

Nombres premiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$

Joël Rivat et Patrick Sargos

Abstract. For $c > 1$ we denote by $\pi_c(x)$ the number of integers $n \leq x$ such that $\lfloor n^c \rfloor$ is prime. In 1953, Piatetski-Shapiro has proved that $\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \log x}$, $x \rightarrow +\infty$ holds for $c < 12/11$. Many authors have extended this range, which measures our progress in exponential sums techniques. In this article we obtain $c < 1.16117\dots$.

1 Introduction

La répartition des nombres premiers a été décrite en 1896 par Hadamard et de la Vallée Poussin qui ont démontré (indépendamment) le célèbre résultat suivant, conjecturé notamment par Legendre et Gauss:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad x \rightarrow +\infty$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers $\leq x$.

Beaucoup de travaux ont été accomplis pour essayer de trouver des nombres premiers d'une forme particulière. Ainsi ont été définis les nombres premiers de Mersenne (de la forme $2^n - 1$) et les nombres premiers de Fermat (de la forme $2^{2^n} + 1$). On pense qu'il existe une infinité de nombres de Mersenne premiers, et qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers de Fermat, à cause des croissances respectives des suites $2^n - 1$ et $2^{2^n} + 1$, mais on n'a aucun espoir de démontrer ces résultats pour le moment. Si l'on cherche à montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $P(n)$, où P est un polynôme à coefficients entiers, on ne sait y parvenir pour aucun polynôme de degré ≥ 2 . Dans le cas du degré 1, Dirichlet a démontré en 1837 qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $qn + a$ lorsque q et a sont premiers entre eux et le théorème de Siegel-Walfisz permet de décrire la répartition des nombres premiers $\equiv a \pmod q$, uniformément pour $\text{pgcd}(a, q) = 1$ et $1 \leq q \leq (\log x)^A$.

En 1953, Piatetski-Shapiro [14] a donné un exemple avec une suite beaucoup moins dense que la précédente. Il a décrit la répartition des nombres premiers dans la suite $\lfloor n^c \rfloor$ pour c fixé, avec $c < 12/11 = 1.0909\dots$. Cette suite qui est la généralisation la plus simple des polynômes pour des degrés c non entiers, a été pendant longtemps la moins dense pour laquelle on savait qu'elle contenait une infinité de nombres premiers. Aujourd'hui, on sait d'après un résultat très difficile de Friedlander et Iwaniec [4] qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $m^2 + n^4$.

Reçu par les éditeurs le 14 décembre, 1998; révisée le 18 avril, 2000.
Classification (AMS) par sujet: primaire: 11L07, 11L20; secondaire: 11N05.
©Société Mathématique du Canada 2001.

La suite $\lfloor n^c \rfloor$ reste cependant très étudiée, car elle permet par une transformation très simple de se ramener à un problème de sommes d'exponentielles, et la croissance de la borne c permet de mesurer les progrès dans les techniques de sommes d'exponentielles. Ceci donne un intérêt indépendant et non négligeable au problème.

Notons $\pi_c(x)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ tels que $\lfloor n^c \rfloor$ soit un nombre premier.

Le but de cet article est de montrer le

Théorème 1 Pour tout $1 < c < \frac{2817}{2426} = 1.16117\dots$, on a

$$(1) \quad \pi_c(x) \sim \frac{x}{c \log x} \quad x \rightarrow +\infty$$

qui améliore les résultats de Piatetski-Shapiro [14], Kolesnik [10], Graham (non publié), Leitmann (non publié), Heath-Brown [7], Kolesnik [11], Liu-Rivat [13], et Rivat ($1 < c < 1.15447\dots$) [15].

Notons que l'exigence de trouver un équivalent de $\pi_c(x)$ est une condition très forte. On peut s'en affranchir et se contenter de minorer $\pi_c(x)$, afin de trouver des c plus grands pour lesquels il existe une infinité de nombres premiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$. Ainsi le premier auteur a montré (1992) [15] que pour tout $c < 7/6 = 1.1666\dots$, on a

$$\pi_c(x) \gg \frac{x}{c \log x}$$

et ce résultat a ensuite été amélioré par Baker-Harman-Rivat [1] ($c < 20/17$) et Jia [9] qui a finalement obtenu $c < 13/11 = 1.1818\dots$.

Le premier auteur a aussi montré (1992) [15] que pour tout ensemble « raisonnable » d'entiers \mathcal{A} (l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers est « raisonnable »), pour presque tout $c < 2$ au sens de la mesure de Lebesgue, on a la répartition attendue pour les $a \in \mathcal{A}$ de la forme $a = \lfloor n^c \rfloor$. Ce résultat améliore un article de Leitmann et Wolke (1975) [12] qui ne traitait que du cas des nombres premiers, alors que Deshouillers (1976) [2] avait montré que pour presque tout $c > 1$,

$$\pi_c(x) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

2 Description de la méthode

Après le travail de Liu et Rivat [13], le point crucial pour progresser dans le problème de Piatetski-Shapiro est de majorer la somme

$$S = \sum_{(\underline{h}, \underline{n}) \in \mathcal{D}} \left| \sum_{m^*} e(c(\gamma)u^{\frac{1}{1-\gamma}} m^{*\frac{\gamma}{\gamma-1}}) \right|$$

où on a posé $\gamma = 1/c$, $\underline{h} = (h_1, h_2)$, $\underline{n} = (n_1, n_2)$, $u = u(\underline{h}, \underline{n}) = h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma$ et

$$\mathcal{D} = \{(\underline{h}, \underline{n}), h_i \sim H, n_i \sim N, |u| \leq \Delta H N^\gamma\}$$

où Δ est un paramètre positif petit à optimiser.

