N} + c\varepsilon) * hfd\xi + a \int hd\xi \\
&= \int ((N + c\varepsilon) * f + a)hd\xi\,.
\end{aligned}$$

Comme h est quelconque, on voit que $N * g \geqq (N + c\varepsilon) * f + a$ ξ-$p.p.$ sur X, d'où le corollaire 27.

LEMME 28. *Soit $N \in (PSM)$. Alors pour que N soit pseudo-invariant, il faut et il suffit que N satisfasse à* (1) *ou bien à* (2).

(1) *Il existe une fonction additive et continue φ sur X telle que le sous-groupe formé par les périodes de $N + \varphi\xi$ soit non-compact.*

(2) *Pour toute la fonction additive et continue φ sur X, le sous-groupe formé par les périodes de $N + \varphi\xi$ est compact et N est la forme*

$$N = a_0\xi_\Gamma + \eta_{N,\delta}$$

où Γ est un sous-groupe compact de X et où a_0 est une constante > 0 vérifiant $a\xi_\Gamma + \eta_{N,\delta} \notin (PSM)$ pour tout $a_0 > a \in R$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons que N ne vérifie pas (1). Soit Γ le sous-groupe formé par les périodes de N. Alors Γ est compact. En discutant notre énoncé sur X/Γ au lieu de X, on peut supposer que $\Gamma = \{0\}$. On montrera d'abord que $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Supposons que $\eta_{N,\delta} = -\infty$. Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une exhaustion d'ouvert de X. Pour $0 < p \in R$, $V_{p,\omega_n}\varepsilon$ et N_p sont mêmes que dans les propositions 7 et 11. D'après la proposition 12, on a $p\int dN_p = 1$, et donc, pour $f \in C_b(X)$ quelconque, $\lim_{n\to\infty}\int f dV_{p,\omega_n}\varepsilon = \int f dN_p$. Cela et (2.2) montrent que, pour $f \in C_K^{\circ}(X)$ quelconque,

$$p(N * f) * N_p + N_p * f = N * f .$$

Comme il existe deux familles filtrantes $(\mu_i)_{i\in I} \subset M_K^+(X)$ et $(a_i)_{i\in I} \subset R$ telles que $\int d\mu_i = 1$, $\lim_{i\in I}\mu_i = 0$ et $N = \lim_{i\in I}(N * \mu_i + a_i\xi)$, on a

$$(N * f) * (pN_p) = N * f .$$

En utilisant la méthode au début de la preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) dans le théorème 1, on voit qu'il existe une fonction additive et continue φ sur X vérifiant $(N + \varphi\xi) * \varepsilon_x = N + \varphi\xi$ pour tout $x \in \operatorname{supp}(N_p)$. Donc le sous-groupe fermé Γ' engendré par $\operatorname{supp}(N_p)$ est compact. Comme $\varphi = 0$ sur Γ', $N * \varepsilon_x = N$ pour tout $x \in \Gamma'$, et donc $pN_p = \varepsilon$. Comme $(pV_{p,\omega_n}\varepsilon,\ a_{0,p,\omega_n} - a_{0,p,\omega_{n+1}}) \in \underline{SB}_{N+(1/p)\varepsilon}(pV_{p,\omega_{n+1}}\varepsilon,\ \omega_n)$, où, a_{0,p,ω_n} est même que dans la proposition 11, on a $V_{p,\omega_n}\varepsilon \geqq V_{p,\omega_{n+1}}\varepsilon$ dans ω_n, et donc $V_{p,\omega_n}\varepsilon \geqq N_p$ dans ω_n. Par conséquent, $pV_{p,\omega_n}\varepsilon = \varepsilon$ dès que $\omega_n \ni 0$. Comme $(N + (1/p)\varepsilon) * (pV_{p,\omega_n}\varepsilon) + a_{0,p,\omega_n}\xi = N$ dans ω_n, on a $N + (1/p)\varepsilon + a_{0,p,\omega_n}\xi = N$ dans ω_n dès que $\omega_n \ni 0$, d'où une contradiction. On voit ainsi que $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Posons $N' = \eta_{N,\delta}$ et $N_0 = N - N'$. Comme $\Gamma = \{0\}$, $N_0 = 0$ ou bien N_0 est un noyau de convolution de Hunt dont le semi-groupe de convolution est sous-markovien (voir (1) $\Rightarrow$ (2) dans le théorème 1). On peut supposer que $N_0 \neq 0$. D'après (1) $\Rightarrow$ (2) dans le théorème 1, $N' = N'' + \varphi\xi$, où $N'' \in M(X)$ vérifiant $N'' = N'' * \varepsilon_x$ pour tout $x \in \operatorname{supp}(N_0)$ et où φ est une fonction additive et continue sur X. Soient $(\mu_i)_{i\in I} \subset M_K^+(X)$ et $(a_i)_{i\in I} \subset R$ les mêmes que ci-dessus. Posons $b_i = a_i - \int \varphi d\mu_i$; alors $\lim_{i\in I}((N_0 + N'') * \mu_i + b_i\xi) = N_0 + N'$. Comme $\int d\mu_i = 1$ et, pour toute $f \in C_K^+(X)$, $N_0 * f \leqq \sup_{x\in\operatorname{supp}(f)} N_0 * f(x)$, $(N_0 * \mu_i)_{i\in I}$ est vaguement bornée, et donc on peut supposer que $\lim_{i\in I} N_0 * \mu_i$ existe. Posons $\eta = \lim_{i\in I} N_0 * \mu_i$ et soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante vérifiant $\lim_{p\to 0} N_p =$

N_0. Comme, pour toute $f \in C_K^+(X)$, $(N_0 * \mu_i * f)_{i \in I}$ est uniformément bornée et $p\int dN_p \leqq 1$, on a, pour $p > 0$ quelconque,

$$\eta * (pN_p) = \lim_{i \in I} N_0 * \mu_i * (pN_p) = \lim_{i \in I} (N_0 * \mu_i - N_p * \mu_i) = \eta\,.$$

Comme, pour toute $f \in C_K^+(X)$, $\eta * f$ est bornée, le lemme 18 montre $\eta = \eta * \varepsilon_x$ pour tout $x \in \operatorname{supp}(N_p)$. Comme $\operatorname{supp}(N_p) = \operatorname{supp}(N_0)$ et

$$\eta + \lim_{i \in I} (N'' * \mu_i + b_i \xi) = N_0 + N', \quad N_0 = N_0 * \varepsilon_x$$

pour tout $x \in \operatorname{supp}(N_0)$, d'où $N_0 = a_0 \varepsilon$, où $0 < a_0 \in R$. Montrons finalement que, pour $a_0 > a \in R$ quelconque, $a\xi_\Gamma + N' \notin (PSM)$. Supposons que, pour $a < a_0$, $a\xi_\Gamma + N' \in (PSM)$. Comme $\lim_{i \in I}((a\xi_\Gamma + N') * \mu_i + a_i \xi) = N$, $(a\xi_\Gamma + N', N) \in (PTMS)$, qui est en contradiction avec $a\xi_\Gamma + N' \in (PSB)$. Ainsi on obtient que la condition est nécessaire.

Montrons que la condition est suffisante. Si N vérifie (1), alors il existe une famille filtrante $(x_i)_{i \in I} \subset X$ telle que $\lim_{i \in I} x_i = \delta$ et $N + \varphi\xi = (N + \varphi\xi) * \varepsilon_{x_i}$, et donc $N = N * \varepsilon_{x_i} - \varphi(x_i)\xi$. Cela montre que N est pseudo-invariant et $\eta_{N,\delta} = N$. Supposons que N vérifie (2). On peut supposer que $\Gamma = \{0\}$. Si $a_0 = 0$, alors $N = \eta_{N,\delta}$, et donc N est pseudo-invariant. Supposons que $a_0 > 0$. Dans (iii) de la preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) dans le théorème 1, on a montré qu'il existe trois familles $(x_i)_{i \in I} \subset X$, $(a_i^{(1)})_{i \in I} \subset R$ et $(a_i^{(2)})_{i \in I} \subset R$ et $a \geqq 0$ vérifiant $\lim_{i \in I}(\eta_{N,\delta} * \varepsilon_{x_i} + a_i^{(1)}\xi) = \eta_{N,\delta}$ et $\lim_{i \in I}(\eta_{N,\delta} * \varepsilon_{-x_i} + a_i^{(2)}\xi) = a\xi_\Gamma + \eta_{N,\delta}$ et $a\xi_\Gamma + \eta_{N,\delta} \in (PSM)$. Comme $(N, a\xi_\Gamma + \eta_{N,\delta}) \in (PTMS)$, on a $a_0 \geqq a$, et donc $a_0 = a$. Cela montre que N est pseudo-invariant On obtient ainsi que la condition est suffisante.