Si on majore trivialement la somme S , on obtient le résultat $c < 15/13$ de Liu et Rivat [13] (l'amélioration de Liu et Rivat portait sur une autre somme d'exponentielles, traitée par la méthode de Fouvry et Iwaniec [3]). Toute majoration non triviale de S amène une amélioration de l'exposant $15/13$. Dans [15], une exploitation de la somme en m^* n'apporte qu'une amélioration très légère du fait que la variable m^* est très courte.

Le principe de notre démonstration consiste à extraire de l'ensemble \mathcal{D} une variable plus longue que m^* . Dans un premier temps, il faut faire disparaître les modules dans la somme S et se ramener à

$$S_1 = \sum_{m^*} \sum_{(\underline{h}, \underline{n}) \in \mathcal{D}} e(c(\gamma)u^{\frac{1}{1-\gamma}} m^{*\frac{\gamma}{\gamma-1}}).$$

Pour cela, on utilise une version élaborée de l'identité de Heath-Brown, qui permet d'avoir des sommes lisses courtes (de type I') comme expliqué au Section 4. Puis nous proposons au Section 6 une généralisation du Lemme A de Weyl-Van der Corput qui évite les fractures dans le domaine D , comme celles qui apparaissent dans la méthode des petits intervalles de Heath-Brown [7, p. 255]. Après une transformation B effectuée au Section 7, on arrive à la somme S_1 .

Pour chaque \underline{h} fixé, \underline{n} varie dans un domaine du plan $\mathcal{D}(\underline{h})$ très effilé, à très faible courbure. Au moyen d'approximations rationnelles faites au Section 8, on recouvre $\mathcal{D}(\underline{h})$ au Section 9 par des segments Γ de longueur N à pentes rationnelles dont les dénominateurs sont génériquement de l'ordre de $\Delta^{-1/2}$. En paramétrant les points entiers de Γ , on obtient au Section 10 une variable ν dont la longueur est $\asymp N\Delta^{1/2}$, ce qui est suffisant pour que la phase soit de dérivée cinquième petite (alors qu'il fallait aller jusqu'à la dérivée septième par rapport à m^*). La conclusion, donnée au Section 11, tient compte également des "mauvaises" approximations rationnelles, lesquelles sont rares d'après un lemme classique de Huxley et Watt.

3 Passage aux sommes d'exponentielles

Soit $1 < c < 2$. En posant $\gamma = 1/c$, on a l'équivalence

$$a = \lfloor n^c \rfloor \iff \lfloor -a^\gamma \rfloor - \lfloor -(a+1)^\gamma \rfloor = 1$$

ce qui fournit une fonction indicatrice des nombres de la forme $\lfloor n^c \rfloor$:

$$\pi_c(x) = \sum_{p \leq x^c} (\lfloor -p^\gamma \rfloor - \lfloor -(p+1)^\gamma \rfloor) + O(1).$$

En utilisant l'écriture $\lfloor u \rfloor = u - \psi(u) - 1/2$, on obtient

$$\pi_c(x) = \sum_{p \leq x^c} ((p+1)^\gamma - p^\gamma) + \sum_{p \leq x^c} (\psi(-(p+1)^\gamma) - \psi(-p^\gamma)) + O(1)$$

et comme on a l'équivalent

$$\sum_{p \leq x^c} ((p+1)^\gamma - p^\gamma) \sim \frac{x}{c \log x} \quad x \rightarrow +\infty$$

il suffit pour obtenir l'équivalent (1) de montrer qu'il existe $\kappa > 0$, ne dépendant que de c , tel qu'on ait:

$$\sum_{p \leq x^c} \left(\psi(-(p+1)^\gamma) - \psi(-p^\gamma) \right) \ll x^{1-\kappa}$$

donc en introduisant la fonction Λ de von Mangoldt, et en effectuant un découpage dyadique, il suffit de montrer que

$$\sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n) \left(\psi(-(n+1)^\gamma) - \psi(-n^\gamma) \right) \ll x^{\gamma-\kappa}.$$

Il serait possible à présent de simplement développer ψ en série de Fourier, mais il est plus agréable d'utiliser l'inégalité (7.14) de Vaaler [18] (voir aussi le théorème A.6 de [5]):

Lemme 1 Soit h_0 un entier ≥ 1 et pour $0 < |t| < 1$, $\phi(t) = \pi t(1 - |t|) \cot(\pi t) + |t|$.
 Pour $0 < |t| < 1$, on a $0 < \phi(t) < 1$ et le polynôme trigonométrique

$$\psi^*(x) = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{1 \leq |h| \leq h_0} \phi\left(\frac{h}{h_0+1}\right) \frac{e(hx)}{h}$$

vérifie

$$|\psi(x) - \psi^*(x)| \leq \frac{1}{2h_0+2} \sum_{|h| \leq h_0} \left(1 - \frac{|h|}{h_0+1}\right) e(hx).$$

Le terme $h = 0$ dans la dernière inégalité détermine le choix de l'entier $h_0 \asymp x^{1-\gamma+\kappa}$, et on constate qu'il suffit de montrer uniformément pour $|\varepsilon_h| \leq 1$:

$$\sum_{1 \leq h \leq h_0} \varepsilon_h \sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n) \frac{e(h(n+1)^\gamma) - e(hn^\gamma)}{h} \ll x^{\gamma-\kappa}.$$

En effectuant un découpage dyadique de la sommation sur h , et en effectuant une sommation par parties sur n (voir Heath-Brown [7]) il suffit finalement pour obtenir l'équivalent (1) de montrer

$$\sum_{h \sim H} \varepsilon_h \sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n) e(hn^\gamma) \ll x^{1-\kappa}$$

pour tout $H \leq x^{1-\gamma+\kappa}$, uniformément pour $|\varepsilon_h| \leq 1$, et pour un certain $\kappa > 0$ ne dépendant que de c .

4 Identité combinatoire

Heath-Brown (1982) [6] a montré que l'identité suivante avait des propriétés intéressantes:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1 - \zeta M_X)^\ell = \frac{\zeta'}{\zeta} + \sum_{r=1}^{\ell} \binom{\ell}{r} (-1)^r \zeta' \zeta^{r-1} M_X^r$$

avec

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad M_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_X(n)}{n^s}.$$

En utilisant les propriétés élémentaires des séries de Dirichlet on a

$$1 - \zeta M_X = \sum_{n > X} \frac{a(n, X)}{n^s}, \quad (1 - \zeta M_X)^\ell = \sum_{n > X^\ell} \frac{a_\ell(n, X)}{n^s}$$

donc en identifiant les coefficients des séries de Dirichlet dans l'identité précédente, on obtient pour $n \leq X^\ell$

$$\Lambda(n) = - \sum_{r=1}^{\ell} \binom{\ell}{r} (-1)^r \sum_{n_1 \cdots n_r n_{r+1} \cdots n_{2r} = n} \mu_X(n_1) \cdots \mu_X(n_r) \log n_{2r}.$$

Cette identité due à Heath-Brown généralise l'identité de Vaughan. Elle a de nombreuses applications, en prenant en général $\ell = 3$. Nous allons ici prendre $\ell \geq 4$, et montrer le

Lemme 2 Soit $\ell \geq 4$ un entier, $1/2\ell \leq \alpha \leq 1/6$ et f une fonction arithmétique quelconque. Supposons que pour $MN = x$ on ait uniformément pour tous $|a_m|, |b_n| \leq 1$,

$$\sum_{m \sim M} \sum_{n \sim x/m} a_m b_n f(mn) \ll_{\ell} U \quad \text{pour } x^\alpha \leq N \leq x^{2\alpha} \quad (\text{type II})$$

$$\sum_{m \sim M} \sum_{n \sim x/m} a_m f(mn) \ll_{\ell} U \quad \text{pour } x^{2\alpha} < N \leq x^{1/3} \quad (\text{type I'})$$

$$\sum_{m \sim M} \sum_{n \sim x/m} a_m f(mn) \ll_{\ell} U \quad \text{pour } x^{(1-\alpha)/2} \leq N \quad (\text{type I})$$

alors

$$\sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n) f(n) \ll_{\ell, \kappa} U x^\kappa.$$

Remarque Nous avons suivi la terminologie habituelle en appelant sommes de type II les sommes comportant deux coefficients inconnus a_m et b_n , et sommes de

type I les sommes comportant un seul coefficient inconnu a_m . Pour les sommes de type I, on espère en général que la variable lisse est grande, c'est pourquoi nous avons introduit les sommes de type I', pour lesquelles la variable lisse est petite. Les méthodes habituelles ne permettent pas d'exploiter les sommes de type I', qui sont traitées comme des sommes de type II. Dans cet article nous montrerons comment utiliser les sommes de type I'.

Démonstration En utilisant l'identité de Heath-Brown avec $X = x^{1/\ell}$, il s'agit simplement de montrer que l'on peut toujours regrouper les variables n_i de manière à obtenir une somme de type II, I' ou I que l'on sait majorer. Quitte à perdre un facteur $(\log x)^{2\ell}$, on peut supposer par découpage dyadique que $n_i \sim N_i$. Quitte à perdre encore un facteur $\log x$, on peut également remplacer $\log n_r$ par 1 (par sommation par parties). En regroupant les variables, on fait apparaître des coefficients majorés par des fonctions diviseurs, donc $\ll_{\ell, \kappa} x^{\kappa/2}$, ce qui est également admissible.