Montrons (2) $\Rightarrow$ (1) dans le théorème 1.

(i) Supposons d'abord que $\operatorname{supp}(N_0)$ est non-compact et $a \leqq 0$. On voit facilement que $N' \in (PSM)$ implique $N' - a\xi_\Gamma \in (PSM)$, et donc on peut supposer que $a = 0$. Il suffit encore de montrer $N \in (PSM)$ dans le cas où $\varphi = 0$, car, pour $f \in C_K^\circ(X)$ quelconque, $(\varphi\xi) * f$ est une constante. D'après la proposition 2, il suffit de montrer que, pour $0 < c \in R$ quelconque, $N + c\varepsilon \in (PSM)$. Montrons d'abord que $(N + c\varepsilon, N') \in (PTMS)$. Pour cela, il suffit de montrer que $(N + c\varepsilon, N) \in (PRSB)$ (voir la proposition 1). Soit $f \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = 1$ et ω un ouvert relativement compact $\neq \phi$ dans X. Posons $K = \bar{\omega}$. Pour $g \in C_K(X)$ quelconque, on a $N_0 * g * \check{g}(0) \geqq 0$, car, pour la résolvante $(N_p)_{p>0}$ vérifiant $\lim_{p \to 0} N_p = N_0$ et $0 < p < q$,

$$\left(N_p + \frac{1}{q-p}\varepsilon\right) * g * \check{g}(0)$$
$$= \frac{1}{q-p}\left(\left(N_p + \frac{1}{q-p}\varepsilon\right) * g\right) * \left(\left(\check{N}_p + \frac{1}{q-p}\varepsilon\right) * \check{g}\right) * (\varepsilon - (q-p)\check{N}_q)(0)$$

et $(q-p)\int d\check{N}_q < 1$. Donc, d'après la proposition 10 et le lemme 26, on voit que, pour toute $\mu \in M_K^+(X)$ à $\int d\mu = 1$, il existe $f'_\mu \in L^2(\xi)$ et $a_\mu \in R$ tels que $\int f'_\mu d\xi = 1$, $\operatorname{supp}(f'_\mu \xi) \subset K$,

$$(N + c\varepsilon) * f'_\mu + a_\mu \geqq (N + c\varepsilon) * f * \mu \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } K$$

et

$$(N + c\varepsilon) * f'_\mu + a_\mu = (N + c\varepsilon) * f * \mu \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x \in K;\ f'_\mu(x) > 0\}.$$

On note $f'_x = f'_{\varepsilon_x}$ et $a_x = a_{\varepsilon_x}$ $(x \in X)$. Comme $\lim_{t\to\infty} N_0 * \alpha_t = 0$, où $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est le semi-groupe de convolution de N_0, on voit qu'il existe une famille filtrante $(x_i)_{i \in I} \subset \Gamma$ vérifiant $\lim_{i \in I} x_i = \delta$ et $\lim_{i \in I} N_0 * \varepsilon_{x_i} = 0$. Alors $((N + c\varepsilon) * f * \varepsilon_{x_i})_{i \in I}$ converge uniformément vers $N' * f$ sur tout compact lorsque $x_i \to \delta$. Comme, pour $i, j \in I$,

$$\int |f'_{x_i} - f'_{x_j}|^2 d\xi \leqq \frac{1}{c}(N + c\varepsilon) * (f'_{x_i} - f'_{x_j}) * (\check{f}'_{x_i} - \check{f}'_{x_j})(0)$$
$$= \frac{1}{c}((N + c\varepsilon) * f'_{x_i} + a_{x_i} - (N + c\varepsilon) * f'_{x_j} - a_{x_j}) * (\check{f}'_{x_i} - \check{f}'_{x_j})(0)$$
$$\leqq \frac{1}{c}((N + c\varepsilon) * f * \varepsilon_{x_i} - (N + c\varepsilon) * f * \varepsilon_{x_j}) * (\check{f}'_{x_i} - \check{f}'_{x_j})(0),$$

on a

$$\int |f'_{x_i} - f'_{x_j}|^2 d\xi \leqq \frac{1}{c^2}\int_K |(N + c\varepsilon) * f * \varepsilon_{x_i} - (N + c\varepsilon) * f * \varepsilon_{x_j}|^2 d\xi,$$

et donc $(f'_{x_i})_{i \in I}$ converge fortement dans $L^2(\xi)$. Comme

$$(N + c\varepsilon) * f'_{x_i} * \check{f}'_{x_i}(0) + a_i = (N + c\varepsilon) * f * \check{f}'_{x_i}(0),$$

on voit que $(a_i)_{i \in I}$ converge aussi dans R. Posons $f'_\omega = \lim_{i \in I} f'_{x_i}$ dans $L^2(\xi)$ et $a_\omega = \lim_{i \in I} a_{x_i}$. Alors on a $\int f'_\omega d\xi = 1$, $\operatorname{supp}(f'_\omega \xi) \subset K$,

$$(N + c\varepsilon) * f'_\omega + a_\omega \geqq N' * f \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } K \tag{3.18}$$

et

$$(3.19)\qquad \begin{aligned}(N+c\varepsilon)*f'_\omega*\check{f}'_\omega(0) &= \lim_{i\in I}(N+c\varepsilon)*f'_{x_i}*\check{f}'_{x_i}(0)\\ &= \lim_{i\in I}((N+c\varepsilon)*f*\varepsilon_{x_i}-a_i)*\check{f}'_{x_i}(0) = (N'*f-a_\omega)*\check{f}'_\omega(0)\,,\end{aligned}$$

d'où

$$(3.20)\qquad (N+c\varepsilon)*f'_\omega + a_\omega = N'*f \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x\in X; f'_\omega(x)>0\}\,.$$

Donc

$$(N'+c\varepsilon)*f'_\omega + a_\omega \leqq N'*f \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x\in\bar{\omega}; f'_\omega(x)>0\}\,.$$

D'après le corollaire 27, on a

$$(3.21)\qquad (N'+c\varepsilon)*f'_\omega + a_\omega \leqq N'*f \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } X\,,$$

d'où $N'*f'_\omega + a_\omega \leqq N'*f$ ξ-$p.p.$ sur X. Posons $u = N'*f - N'*f'_\omega - a_\omega$. Alors $u \geqq pN_p*u$ ξ-$p.p.$ sur X pour tout $p>0$ et $cf'_\omega + N_0*f'_\omega \leqq u$ ξ-$p.p.$ sur $\{x\in X; f'_\omega(x)>0\}$. En utilisant le principe de domination pour $c\varepsilon + N_0$, on a $cf'_\omega + N_0*f'_\omega \leqq u$ ξ-$p.p.$ sur X. On a ainsi $cf'_\omega + N*f'_\omega + a_\omega = N'*f$ ξ-$p.p.$ sur K et $cf'_\omega + N*f'_\omega + a_\omega \leqq N'*f$ ξ-$p.p.$ sur X. Ceux donnent $(N+c\varepsilon, N')\in(PRSB)$, d'où $(N+c\varepsilon, N')\in(PTMS)$. Supposons que, pour $f,\ g\in C_K^+(X)$ à $\int fd\xi = \int gd\xi$ et $b\in R$, $(N+c\varepsilon)*f \leqq (N+c\varepsilon)*g + b$ sur $\operatorname{supp}(f)$. D'après $(N+c\varepsilon, N')\in(PTMS)$, $N'*f \leqq N'*g + b$ sur X. Posons $v = N'*g + b - N'*f$; alors $v \geqq pN_p*v$ sur X pour tout p, et donc le principe de domination pour $N_0 + c\varepsilon$ donne $(N_0+c\varepsilon)*f \leqq (N_0+c\varepsilon)*g + v$ sur X, d'où $(N+c\varepsilon)*f \leqq (N+c\varepsilon)*g + b$ sur X. Ainsi $N+c\varepsilon\in(PSM)$, d'où $N\in(PSM)$.

(ii) Supposons ensuite que $a>0$. Alors $\operatorname{supp}(N_0)$ est non-compact et le semi-groupe de convolution de N_0 est markovien. De la même façons que dans (i), on peut supposer que $\varphi = 0$. D'après $\underline{\lim}_{x\to\infty}(N_0 + \check{N}_0 - a\xi_\Gamma)*f(x) \geqq 0$ pour toute $f\in C_K^+(X)$, on voit que Γ est le sous-groupe fermé engendré par $\operatorname{supp}(N_0)$. Soient $(N_p)_{p>0}$ la résolvante vérifiant $\lim_{p\to 0} N_p = N_0$ et $a(N_0)$ la constante obtenue dans le lemme 24. Alors $a(N_0)\geqq a$. Comme l'ensemble des noyaux de convolution réels vérifiant (PSM) est vaguement fermé, on peut supposer que $a(N_0) > a$. Posons $a'_0 = a(N_0) - a$. Soient $f\in C_K^+(X)$ à $\int fd\xi = 1$, $0<c\in R$ et $\omega\neq\phi$ un ouvert relativement compact dans X. D'après $\lim_{p\to 0} N_0*(pN_p) = 0$ et $\lim_{p\to 0} N_0*(p\check{N}_p) = a(N_0)\xi_\Gamma$, on peut choisir $(\lambda_p)_{p>0}\subset M_K^+(X)$ vérifiant

$$\int d\lambda_p = 1, \ \mathrm{supp}\,(\lambda_p) \subset \Gamma \ \text{ et } \lim_{p\to 0} N_0 * \lambda_p = a\xi_\Gamma\,.$$

D'après notre condition et le lemme 26, il existe $f'_p \in L^2(\xi)$ et $a_p \in R$ telles que $\mathrm{supp}\,(f'_p\xi) \subset \bar{\omega}$, $\int f'_p d\xi = 1$,

$$N * f'_p + cf'_p + a_p \geqq N * \lambda_p * f \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \bar{\omega}$$

et

$$N * f'_p + cf'_p + a_p = N * \lambda_p * f \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x \in \bar{\omega};\ f'_p(x) > 0\}\,.$$

Comme $N * \lambda_p * f$ converge uniformément vers $N' * f + a\xi_\Gamma * f$ sur tout compact lorsque $p \to 0$, on voit, de la méme manière que dans (i), qu'il existe $f' \in L^2(\xi)$ et $a' \in R$ telles que $\mathrm{supp}\,(f'\xi) \subset \bar{\omega}$, $\int f'd\xi = 1$,

$$N * f' + cf' + a' \geqq N' * f + a\xi_\Gamma * f \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \bar{\omega} \tag{3.22}$$

et

$$N * f' + cf' + a' = N' * f + a\xi_\Gamma * f \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x \in \bar{\omega};\ f'(x) > 0\}\,. \tag{3.23}$$

Comme $N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \geqq 0$ ξ-$p.p.$ sur $\{x \in \bar{\omega}; f'(x) > 0\}$, on a $N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \geqq 0$ ξ-$p.p.$ sur $\Gamma + \{x \in \bar{\omega}; f'(x) > 0\}$. Posons $u(x) = \sup\{N' * f(x) - N' * f'(x) + a\xi_\Gamma * f'(x) - a',\ 0\}$; alors, pour $y \in \Gamma$ quelconque, $u(x) = u(x + y)$ ξ-$p.p.$ sur X, et donc $u = pN_p * u$ ξ-$p.p.$ sur X. Comme $(N_0 + c\varepsilon) * f' \leqq u$ ξ-$p.p.$ sur $\{x \in \bar{\omega};\ f'(x) > 0\}$, le principe de domination pour $N_0 + c\varepsilon$ donne $(N_0 + c\varepsilon) * f' \leqq u$ ξ-$p.p.$ sur X, d'où

$$\begin{aligned} (N_0 + c\varepsilon) * f' \leqq N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \ \ &\xi\text{-}p.p. \\ \text{sur } \Gamma + \{x \in \bar{\omega};\ f'(x) > 0\}&\,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Donc, pour $p > 0$ quelconque,

$$\begin{aligned} (N_0 + c\varepsilon) * (p\check{N}_p) * f' \leqq N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \ \ &\xi\text{-}p.p. \\ \text{sur } \Gamma + \{x \in \bar{\omega};\ f'(x) > 0\}&\,. \end{aligned}$$

En faisant $p \to 0$, on arrive à

$$\begin{aligned} a(N_0)\xi_\Gamma * f' \leqq N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \ \ &\xi\text{-}p.p. \\ \text{sur } \Gamma + \{x \in \bar{\omega};\ f'(x) > 0\}&\,, \end{aligned}$$

d'où

$$(N' + a'_0\xi_\Gamma) * f' \leqq N' * f - a' \ \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \Gamma + \{x \in \bar{\omega};\ f'(x) > 0\}\,.$$

Soit F un compact dans X vérifiant $a'_0\int d\xi_\Gamma|_F = 1$; alors $N' = N' * (a'_0\xi_\Gamma|_F)$, et donc, d'après le corollaire 27,

$$(N' + \varepsilon) * (a'_0\xi_\Gamma|_F * f') \leqq N' * f - a' \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } X.$$

Ainsi $N' * f' + a' \leqq N' * f$ ξ-$p.p.$ sur X. D'après le principe de domination pour $N_0 + c\varepsilon$ et (3.24), on voit que

$$N * f' + cf' + a' \leqq N' * f \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } X. \tag{3.25}$$

Cela donne $(N + c\varepsilon, N') \in (PRSB)$, et donc $(N + c\varepsilon, N') \in (PTMS)$. Comme $N' \in (PSM)$ et $N' - a\xi_\Gamma \in S(N')$, on a $(N', N' - a\xi_\Gamma) \in (PTMS)$, d'où $(N + c\varepsilon, N' - a\xi_\Gamma) \in (PTMS)$. Le reste de la preuve est la même que dans (i).

(iii) Supposons que Γ est compact. On peut supposer que $\varphi = 0$ et ξ_Γ est normalisée. On montrera que $N \in (PSM)$. Comme N' est pseudo-invariant, il existe deux familles filtrantes $(\mu_i)_{i\in I} \subset M^+(X)$ et $(a_i)_{i\in I} \subset R$ telles que $\int d\mu_i = 1$, $\lim_{i\in I}\mu_i = 0$ et $\lim_{i\in I}(N' * \mu_i + a_i\xi) = N'$. On a encore $\lim_{i\in I}(N * \mu_i + a_i\xi) = N'$. Soient $f \in C_K^+(X)$ à $\int fd\xi = 1$, $0 < c \in R$ et $\omega \neq \phi$ un ouvert relativement compact dans X. De la même manière que dans (ii), il existe $f' \in L^2(\xi)$ et $a' \in R$ telles que $\int f'd\xi = 1$, $\operatorname{supp}(f'\xi) \subset \bar{\omega}$,

$$(N + c\varepsilon) * f' + a' \geqq N' * f \ \xi\text{-}p.p, \text{ sur } \bar{\omega} \tag{3.26}$$

et

$$(N + c\varepsilon) * f' + a' = N' * f \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x \in X;\ f'(x) > 0\}. \tag{3.27}$$

Posons $u = \sup(N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a', 0)$; alors $u = N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a'$ ξ-$p.p.$ sur $\Gamma + \{x \in \bar{\omega};\ f'(x) > 0\}$ et, pour $0 < p \in R$, $u \geqq \left(p\int dN_p\right)u = u * (pN_p)$, où $(N_p)_{p>0}$ est la résolvante vérifiant $\lim_{p\to 0} N_p = N_0$. D'après le principe de domination pour $N_0 + c\varepsilon$, on a $(N_0 + c\varepsilon) * f' \leqq u$ ξ-$p.p.$ sur X, d'où

$$(N_0 + c\varepsilon) * f' \leqq N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \ \xi\text{-}p.p.$$
$$\text{sur } \Gamma + \{x \in X;\ f'(x) > 0\}.$$