En utilisant la majoration sur les sommes de type II, nous pouvons majorer lorsqu'il existe un N_i tel que $x^\alpha \leq N_i \leq x^{2\alpha}$. On peut donc supposer qu'aucun N_i n'est dans cet intervalle. Considérons le produit P des N_i qui sont $\leq x^\alpha$. Si $P \geq x^\alpha$ alors P admet un sous-produit N de N_i qui vérifie $x^\alpha \leq N \leq x^{2\alpha}$ auquel on peut appliquer la majoration des sommes de type II. On peut donc supposer que $P \leq x^\alpha$. Le produit des variables qui ne sont pas dans P est un produit de variables lisses (car $> x^{2\alpha} \geq x^{1/\ell}$) qui est $\geq x^{1-\alpha}$. En utilisant la majoration des sommes de type I', on peut supposer que ces variables sont $> x^{1/3}$, et donc il y en a au plus deux. La plus grande N vérifie donc nécessairement $N \geq x^{(1-\alpha)/2}$, et on peut donc appliquer la majoration des sommes de type I, ce qui termine la démonstration. ■

5 Réduction du problème

On applique le lemme 2 avec $\ell = 5$. Il suffit de montrer pour $1/10 \leq \alpha \leq 1/6$ (qui reste à choisir) que

$$\sum_{h \sim H} \varepsilon_h \sum_{m \sim M} \sum_{n \sim x/m} a_m b_n e(h(mn)^\gamma) \ll_{\kappa} x^{1-2\kappa}$$

pour tout $H \leq x^{1-\gamma+\kappa}$, $MN = x$, dans les cas suivants:

$$\begin{aligned} x^\alpha &\leq N \leq x^{2\alpha} && \text{(type II)} \\ b_n = 1, \quad x^{2\alpha} < N \leq x^{1/3} && \text{(type I')} \\ b_n = 1, \quad x^{(1-\alpha)/2} \leq N && \text{(type I)}. \end{aligned}$$

Heath-Brown [7] a majoré les sommes de type II pour

$$x^{1-\gamma+\eta} \leq N \leq x^{5\gamma-4-\eta}$$

avec $\eta \ll \kappa$ assez petit. Comme on peut supposer $10/9 < c < 6/5$, et donc $1/10 < 1 - \gamma < 1/6$, on peut choisir $\alpha = 1 - \gamma + \eta$, et ceci règle le cas des sommes de type II

lorsque $2(1 - \gamma) < 5\gamma - 4$. Les sommes de type II sont donc majorées pourvu que

$$\frac{10}{9} < c < \frac{7}{6}.$$

Le théorème 5.10 de [15] majore les sommes de type I lorsque $c < 13/11$ pour

$$x^{3(1-\gamma)+\eta} \ll N$$

avec $\eta \ll \kappa$ assez petit. Ceci règle le cas des sommes de type I lorsque $3(1 - \gamma) < \gamma/2$, donc lorsque

$$c < \frac{7}{6}.$$

Il reste donc à majorer les sommes de type I'. Il est bien sûr possible de les traiter comme des sommes de type II, et utiliser la majoration de Heath-Brown, lorsque

$$x^{2(1-\gamma+\eta)} \leq N \leq x^{5\gamma-4-\eta}.$$

Le lemme suivant (lemme 5.2.3 de [8]) va nous permettre de supprimer la condition multiplicative $n \sim x/m$:

Lemme 3 Soit $M \leq N_1 < N_2 \leq M + N$ et $W(\xi) = \min(N, (2|\xi|)^{-1})$. Alors

$$\left| \sum_{N_1 < n \leq N_2} a_n \right| \leq \int_{-1/2}^{1/2} W(\xi) \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n e(n\xi) \right| d\xi$$

et de plus

$$\int_{-1/2}^{1/2} W(\xi) d\xi = 1 + \log N.$$

Démonstration On peut supposer que M, N, N_1, N_2 sont des entiers. On a

$$\sum_{N_1 < n \leq N_2} a_n = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{M < n \leq M+N} a_n e(n\xi) \right) \left(\sum_{N_1 < n' \leq N_2} e(-n'\xi) \right) d\xi$$

car $\int_{-1/2}^{1/2} e(s\xi) d\xi$ vaut 1 si $s = 0$ et 0 pour tout entier $s \neq 0$. Les inégalités

$$\left| \sum_{N_1 < n' \leq N_2} e(-n'\xi) \right| = \left| \frac{\sin(N_2 - N_1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \right| \leq \min \left(N_2 - N_1, \frac{1}{2|\xi|} \right) \leq W(\xi)$$

pour $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$ donnent la conclusion. ■

Nous avons donc

$$\left| \sum_{n \sim x/m} \sum_{h \sim H} \varepsilon_h e(h(mn)^\gamma) \right| \leq \int_{-1/2}^{1/2} W(\xi) \left| \sum_{n \sim N} \sum_{h \sim H} \varepsilon_h e(h(mn)^\gamma + n\xi) \right| d\xi$$

où la fonction positive $W(\xi)$ ne dépend pas de m et vérifie $\int_{-1/2}^{1/2} W(\xi) d\xi \ll \log x$.