Ainsi on obtient

$$\left(\int d(N_0 + c\varepsilon)\right)\xi_\Gamma * f' \leqq N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \ \xi\text{-}p.p.$$
$$\text{sur } \Gamma + \{x \in X;\ f'(x) > 0\}$$

d'où

$$(N' + c\varepsilon) * (f' * \xi_\Gamma) \leqq N' * f - a' \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } \{x \in X;\ f' * \xi_\Gamma(x) > 0\}.$$

D'après le corollaire 27, on voit que la même inégalité a lieu ξ-$p.p.$ sur X. Ainsi on a $N' * f - N' * f' + a\xi_\Gamma * f' - a' \geqq 0$ ξ-$p.p.$ sur X. En utilisant encore le principe de domination pour $N_0 + c\varepsilon$, on voit que

$$(N + c\varepsilon) * f' + a' \leqq N' * f \ \xi\text{-}p.p. \text{ sur } X.$$

Cela donne $(N + c\varepsilon, N') \in (PRSB)$, d'où $(N + c\varepsilon, N') \in (PTMS)$. Supposons que, pour $f, g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $b \in R$, $(N + c\varepsilon) * f \leqq (N + c\varepsilon) * g + b$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Alors $N' * f \leqq N' * g + b$ sur X. Comme $N' - a\xi_\Gamma \in S(N')$, on a $(N' - a\xi_\Gamma) * f \leqq (N' - a\xi_\Gamma) * g + b$ sur X. En utilisant encore le principe de domination pour N_0, on voit que $(N + c\varepsilon) * f \leqq (N + c\varepsilon) * g + b$ sur X, d'où $N + c\varepsilon \in (PSM)$. Come c est quelconque, on arrive à $N \in (PSM)$ (voir la proposition 1).

Ainsi on montre (2) $\Rightarrow$ (1) dans le théorème 1.

Montrons la partie finale du théorème 1. Supposons que Γ est non-compact. Si $\int dN_0 < \infty$, alors on peut supposer que $a = 0$ et, pour une famille filtrante $(\mu_i)_{i \in I} \subset M_K^+(X)$ vérifiant $\int d\mu_i = 1$ quelconque, $\lim_{i \in I} N_0 * \mu_i = 0$ dès que $\lim_{i \in I} \mu_i = 0$. Donc $\eta_{N,\delta} = N' + \varphi\xi$. Supposons que $\int dN_0 = \infty$. On peut supposer que $\varphi = 0$, car $\eta_{(N+\varphi\xi),\delta} = \eta_{N,\delta} + \varphi\xi$. Soient $(K_n)_{n=1}^\infty$ une exhaustion de compacts de X et ε_n' une mesure N_0-balayée de ε sur CK_n; c'est-à-dire, $\varepsilon_n' \in M^+(X)$, $\mathrm{supp}(\varepsilon_n') \subset \overline{CK_n}$, $N_0 * \varepsilon_n' \leqq N_0$ dans X et $N_0 * \varepsilon_n' = N_0$ dans CK_n. Comme $\int dN_0 = \infty$ et $\mathrm{supp}(N_0) \ni 0$, $\int d\varepsilon_n' = 1$ et $\mathrm{supp}(\varepsilon_n') \subset \mathrm{supp}(N_0)$. Comme $\lim_{n\to\infty} N_0 * \varepsilon_n' = 0$, on a $\eta_{N,\delta} = N' - a\xi_\Gamma$. Supposons que Γ est compact. D'après le lemme 28, on a $\eta_{N',\delta} \neq -\infty$. On peut supposer que $\int d\xi_\Gamma = 1$. Si, pour $0 \leqq b \in R$, $N' - b\xi_\Gamma \in S(N')$, alors $\eta_{N',\delta} \leqq N' - b\xi_\Gamma$, et donc $a_0 < \infty$. S'il existe une fonction additive et continue ψ sur X telle que toutes les périodes de $N' - \psi\xi$ forme un sous-groupe non-compact, alors on a $a_0 = 0$ et, de la même manière que dans le cas où Γ est non-compact, on voit que $\eta_{N,\delta} = N' + \varphi\xi$. Supposons que, pour une fonction additive et continue sur X quelconque, $\{x \in X;\ (N' - \psi\xi) = (N' - \psi\xi) * \varepsilon_x\}$ est compact. Soit Γ' le sous-groupe des périodes de N'; alors Γ' est compact et $\Gamma' \supset \Gamma$. Si $N' = \eta_{N',\delta}$, alors $a_0 = 0$. Si $N' \neq \eta_{N',\delta}$, le lemme 28 montre que $\Gamma = \Gamma'$ et $N' = a_0\xi_\Gamma + \eta_{N',\delta}$. Donc il suffit de montrer

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

que $\eta_{N,\delta} = \eta_{N',\delta}$. Comme N' est pseudo-invariant, on a $N' \in S(N)$, et donc $\eta_{N,\delta} \leqq \eta_{N',\delta}$. On peut supposer que $\int dN_0 = 1$ et $\varphi = 0$. Posons $b = 1 - a$ et $M = b\varepsilon + N'$. Alors $b \geqq 0$ et, pour deux compacts K_1 et K_2 dans X vérifiant $\Gamma \cap (\overline{CK_1} + \Gamma) = \phi$ et $\overline{CK_2} + \Gamma + \Gamma \subset \overline{CK_1}$, $\eta_{N,CK_2} * \xi_\Gamma \leqq \eta_{M,CK_1} * \xi_\Gamma$ et $\eta_{M,CK_2} * \xi_\Gamma \leqq \eta_{N,CK_1} * \xi_\Gamma$, car $M * \xi_\Gamma = N * \xi_\Gamma$ et, pour $x \in \Gamma$ quelconque, $N' = N' * \varepsilon_x$. Donc $\eta_{M,\delta} * \xi_\Gamma = \eta_{N,\delta} * \xi_\Gamma$. D'après la proposition 12, on a $\eta_{N',\delta} = \eta_{M,\delta}$, d'où $\eta_{N,\delta} = \eta_{N',\delta}$.

Ainsi on acheve la preuve du théorème 1. Dans (1.2), si $a \neq 0$, alors d'après $\lim_{x\to\delta} (N_0 + \check{N}_0 - a\xi_\Gamma) * f(x) \geqq 0$ pour toute $f \in C_K^+(X)$ et le lemme 24, Γ est le sous-groupe fermé engendré par $\mathrm{supp}\,(N_0)$.

§ 4. Les noyaux de convolution de type logarithmique

Dans [7], nous avons discuté les noyaux de convolution réels $N \in (PSM)$ vérifiant $\eta_{N,\delta} = -\infty$. Le premier but de ce paragraphe est de donner un résultat définitif concernant $N \in (PSM)$ vérifiant $\eta_{N,\delta} = -\infty$. C'est le théorème 2.

La proposition suivante est une solution affirmative du problème 41 dans [7].

PROPOSITION 29. *Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe de convolution semi-transient et récurrent sur X. Alors $\overline{\bigcup_{t\geqq 0} \mathrm{supp}\,(\alpha_t)} = X$. Si $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est markovien, alors X est engendré par un certain voisinage compact de l'origine.*

Preuve. Evidemment $X' = \overline{\bigcup_{t\geqq 0} \mathrm{supp}\,(\alpha_t)}$ est un semi-groupe fermé $\ni 0$ dans X. Supposons $X' \neq X$. Alors il existe $x_0 \in X$ tel que $(X' + \{x_0\}) \not\ni 0$. Soit V un voisinage ouvert de l'origine vérifiant $(X' + \{x_0\}) \cap V = \phi$ et soit $0 \neq f \in C_K^+(X)$ à $\mathrm{supp}\,(f) \subset V$. Alors, pour tout $t \geqq 0$, $\int f d\alpha_t * \varepsilon_{x_0} = 0$. Comme $\left(\int_0^t \int f d(\alpha_s - \alpha_s * \varepsilon_{x_0}) ds\right)_{t>0}$ est bornée, on a $\int_0^\infty \int f d\alpha_t dt < \infty$. Comme, pour tout $x \in X$, $\left(\int_0^t \int f d(\alpha_s - \alpha_s * \varepsilon_{-x}) ds\right)_{t>0}$ est bornée, on a $\int_0^\infty \int f * \varepsilon_x d\alpha_t dt < \infty$, et donc, pour toute $g \in C_K^+(X)$, $\int_0^\infty \int g d\alpha_t dt < \infty$, car on peut choisir une famille finie $(x_i)_{i=1}^m \subset X$ telle que $\mathrm{supp}\,(g) \subset \{x \in X;\ \sum_{i=1}^m f * \varepsilon_{x_i}(x) > 0\}$. Mais c'est en contradiction avec la récurrence de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Ainsi $X = \overline{\bigcup_{t\geqq 0} \mathrm{supp}\,(\alpha_t)}$. Supposons que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est markovien. Soit v un voisinage compact de l'origine et X_v le sous-groupe ouvert et fermé de X engendré par v. Posons $\alpha_{t,v} = \alpha_t|_{X_v}$; alors $(\alpha_{t,v})_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe de convolution sous-markovien. Evidemment $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est transient si et seulement si, pour tout le voisinage compact v de l'origine, $(\alpha_{t,v})_{t\geqq 0}$ est transient. Par conséquent, il existe un voisinage compact v_0 de l'origine tel que, pour tout $t \geqq 0$, $\int d\alpha_{t,v_0} = 1$, et donc $\alpha_t = \alpha_{t,v_0}$ pour tout $t \geqq 0$. Comme $X = \overline{\bigcup_{t\geqq 0} \operatorname{supp}(\alpha_t)}$, on a $X = X_{v_0}$. La proposition 29 est ainsi démontrè.

PROPOSITION 30. *Soit $N \in (PSM)$. Alors $\eta_{N,\delta} = -\infty$ et N est non-périodique si et seulement s'il existe un semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ markovien, récurrent et semi-transient tel que, pour $0 < t \in R$ et $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ quelconques,*

$$(N * \mu) * \alpha_t + \int_0^t \alpha_s * \mu ds = N * \mu . \tag{4.1}$$

Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est uniquement déterminé.

Preuve. Montrons d'abord l'unicité de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Soient $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(\alpha'_t)_{t\geqq 0}$ deux semi-groupes de convolution démandés. Pour $0 < p \in R$ quelconque, on pose $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ et $N'_p = \int_0^\infty \alpha'_t \exp(-pt)dt$. Comme $N_p = p\int_0^\infty \exp(-pt)dt \int_0^t \alpha_s ds$ et $N'_p = p\int_0^\infty \exp(-pt)dt \int_0^t \alpha'_s ds$, on a, d'après (4.1),

$$N * \mu = p(N * \mu) * N_p + N_p * \mu = p(N * \mu) * N'_p + N'_p * \mu$$

et donc

$$\begin{aligned} p(p(N * \mu) * N'_p + N'_p * \mu) * N_p + N_p * \mu \\ = p(p(N * \mu) * N_p + N_p * \mu) * N'_p + N'_p * \mu , \end{aligned}$$

d'où $N_p * \mu = N'_p * \mu$. Comme p et $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ sont quelconques et $\int dN_p < \infty$, l'injectivité de la transformation de Laplace donne $\alpha_t = \alpha'_t$ $(t \geqq 0)$, d'où l'unicité de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$.

Montrons la partie de "seulement si". Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante obtenue dans la proposition 11. D'après la proposition 12, $(N_p)_{p>0}$ n'est pas transient, et donc $p\int dN_p = 1$ $(p > 0)$. Soit $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ quelconque. Comme $N * \mu$ est bornée, c'est-à-dire, pour $f \in C_K(X)$ quelconque, $(N * \mu) * f$ est bornée sur X (voir la remarque 3 dans [7]), on a, pour tout $0 < p \in R$,

$$\lim_{n\to\infty} p(N * \mu) * V_{p,\omega_n}\varepsilon = p(N * \mu) * N_p ,$$

où $V_{p,\omega_n}\varepsilon$ est le même que dans la proposition 12. D'après (2.2), on a

$$p(N * \mu) * N_p + N_p * \mu = N * \mu . \tag{4.2}$$

Montrons que N_p est non-périodique. Supposons qu'il existe $0 \neq x \in X$ tel que $N_p = N_p * \varepsilon_x$. Alors x est un élément compact de X, d'après la proposition 15. D'après (4.1) pour $\mu = \varepsilon - \varepsilon_x$, $N * (\varepsilon - \varepsilon_x) = (N * (\varepsilon - \varepsilon_x)) * \varepsilon_x$. Pour $f \in C_K(X)$ quelconque, on pose $\varphi_f(x) = \int f dN * (\varepsilon - \varepsilon_x)$. Alors, pour tout l'entier $n > 1$, $\varphi_f(nx) = n\varphi_f(x)$. Comme $(\varphi_f(nx))_{n=1}^{\infty}$ est bornée, on a $\varphi_f(x) = 0$, et donc $N = N * \varepsilon_x$. Cela est en contradiction avec la non-périodicité de N. Ainsi N_p est non-périodique, et la proposition 15 montre qu'il existe un semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ markovien et récurrent tel que $N_p = \int_0^{\infty} \alpha_t \exp(-pt)dt$ $(p > 0)$. Donc, pour $0 < p \in R$ quelconque,

$$p(N * \mu) * \int_0^t \alpha_s \exp(-ps)ds + \int_0^t \alpha_s * \mu \exp(-ps)ds$$
$$= (N * \mu) * (\varepsilon - \exp(-pt)\alpha_t)\,.$$

En faisant $p \downarrow 0$, on arrive à (4.1). En même temps, on obtient que $\left(\int_0^t \alpha_s * \mu ds\right)_{t>0}$ est vaguement bornée. Ainsi la partie de "seulement si" est démontrée.

Montrons la partie de "si". Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante définie par $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$. De la même manière que dans la preuve de l'unicité de $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$, on a, pour $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ quelconque, (4.2). Alors (4.2) montre que, pour $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ et $x \in X$ vérifiant $\mu \neq \mu * \varepsilon_x$ quelconques, $N * \mu \neq N * \mu * \varepsilon_x$. Cela signifie que N est non-périodique. Pour que $\eta_{N,\delta} = -\infty$, il suffit que $(N_p)_{p>0}$ soit la résolvante obtenue dans la proposition 11 (voir aussi la proposition 12). Soient $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ et $V_{p,\omega_n}\varepsilon$ les mêmes que dans les propositions 11 et 12. Posons $(N'_p)_{p>0}$ la résolvante obtenue dans la proposition 11. D'après (2.2) et (4.2), on a, pour $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ et $0 < p \in R$ quelconques,

$$N * \mu = \lim_{n \to \infty} p(p(N * \mu) * V_{p,\omega_n}\varepsilon + N'_p * \mu) * N_p + N_p * \mu$$
$$= \lim_{n \to \infty} p(p(N * \mu) * N_p + N_p * \mu) * V_{p,\omega_n}\varepsilon + N'_p * \mu\,,$$

car $(p(N * \mu) * V_{p,\omega_n}\varepsilon + N'_p * \mu)_{n=1}^{\infty}$ est uniformément bornée. Donc $N_p * \mu = N'_p * \mu$. Comme $\int dN_p = 1/p$ et $\int dN'_p \leqq 1/p$, on a $N_p = N'_p$, et donc $(N_p)_{p>0}$ est la résolvante obtenue dans la proposition 11. La démonstration de la proposition 30 est ainsi complète. Soit $(N_p)_{p>0}$ la même que ci-dessus. D'après (4.2), on voit que, pour $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ quelconque, $(N_p * \mu)_{p>0}$ est aussi vaguement bornée, car $N * \mu * f$ est bornée pour tout $f \in C_K(X)$.

De la même manière que dans la proposition 30, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 31. *Soient $N \in (PSM)$ et Γ le sous-groupe des périodes de N. Alors, pour que $\eta_{N,\delta} = -\infty$, il faut et il suffit que Γ soit compact et qu'il existe un semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ markovien, récurrent et semi-transient sur X/Γ tel que, pour $\mu \in M_K^\circ(X/\Gamma)$ et $0 < t \in R$ quelconques,*

$$\tilde{N} * \mu - (\tilde{N} * \mu) * \alpha_t = \int_0^t \alpha_s * \mu ds ,$$

où $\tilde{N}$ est la projection canonique de N sur X/Γ.