Ainsi nous avons montré le

Lemme 4 Pour montrer le théorème 1, on peut supposer $15/13 \leq c < 7/6$ et il suffit de montrer qu'il existe $\kappa > 0$, ne dépendant que de c , tel qu'on ait uniformément pour $\xi \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon_h| \leq 1$,

$$(2) \quad \sum_{m \sim M} \left| \sum_{h \sim H} \varepsilon_h \sum_{n \sim N} e(h(mn)^\gamma + n\xi) \right| \ll x^{1-2\kappa}$$

pour tout $H \leq x^{1-\gamma+\kappa}$, $MN = x$, $x^{5\gamma-4-\eta} \leq N \leq x^{1/3}$.

6 Inégalité de Weyl-van der Corput généralisée

L'inégalité de Weyl-van der Corput affirme pour N et Q entiers ≥ 1 , et z_n des nombres complexes que

$$\left| \sum_{n=1}^N z_n \right|^2 \leq \left(1 + \frac{N-1}{Q} \right) \sum_{|q| < Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q} \right) \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq n+q \leq N}} z_{n+q} \bar{z}_n.$$

On utilise en général cette inégalité avec $z_n = e(f(n))$ où f est une fonction régulière, pour laquelle on a un bon contrôle de $f(n+q) - f(n)$. Heath-Brown (voir [7, p. 255]) a utilisé une généralisation de cette inégalité basée sur un découpage et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, notamment pour le traitement des sommes de type II évoqué plus haut. Cette méthode est devenue classique sous le nom de méthode des petits intervalles. Malheureusement elle introduit un ensemble de sommation assez compliqué, qui ne peut être simplifié qu'au prix d'une majoration brutale. Nous proposons ici une généralisation plus souple de l'inégalité de Weyl-van der Corput, et qui respecte l'objectif original de Heath-Brown.

Lemme 5 Soient $(z_n)_{n=1, \dots, N}$ des nombres complexes et $(x_n)_{n=1, \dots, N}$ des réels. On définit

$$\rho(t) = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right)^2, \quad \rho(0) = 1, \quad \hat{\rho}(u) = \max(0, 1 - |u|).$$

Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N z_n \right|^2 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho(\delta k) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i \bar{z}_j e(k(x_i - x_j)) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i \bar{z}_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\rho} \left(\frac{x_i - x_j + k}{\delta} \right). \end{aligned}$$

En particulier si de plus on suppose $\max_{1 \leq i, j \leq N} |x_i - x_j| \leq 1 - \delta$ (donc $0 < \delta \leq 1$), alors

$$\left| \sum_{n=1}^N z_n \right|^2 \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{\rho} \left(\frac{x_i - x_j}{\delta} \right) z_i \bar{z}_j.$$

Démonstration On a

$$\left| \sum_{n=1}^N z_n \right|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho(\delta k) \left| \sum_{n=1}^N z_n e(kx_n) \right|^2$$

et en développant le carré du membre de droite on obtient la première inégalité.

Notons $\rho_\delta(t) = \delta\rho(\delta t)$.

En appliquant la formule sommatoire de Poisson au membre de droite on obtient

$$\left| \sum_{n=1}^N z_n \right|^2 \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \rho_\delta(t) \left| \sum_{n=1}^N z_n e(tx_n) \right|^2 e(tk) dt.$$

Dans l'intégrale du membre de droite on développe le carré et on intervertit les sommes, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i \bar{z}_j \int_{\mathbb{R}} \rho_\delta(t) e(t(x_i - x_j + k)) dt = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i \bar{z}_j \widehat{\rho}_\delta(x_i - x_j + k)$$

et on obtient la seconde inégalité car $\widehat{\rho}_\delta(x) = \widehat{\rho}(x/\delta)$.

On a $\widehat{\rho}_\delta(x) = 0$ pour $|x| \geq \delta$. Lorsque $|x_i - x_j| \leq 1 - \delta$, on a $|x_i - x_j + k| \geq \delta$ pour tout $k \neq 0$, et donc $\widehat{\rho}_\delta(x_i - x_j + k) = 0$ pour tout $k \neq 0$, ce qui prouve la troisième inégalité. ■

Application

Pour majorer la somme du membre de gauche de (2) nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il suffit de majorer uniformément pour $\xi \in \mathbb{R}$ l'expression

$$M \sum_{m \sim M} \left| \sum_{n \sim N} \sum_{h \sim H} \varepsilon_h e(h(mn)^\gamma + n\xi) \right|^2.$$

Nous appliquons le lemme 5 au carré qui figure dans l'expression précédente, avec

$$z_i = \varepsilon_h e(h(mn)^\gamma + n\xi), \quad x_i = \frac{hn^\gamma}{8HN^\gamma}$$

et finalement pour $0 < \delta \leq 1/8$ le carré du membre de gauche de (2) est majoré pour un certain $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$M\delta^{-1} \sum_{m \sim M} \sum_{h_1 \sim H} \sum_{h_2 \sim H} \varepsilon_{h_1} \bar{\varepsilon}_{h_2} \sum_{n_1 \sim N} \sum_{n_2 \sim N} \widehat{\rho} \left(\frac{h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma}{\delta H N^\gamma} \right) e((h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma)m^\gamma + (n_1 - n_2)\xi)$$

ou encore

$$M\delta^{-1} \sum_{h_1 \sim H} \sum_{h_2 \sim H} \left| \sum_{n_1 \sim N} \sum_{n_2 \sim N} \widehat{\rho} \left(\frac{h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma}{\delta H N^\gamma} \right) \sum_{m \sim M} e((h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma)m^\gamma + (n_1 - n_2)\xi) \right|.$$

Nous appellerons cette dernière expression S.

7 Transformation B sur m

Rappelons que d'après le lemme 1 de [3] par exemple, le nombre $\mathcal{Q}(H, N, \Delta)$ de quadruplets (h_1, h_2, n_1, n_2) avec $h_1, h_2 \sim H, n_1, n_2 \sim N$ tels que

$$|h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma| \leq \Delta H N^\gamma$$

vérifie

$$\mathcal{Q}(H, N, \Delta) \ll_\gamma H N \log(2HN) + \Delta H^2 N^2.$$

La « diagonale épaisse » est l'ensemble des quadruplets (h_1, h_2, n_1, n_2) avec

$$|h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma| \leq N^{\gamma-1} \log(2HN)$$

(qui correspond à $\Delta = (HN)^{-1} \log(2HN)$) et sa contribution à S est $\delta^{-1} H M^2 N \cdot \log(2HN)$ ce qui nous impose la condition $\delta \gg x^{4\kappa} \log(2HN) H/N$. Comme par ailleurs nous avons intérêt à prendre δ le plus petit possible, nous choisissons

$$\delta = x^{4\kappa} \log(2HN) \frac{H}{N}$$

et quitte à perdre un facteur $\log x$, nous pouvons supposer maintenant que

$$h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \sim \Delta H N^\gamma$$

pour un certain Δ qui vérifie $(HN)^{-1} \log(2HN) \leq \Delta \leq \delta$.

En appliquant par exemple le lemme 2.9 de [5], on a pour $u > 0$

$$\sum_{m \sim M} e(um^\gamma) \ll u^{1/2} M^{\gamma/2} + u^{-1} M^{1-\gamma}.$$

Nous appliquons cette formule à S , avec

$$u = h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \asymp \Delta H N^\gamma$$

et nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned} S &\ll M \delta^{-1} \Delta H^2 N^2 (\Delta^{1/2} H^{1/2} x^{\gamma/2} + \Delta^{-1} H^{-1} x^{-\gamma} M) \\ &\ll x^2 \left(\frac{\Delta}{\delta} (\Delta^{1/2} H) H^{3/2} x^{\gamma/2-1} N + \frac{H}{\delta x^\gamma} \right). \end{aligned}$$

Lorsque $\Delta H^2 \leq 1$ cette expression est négligeable pour $N \ll x^{\gamma-1/2-\eta}$ avec $\eta \ll \kappa$, ce qui est une condition acceptable pour $\gamma > 5/6$.

Nous pouvons donc maintenant supposer $H^{-2} \leq \Delta \leq \delta$.

En appliquant par exemple le lemme 3.6 de [5], on a pour $u > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{M_1 < m \leq M_2} e(um^\gamma) &= c_1(\gamma) \sum_{M_1^* < m^* \leq M_2^*} u^{\frac{1}{2-2\gamma}} m^{*\frac{\gamma-2}{2-2\gamma}} e(c_2(\gamma) u^{\frac{1}{1-\gamma}} m^{*\frac{-\gamma}{1-\gamma}}) \\ &\quad + O(u^{-1/2} M_2^{1-\gamma/2}) + O(\log(2 + uM_1^{\gamma-1})) \end{aligned}$$

avec $M_1^* = \gamma u M_2^{\gamma-1}$ et $M_2^* = \gamma u M_1^{\gamma-1}$.

Nous appliquons cette formule à S , avec

$$u = h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \asymp \Delta H N^\gamma$$

et la contribution des termes d'erreur est majorée par

$$M \delta^{-1} \Delta H^2 N^2 (\Delta^{-1/2} H^{-1/2} M^{1-\gamma/2} N^{-\gamma/2} + \log x)$$

donc par

$$x^2 (\delta^{-1} \Delta^{1/2} H^{3/2} M^{-\gamma/2} N^{-\gamma/2} + \Delta \delta^{-1} (\log x) H^2 M^{-1})$$

qui est négligeable pour $N \ll x^{3\gamma-2-\eta}$ avec $\eta \ll \kappa$.