En effet, on voit, de la même manière, que la condition est suffisante. On donne une remarque concernant l'inverse. Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante obtenue dans la proposition 11. Alors il suffit de montrer que $\Gamma =$ le sous-groupe Γ' des périodes de N_p $(p > 0)$. D'après (2.2) et la proposition 12, on voit que, pour $\mu \in M_K^\circ(X)$ quelconque, (4.2) a lieu. D'après (4.2), on a $\Gamma \subset \Gamma'$ et, pour $x \in \Gamma'$ et $\mu \in M_K^\circ(X)$ quelconques, $(N * \mu) * \varepsilon_x = N * \mu$. Comme Γ' est compact, on a $\Gamma' = \Gamma$ (voir le début de la preuve du théorème 1).

Pour un noyau de convolution réel N sur X, on désigne par $N \in (PPM)$ si, pour $f, g \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi$ et $a \in R$ quelconques, $N * f \leqq N * g + a$ sur $\operatorname{supp}(f)$ implique $a \geqq 0$. Cela est équivalent à $(N, 0) \in (PTMS)$.

D'après la proposition 30, (4.2), le corollaire 45 et la proposition 46 dans [7], on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 32. *Soit $N \in (PSM)$ et supposons que $\eta_{N,\delta} = -\infty$ et N est non-périodique. On désigne par $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ le semi-groupe de convolution obtenue dans la proposition 30 et par $(N_p)_{p>0}$ la résolvante définie par $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$. Soient $x_0 \in X$. $f_0 \in C_K(X)$ à $\int f_0 d\xi = 1$ et a_{x_0} une valeur adhérente de*

$$\left(\int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_t\right)_{t>0} \quad \left(resp. \left(\int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * (pN_p)\right)_{p>0}\right)$$

lorsuque $t \to \infty$ (resp. $p \to 0$). Alors il existe une suite $(t_n)_{n=1}^\infty$ (resp. $(p_n)_{n=1}^\infty$) des nombres positifs et une fonction additive et continue φ sur X telles que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$),

$$\lim_{n\to\infty} \int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_{t_n} \quad \left(resp. \lim_{n\to\infty} \int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * (p_n N_{p_n})\right) = a_{x_0} ,$$

pour $x \in X$ quelconque,

$$\lim_{n\to\infty} N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * \alpha_{t_n} \quad (resp. \lim_{n\to\infty} N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * (p_n N_{p_n}))$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

existe dans $M(X)$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} N*(\varepsilon_x-\varepsilon)*\alpha_{t_n} \quad (\textit{resp.}\ \lim_{n\to\infty} N*(\varepsilon_x-\varepsilon)*(p_nN_{p_n}))=\varphi(x)\xi\,.$$

Dans ce cas, $N-\varphi\xi\in(PSM)$ *et* $N-\varphi\xi\in(PPM)$.

Un noyau de convolution réel N sur X s'appelle un noyau de convolution de type logarithmique, si, pour $\mu\in M_K^\circ(X)$ quelconque, $N*\mu$ est de la forme

$$N*\mu=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \alpha_s*\mu ds\,, \tag{4.3}$$

où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe de convolution markovien, récurrent et semi-transient sur X (voir [7]). Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est uniquement déterminé (voir la proposition 33 dans [7]) et s'appelle la semi-groupe de convolution de N.

Pour montrer le théorème 2, on utilisera encore les deux lemmes suivants:

LEMME 33 (voir le théorème 2 dans [5]). *Soient* $N_1\neq 0$ *et* N_2 *deux noyaux de convolution positifs sur* X. *Alors* $N_1\prec N_2$ *et* $N_1\sqsubset N_2$ *sont équivalents.*

On désigne par $N_1\prec N_2$ (resp. $N_1\sqsubset N_2$) si, pour $f,\ g\in C_K^+(X)$ quelconques, $N_1*f\leqq N_2*g$ (resp. $N_2*f\leqq N_2*g$) sur X dès que $N_1*f\leqq N_2*g$ (resp. $N_1*f\leqq N_1*g$) sur $\mathrm{supp}(f)$.

On voit facilement que $N_1\prec N_2$ (resp. $N_1\sqsubset N_2$) donne l'implication suivante:

Pour $f,\ g\in C^+(X)$ vérifiant $N_j*f,\ N_j*g\in C^+(X)$ quelconques,

$$\begin{aligned} &N_1*f\leqq N_2*g \ (\text{resp. } N_1*f\leqq N_1*g) \text{ sur } \mathrm{supp}(f)\\ &\qquad\Rightarrow N_1*f\leqq N_2*g\ (\text{resp. } N_2*f\leqq N_2*g) \text{ sur } X. \end{aligned}$$

LEMME 34. *Soient* N *un noyau de convolution réel sur* X *et* $\varphi_1,\ \varphi_2$ *deux fonctions additives et continues sur* X. *Si* $(N+\varphi_1\xi,\ N+\varphi_2\xi)\in(PTMS)$, *alors* $\varphi_1=\varphi_2$ *et* $N\in(PSM)$.

Preuve. Supposons que $\varphi_1\neq\varphi_2$. Soit $0\neq f\in C_K^+(X)$ vérifiant $\mathrm{supp}(f)\subset\{x\in X;\ \varphi_2(x)<\varphi_1(x)\}$. Alors $\mathrm{supp}(\check f)\subset\{x\in X;\ \varphi_2(x)>\varphi_1(x)\}$. Posons $a=\min\{(N+\varphi_1\xi)*\check f(x)-(N+\varphi_1\xi)*f(x);\ x\in\mathrm{supp}(f)\}$. Alors $(N+\varphi_1\xi)*f\leqq(N+\varphi_1\xi)*\check f-a$ sur $\mathrm{supp}(f)$, et donc $(N+\varphi_2\xi)*f\leqq(N+\varphi_2\xi)*\check f-a$ sur X. Mais cela est une contradiction, car

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

$$(\varphi_j\xi) * f(x) = \varphi_j(x)\int f d\xi - \int \varphi_j f d\xi \quad (j = 1, 2).$$

Donc $\varphi_1 = \varphi_2$, et donc $N + \varphi_1\xi \in (PSM)$, d'où $N \in (PSM)$. Le lemme 34 est ainsi démontré.

Montrons le théorème 2. D'après la proposition 30, on voit que (2) $\Rightarrow$ (1). Donc on montrera seulement (1) $\Rightarrow$ (2). Soient $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe de convolution markovien, récurrent et semi-transient obtenu dans la proposition 30 et $(N_p)_{p>0}$ la résolvante définie par $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Soient $x_0 \in X$, $f_0 \in C_K(X)$ vérifiant $\int f_0 d\xi = 1$, a_{x_0} une valeur adhérente de

$$\left(\int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_t\right)_{t>0}$$

lorsque $t \to \infty$ et b_{x_0} une valeur adhérente de

$$\left(\int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * (pN_p)\right)_{p>0}$$

lorsque $p \to 0$ quelconques. D'après la proposition 32, on peut choisir deux suites $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ des nombres positifs et deux fonctions additives et continues φ_1, φ_2 sur X telles que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_{t_n} = a_{x_0},$$
$$\lim_{n\to\infty}\int f_0 d(N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * (p_n N_{p_n}) = b_{x_0}$$

et, pour $x \in X$ quelconque,

$$\lim_{n\to\infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_{t_n} = \varphi_1(x)\xi, \quad \lim_{n\to\infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * (p_n N_{p_n}) = \varphi_2(x)\xi\,.$$

Posons $N_1 = N + \varphi_1\xi$ et $N_2 = N + \varphi_2\xi$. D'après la proposition 30, on a, pour $x \in X$ quelconque,

$$\begin{aligned} N_1 * (\varepsilon_x - \varepsilon) &= N * (\varepsilon_x - \varepsilon) + (\varphi_1\xi) * (\varepsilon_x - \varepsilon) \\ &= N * (\varepsilon_x - \varepsilon) - \varphi_1(x)\xi = N * (\varepsilon_x - \varepsilon) - \lim_{n\to\infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_{t_n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n} \alpha_t * (\varepsilon_x - \varepsilon) dt\,, \end{aligned}$$

et donc, pour $\mu \in M_K^{\circ}(X)$ quelconque,

$$N_1 * \mu = \lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n} \alpha_t * \mu dt\,, \tag{4.4}$$

car $N_1 * \mu = \int N_1 * (\varepsilon_x - \varepsilon) d\mu(x)$. En utilisant (4.2) au lieu de (4.1), on obtient aussi que, pour $\mu \in M_K^\circ(X)$ quelconque,

$$N_2 * \mu = \lim_{n \to \infty} N_{p_n} * \mu . \tag{4.5}$$

Montrons que $(N_1, N_2) \in (PTMS)$. Pour cela, il suffit de montrer que, pour $f, g, h \in C_K^+(X)$ à $\int f d\xi = \int g d\xi = \int h d\xi = 1$ et $a \in R$ quelconques, l'implication suivante (4.6) a lieu:

$$\begin{aligned} & N_1 * (f * h) \leqq N_1 * (g * h) + a \text{ sur } \operatorname{supp}(f * h) \\ & \qquad \Rightarrow N_2 * (f * h) \leqq N_2 * (g * h) + a \text{ sur } X. \end{aligned} \tag{4.6}$$