Revenons à la somme principale. La condition $M_1^* < m^* \leq M_2^*$ équivaut à

$$c M_1^{1-\gamma} m^* \leq u < c M_2^{1-\gamma} m^*.$$

Lorsqu'on intervertit les sommations sur (n_1, n_2) avec la sommation sur m^* , et qu'on fixe définitivement m^* , on obtient

$$h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \sim \Delta H N^\gamma.$$

Nous avons déjà cette condition, avec des constantes impliquées probablement différentes. Il reste donc à majorer

$$M \delta^{-1} \Delta^{1/2} H^{1/2} x^{\gamma/2} \cdot \sum_{h_1 \sim H} \sum_{h_2 \sim H} \left| \sum_{n_1 \sim N} \sum_{n_2 \sim N} \left(1 - \frac{u}{\delta H N^\gamma}\right) \left(\frac{u}{\Delta H N^\gamma}\right)^{\frac{1}{2-2\gamma}} e(g(u) + (n_1 - n_2)\xi) \right|$$

où $u = h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \sim \Delta H N^\gamma$, $g(u) = c_2(\gamma) u^{\frac{1}{1-\gamma}} m^{*\frac{-\gamma}{1-\gamma}}$ et $H^{-2} \leq \Delta \leq \delta$.

8 Approximations rationnelles et découpage

Notre but est de majorer une expression de la forme

$$\sum_{h_1 \sim H} \sum_{h_2 \sim H} \left| \sum_{n_1 \sim N} \sum_{n_2 \sim N} \varphi(u) e(g(u) + (n_1 - n_2)\xi) \right|$$

où $u = h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \sim \Delta H N^\gamma$.

Pour $1 < c < 7/6$, l'ensemble des $(h_1/h_2)^c$, lorsque $h_1 \sim H$, $h_2 \sim H$, est inclus dans un intervalle J de longueur $\asymp 1$. On divise J en intervalles J_k , $k = 1, \dots, K \asymp \Delta^{-1}$ de longueurs égales $L \asymp 1/K$. Dans chaque intervalle J_k , on choisit un rationnel a_k/b_k , $\text{pgcd}(a_k, b_k) = 1$, de dénominateur b_k minimum, tel que $L^{-1/2} \leq b_k \leq 4L^{-1}$ (dans J_k il y a au plus 2 rationnels dont le dénominateur est $< L^{-1/2}$ et au moins 3 rationnels dont le dénominateur est $\leq 4L^{-1}$).

Notons que $L^{-1} \asymp \Delta^{-1} \ll H^2$ est négligeable devant N pour $2(1 - \gamma) < 5\gamma - 4$, i.e., pour $\gamma > 6/7$, donc

$$L^{-1/2} \leq b_k \leq N.$$

On pose

$$\mathcal{A}_k = \{\underline{h} = (h_1, h_2), h_1 \sim H, h_2 \sim H, (h_1/h_2)^c \in J_k\}$$

et pour $\underline{h} = (h_1, h_2) \in \mathcal{A}_k$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}(\underline{h}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \sim N, y \sim N, h_1 x^\gamma - h_2 y^\gamma \sim \Delta H N^\gamma\} \\ \mathcal{D}(\underline{h}) &= \{n = (n_1, n_2), n_1 \sim N, n_2 \sim N, h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \sim \Delta H N^\gamma\}. \end{aligned}$$

Avec ce découpage on doit majorer

$$\sum_{k=1}^K \sum_{\underline{h} \in \mathcal{A}_k} \left| \sum_{(n_1, n_2) \in \mathcal{D}(\underline{h})} \varphi(u) e(g(u) + (n_1 - n_2)\xi) \right|$$

où $u = h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma \sim \Delta H N^\gamma$, $g(u) = c_2(\gamma) u^{\frac{1}{1-\gamma}} m^* \frac{-\gamma}{1-\gamma}$, $\varphi(u) = (1 - \frac{u}{\delta H N^\gamma}) \cdot (\frac{u}{\Delta H N^\gamma})^{\frac{1}{2-\gamma}}$ et $H^{-2} \leq \Delta \leq \delta$.

9 Découpage de $\mathcal{D}(\underline{h})$ en segments

On fixe maintenant $\underline{h} = (h_1, h_2) \in \mathcal{A}_k$, pour un certain k , et on pose $a_k = a$, $b_k = b$ pour simplifier. Par construction de J_k on a

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^c = \frac{a}{b} + \theta, \quad (a, b) = 1, b \geq 1, |\theta| \leq L.$$

Pour r réel, on pose

$$\Gamma_r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = \frac{a}{b}x - r \right\}.$$

On obtient une partition de \mathbb{Z}^2 à l'aide des $\Gamma_{d/b} \cap \mathbb{Z}^2$ lorsque d décrit \mathbb{Z} . En particulier on a

$$\begin{aligned} &\sum_{(n_1, n_2) \in \mathcal{D}(\underline{h})} \varphi(u) e(g(u) + (n_1 - n_2)\xi) \\ &\ll \sum_r \left| \sum_{(n_1, n_2) \in \Gamma_r \cap \mathcal{D}(\underline{h}) \cap \mathbb{Z}^2} \varphi(u) e(g(u) + (n_1 - n_2)\xi) \right| \end{aligned}$$

où $u = h_1 n_1^\gamma - h_2 n_2^\gamma$.