D'après (4.4),

$$\left(\int_0^{t_n} \alpha_t * (g - f) * h dt \right)_{n=1}^{\infty}$$

converge uniformément vers $N_1 * (g - f) * h$ sur tout compact. Donc, pour $b > 0$ quelconque, il existe un entier $n_0 \geqq 1$ tel que, pour $n \geqq n_0$ quelconque,

$$\int_0^{t_n} \alpha_t * (f - g) * h dt \leqq a + b \text{ sur } \operatorname{supp}(f * h) .$$

Pour $n \geqq 1$ quelconque, $\lim_{m \to \infty} \int_0^{t_n} \exp(-p_m t) \alpha_t dt = \int_0^{t_n} \alpha_t dt$, et donc il existe un entier $m_n \geqq 1$ tel que, pour $m \geqq m_n$ quelconque,

$$\int_0^{t_n} (1 - \exp(-p_m t)) \alpha_t * (f - g) * h \leqq b \text{ sur } \operatorname{supp}(f * h) .$$

Donc, pour $n \geqq n_0$ et $m \geqq m_n$ quelconque,

$$\begin{aligned} & N_{p_m} * (\varepsilon - \exp(-p_m t_n) \alpha_{t_n}) * (f * h) \\ & \qquad \leqq N_{p_m} * (\varepsilon - \exp(-p_m t_n) \alpha_{t_n}) * (g * h) + a + 2b \text{ sur } \operatorname{supp}(f * h) , \end{aligned}$$

car $N_{p_m} * (\varepsilon - \exp(-p_m t_n) \alpha_{t_n}) = \int_0^{t_n} \exp(-p_m t) \alpha_t dt$. D'après le principe de domination pour N_{p_m}, $N_{p_m} * (\varepsilon - \exp(-p_m t_n) \alpha_{t_n}) \prec N_{p_m}$. D'après le lemme 33, on a

$$\begin{aligned} N_{p_m} * (f * h) & \leqq N_{p_m} * (g * h) + (a + 2b) \frac{\int dN_{p_m}}{\int dN_{p_m} * (\varepsilon - \exp(-p_m t_n) \alpha_{t_n})} \\ & = N_{p_m} * (g * h) + \frac{a + 2b}{1 - \exp(-p_m t_n)} \text{ sur } X , \end{aligned}$$

car, en posant

$$\alpha = \int dN_{p_m} * (\varepsilon - \exp(-p_m t_n)\alpha_{t_n}), \quad N_{p_m} * (\varepsilon - \exp(-p_m t_n)\alpha_{t_n}) * \left(\frac{1}{\alpha}\cdot 1\right) = 1 ,$$

où 1 signifie aussi la fonction constante 1 sur X. En faisant $m \to \infty$ et ensuite $n \to \infty$, on voit, d'après (4.5),

$$N_2 * (f * h) \leqq N_2 * (g * h) + a + 2b \text{ sur } X .$$

En faisant $b \downarrow 0$, on arrive à (4.6), d'où $(N_1, N_2) \in (PTMS)$. D'après le lemme 34, on a $\varphi_1 = \varphi_2$, d'où $a_{x_0} = b_{x_0}$. Comme f_0 est quelconque,

$$\lim_{t\to\infty} (N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_t \quad \text{et} \quad \lim_{p\to 0} (N(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * (pN_p)$$

existent dans $M(X)$ et

$$\lim_{t\to\infty} (N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * \alpha_t = \lim_{p\to 0} (N * (\varepsilon_{x_0} - \varepsilon)) * (pN_p) .$$

Comme x_0 est quelconque, il existe une fonction additive et continue φ sur X telle que, pour $x \in X$ quelconque.

$$\lim_{t\to\infty} (N * (\varepsilon_x - \varepsilon)) * \alpha_t = \varphi(x)\xi .$$

D'après (4.1), $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \alpha_s * (\varepsilon_x - \varepsilon) ds$ existe dans $M(X)$ et

$$N * (\varepsilon_x - \varepsilon) - \varphi(x)\xi = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \alpha_s * (\varepsilon_x - \varepsilon) ds .$$

Par conséquent, pour $\mu \in M_K^\circ(X)$ quelconque, $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \alpha_s * \mu ds$ existe dans $M(X)$ et

$$(N + \varphi\xi) * \mu = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \alpha_s * \mu ds$$

(voir (4.4)). Posons $N_0 = N + \varphi\xi$; alors N_0 est de type logarithmique et $N = N_0 - \varphi\xi$. La démonstration du théorème 2 est ainsi complète.

D'après le théorème 2 et les propositions 15 et 31, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 35. *Soient N un noyau de convolution réel sur X et Γ le sous-groupe des périodes de N. Alors il y a une équivalence entre:*

(1) *$N \in (PSM)$ et $\eta_{N,\delta} = -\infty$.*

(2) *Γ est compact et $\tilde{N} = N_0 + \varphi\xi$, où $\tilde{N}$ est la projection canonique de*

N sur X/Γ, N_0 est un noyau de convolution de type logarithmique sur X/Γ et où φ est une fonction additive et continue sur X/Γ.

On se propose de déterminer les groupes abélien localement compacts sur lesquels les noyaux de convolution de type logarithmiques. C'est le théorème 4.

De la même manière que dans la remarque 59 dans [7], on obtiendra la proposition suivante:

PROPOSITION 36. *Soient X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini et K un groupe abélien compact. S'il existe de noyaux de convolution de type logarithmique sur X, alors il existe de noyaux de convolution de type logarithmique sur $X \times K$.*

D'après le théorème 57, la remarque 59 dans [7] et les propositions 29, 36, on voit que le théorème 4 existe.

§ 5. Le semi-balayage sur tout ouvert

Dans [8], nous avons discuté $N \in (PSB_g)$, $\in (PPM)$. Dans ce paragraphe, nous donnerons une caractérisation de $N \in (PSB_g)$. Dans la théorie du potentiel par rapport aux noyaux de convolution réels, (PSB_g) est un des principes plus importants.

PROPOSITION 37. *Soit $N \in (PSB_g)$. Alors $\eta_{N,\delta} = -\infty$ ou bien il existe une fonction additive et continue φ sur X telle que le sous-groupe des périodes de $N - \varphi\xi$ soit non-compact.*

Preuve. Supposons que $\eta_{N,\delta} \neq -\infty$. Alors il suffit de montrer que $N = \eta_{N,\delta}$. En effet, supposons que $N = \eta_{N,\delta}$. Alors, pour un ouvert ω dans X dont le complément est compact et $(\varepsilon'_\omega, a_\omega) \in SB_N(\varepsilon, \omega)$ quelconques, $N = N * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi$, car $N \geqq N * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi \geqq \eta_{N,\delta}$. Donc, pour $x \in X$ quelconque, $N * (\varepsilon_x - \varepsilon) = N * (\varepsilon - \varepsilon_x) * \varepsilon'_\omega$. Comme, pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, $N * (\varepsilon_x - \varepsilon) * f$ est bornée, le lemme 18 montre que le sous-groupe des de $N * (\varepsilon - \varepsilon_x)$ contient $\mathrm{supp}(\varepsilon'_\omega)$. Comme ω est quelconque, il existe un sous-groupe Γ fermé et non-compact de X qui est contenu dans le sous-groupe des périodes de $N * (\varepsilon - \varepsilon_x)$ pour tout $x \in X$. De la même manière qu'au début de la preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) du théorème 1, il existe une fonction additive et continue φ sur X telle que le sous-groupe des périodes de $N - \varphi\xi$ soit $\supset \Gamma$.

Montrons que $N = \eta_{N,\delta}$. Posons $N_0 = N - \eta_{N,\delta}$ et $N'' = \eta_{N,\delta}$. Supposons que $N_0 \neq 0$. Alors, pour une fonction additive et continue ψ sur X

quelconque, le sous-groupe des périodes de $N - \psi\xi$ est compact. Soit Γ_p le sous-groupe des périodes de N. En considérant la projection canonique de N sur X/Γ_p, on peut supposer que N est non-périodique. D'après le théorème 1, N_0 est un noyau de convolution de Hunt dont le semi-groupe de convolution est sous-markovien. Soient ω un ouvert dans X dont le complément est compact et $(\varepsilon'_\omega, a_\omega) \in SB_N(\varepsilon, \omega)$. Comme $(N, N'') \in (PTMS)$ et $N - N * \varepsilon'_\omega - a_\omega\xi \in M_K^+(X)$, on voit que $N'' = N'' * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi$. Donc ε'_ω est une N_0-mesure balayée de ε sur ω. Comme $\int d\varepsilon'_\omega = 1$, on a $\int dN_0 = \infty$, et donc le semi-groupe de convolution $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ de N_0 est markovien.

Soit Γ le sous-groupe fermé engendré par $\operatorname{supp}(N_0)$. Montrons que, pour tout l'ouvert $\omega \neq \phi$ dans X tel que, pour toute la mesure N_0-balayée ε''_ω de ε sur ω, $\int d\varepsilon''_\omega < 1$, tout $(\varepsilon'_\omega, a_\omega) \in SB_N(\varepsilon, \omega)$ vérifie

$$(5.1) \qquad N_0 * \varepsilon'_\omega = N_0 + \xi_\Gamma * \nu \text{ dans } \omega \text{ et } \operatorname{supp}(\xi_\Gamma * \nu) \supset \Gamma$$

avec $\nu \in M^+(X)$. Comme $(N, N'') \in (PTMS)$, on a $N'' * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi \leqq N''$. D'après le théorème 1, on a, pour $x \in \Gamma$ quelconque, $(N'' - N'' * \varepsilon'_\omega - a_\omega\xi) * \varepsilon_x = N'' - N'' * \varepsilon'_\omega - a_\omega\xi$, et donc, avec $\nu \in M^+(X)$, $N'' - N'' * \varepsilon'_\omega - a_\omega\xi = \xi_\Gamma * \nu$. Supposons que $\operatorname{supp}(\xi_\Gamma * \nu) \not\supset \Gamma$. Alors $\operatorname{supp}(\xi_\Gamma * \nu) \cap \Gamma = \phi$. Si $N'' \in (PSM)$, alors $N'' \leqq N'' * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi$ (voir la proposition 3), d'où $N'' * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi = N''$. Alors ε'_ω est une mesure N_0-balayée de ε sur ω. Mais cela est en contradiction avec notre hypothèse. Donc $N'' \notin (PSM)$. Alors on peut écrire $N = N_0 - a\xi_\Gamma + N' + \varphi\xi$ comme dans (1.2), où $a \neq 0$ (voir la fin de la preuve du théorème 1). D'après le lemme 24 et $a(N_0) \geqq a$, $N' + \varphi\xi \in S(N)$, et donc $(N' + \varphi\xi) * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi \leqq N' + \varphi\xi$. Comme $\operatorname{supp}(N'' - N'' * \varepsilon'_\omega - a_\omega\xi) \cap \Gamma = \phi$ et $N'' + N' + \varphi\xi - a\xi_\Gamma$, on a $a\xi_\Gamma * \varepsilon'_\omega \geqq a\xi_\Gamma$. Comme $\int d\varepsilon'_\omega = 1$, on voit que $\operatorname{supp}(\varepsilon'_\omega) \subset \Gamma$, d'où $\xi_\Gamma = \xi_\Gamma * \varepsilon'_\omega$ et $N' * \varepsilon'_\omega = N'$. Cela donne $N'' * \varepsilon'_\omega + a_\omega\xi = N''$, et donc ε'_ω est aussi une mesure N_0-balayée de ε sur ω, d'où une contradiction. Ainsi (5.1) existe. On remarque ici que $\operatorname{supp}(\varepsilon''_\omega) \subset \bar{\omega} \cap \Gamma$. De la même manière que dans [8] (voir la preuve de la proposition 26), cela est en contradiction avec le lemme suivant connu:

LEMME 38 (voir la proposition 18 dans [8]). *Soit N_0 un noyau de convolution de Hunt sur X dont le semi-groupe de convolution est sous-markovien et supposons que le sous-groupe engendré par* $\operatorname{supp}(N_0)$ *est égal à X. Alors il existe un ouvert ω dans X et un voisinage compact v de l'origine tels que*:

(1) *Pour une mesure N_0-balayée $\varepsilon''_{\omega+v}$ de ε sur $\omega + v$ quelconque,*

https://doi.org/10.1017/S0027763000000349 Published online by Cambridge University Press

$\int d\varepsilon''_{\omega+v} < 1.$

(2) $\operatorname{supp}\left\{\int d\lambda;\ \lambda \in M_K^+(X);\ \operatorname{supp}(\lambda) \subset \omega,\ N_0 * \lambda \leqq \xi\right\} = \infty.$

Le théorème 2 et la proposition 37 donnent (1) du théorème 3, car la non-périodicité de $N - N * \varepsilon_x$ montre que, pour toute la fonction additive et continue φ sur X, $N - \varphi\xi$ est non-périodique.

Comme un noyau de convolution de type logarithmique est $\in (PSB_g)$ (voir [8]), on voit facilement la remarque suivante:

Remarque 39. Soient N un noyau de convolution de type logarithmique et φ une fonction additive et continue sur X. Si pour $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert $\omega \neq \phi$ dans X quelconques, il existe $(\mu'_\omega, a_\omega) \in \underline{SB}_N(\mu, \omega)$ tel que $(\varphi\xi) * \mu'_\omega$ ait un sens, alors $N + \varphi\xi \in (PSB_g)$.

Cela donne (2) du théorème 3. Par conséquent, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 40. *Soit N un noyau de convolution réel sur X. Alors il y a une équivalence entre*:

(1) *Il existe une fonction additive et continue φ_1 sur X telle que $N + \varphi_1\xi$ soit un noyau de convolution de type logarithmique.*

(2) *Pour toute la fonction additive et continue φ sur X, $N + \varphi\xi$ soit non-périodique et il existe une fonction additive et continue φ_2 sur X telle que $N + \varphi_2\xi \in (PSB_g)$.*

Dans le cas où $X = R$, il existe $N \in (PSB_g)$ vérifiant la condition dans (1) du théorème 3 qui n'est pas de noyau de convolution de type logarithmique; par exemple, $N = (-|x| + ax)dx$, où $a \in R$ et dx désigne la mesure de Lebesgue. Dans le cas où $X = R^2$, il fait question si N est un noyau de convolution de type logarithmique dès que N vérifie la condition dans (1) du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Berg et G. Forst, Potential theory on locally compact abeliean groups, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Newyork, 1975.

[2] G. Choquet et J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, C. R. Acad., Sci. Paris, **250** (1960), 799–801.

[3] J. Deny, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 643–667.

[4] M. Itô, Caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution non-bornés, Nagoya Math. J., **57** (1975), 167–197.

[5] ——, Sur le principe de domination relatif, le balayage et les noyaux conditionnellement sous-médians, J. Math. pures appl., **57** (1978), 423–451.
[6] ——, Positive eigen elements for an infinitesimal generator of a diffusion semigroup and their integral representations, Proceeding Potential theory, Copenhagen 1979, Lecture Note in Math., **787** (1979), 163–183, Springer-Verlag.
[7] ——, Une caractérisation des noyaux de convolution réels de type logarithmique, Nagoya Math. J., **97** (1985), 1–49.
[8] M. Itô et N. Suzuki, The semi-balayability of real convolution kernels, Nagoya Math. J., **99** (1985), 89–110.
[9] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand Math. Studies #7, Princeton, 1965.
[10] G. Stanpacchia, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, **258** (1964), 4413–4416.
[11] ——, Le problème de Dirichlet pour les équation elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), 189–256.
[12] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1965.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Nagoya
Nagoya 464
Japon