Cette dernière inégalité est la clef de toute la démonstration. Le symbole \sum_r signifie qu'on somme sur tous les $r = d/b$ tels que $\Gamma_r \cap \mathcal{D}(\underline{h}) \neq \emptyset$.

Lemme 6 Si Γ est une droite du plan, alors $\Gamma \cap \tilde{\mathcal{D}}(\underline{h})$ est formé de $O(1)$ segments.

Démonstration La condition $h_1x^\gamma - h_2y^\gamma \sim \Delta HN^\gamma$ peut s'écrire

$$(\lambda x^\gamma - \mu_1)^c \leq y \leq (\lambda x^\gamma - \mu_2)^c$$

où $\lambda = h_1/h_2 \asymp 1$ et $\mu_1, \mu_2 \asymp \Delta N^\gamma$.

La fonction $x \mapsto (\lambda x^\gamma - \mu)^c$ est convexe car

$$\frac{d^2}{dx^2}(\lambda x^\gamma - \mu)^c = \lambda \mu (1 - \gamma)x^{\gamma-2}(\lambda x^\gamma - \mu)^{c-2} > 0.$$

Par conséquent $\tilde{\mathcal{D}}(\underline{h})$ est la différence des deux ensembles convexes, d'où le résultat. ■

Lemme 7 Le nombre de Γ_r , avec $r = d/b$, nécessaires pour recouvrir $\mathcal{D}(\underline{h})$ est $\ll b\Delta N$. De plus si $\Gamma_r \cap \mathcal{D}(\underline{h}) \neq \emptyset$, alors $r \asymp \Delta N$.

Démonstration Soit $(n_1, n_2) \in \mathcal{D}(\underline{h})$. Alors $u = h_1n_1^\gamma - h_2n_2^\gamma \asymp \Delta HN^\gamma$. Mais

$$u = h_2 \left(\frac{h_1}{h_2} n_1^\gamma - n_2^\gamma \right) = h_2 \left(\left(\frac{a}{b} + \theta \right)^\gamma n_1^\gamma - n_2^\gamma \right).$$

En posant

$$\left(\frac{a}{b} + \theta \right)^\gamma = \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma + \theta_1$$

on définit $\theta_1 \asymp \theta \ll L$, et on a

$$u = h_2 \left(\left(\frac{a}{b} n_1 \right)^\gamma - n_2^\gamma + \theta_1 n_1^\gamma \right) \asymp \Delta HN^\gamma.$$

En choisissant K assez grand pour que $L \ll \Delta$ avec une constante impliquée suffisamment petite par rapport aux constantes sous-entendues dans \asymp , $\theta_1 n_1^\gamma$ devient négligeable devant ΔN^γ , et on obtient

$$\left(\frac{a}{b} n_1 \right)^\gamma - n_2^\gamma + \theta_1 n_1^\gamma \asymp \left(\frac{a}{b} n_1 \right)^\gamma - n_2^\gamma \asymp \Delta N^\gamma$$

et par conséquent

$$\frac{a}{b} n_1 - n_2 \asymp \Delta N.$$

Maintenant si $(n_1, n_2) \in \Gamma_r \cap \mathcal{D}(\underline{h})$, alors

$$n_2 = \frac{a}{b} n_1 - r$$

on en déduit que

$$r \asymp \Delta N.$$

Mais comme les $r = d/b$ sont espacés de $1/b$, il y a $O(b\Delta N)$ valeurs possibles de r . ■

10 Somme d'exponentielles sur un segment Γ

On fixe maintenant $r = d/b$ et on désigne par $\tilde{\Gamma}$ l'un des $O(1)$ segments qui composent $\Gamma_r \cap \mathcal{D}(\underline{h})$. Soit $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{Z}^2$. On veut majorer

$$\sigma = \sum_{(n_1, n_2) \in \Gamma} \varphi(u) e(g(u) + (n_1 - n_2)\xi).$$

On procède de la façon suivante: on paramètre le segment Γ à l'aide d'une variable v , on écrit alors

$$\sigma = \sum_v \phi(v) e(\tilde{g}(v)).$$

On élimine $\phi(v)$ par une sommation par parties et on conclut à l'aide d'un critère de la dérivée cinquième, qui donne sous de bonnes conditions une majoration du type

$$\sum_{v \in I} e(\tilde{g}(v)) \ll_\varepsilon |I|^{1+\varepsilon} \lambda_5^{\alpha_5}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, avec $\lambda_5 \asymp \tilde{g}^{(5)}$.

10.1 Paramétrage de Γ

Pour $(n_1, n_2) \in \Gamma$, on a

$$n_2 = \frac{a}{b}n_1 - r.$$

Soit $\pi(\tilde{\Gamma})$ (resp. $\pi(\Gamma)$) la projection de $\tilde{\Gamma}$ (resp. Γ) sur l'axe des x parallèlement à l'axe des y . Soit n_0 le plus petit élément de $\pi(\Gamma)$. Alors

$$\pi(\Gamma) = \left\{ n_0 + bv, v \ll \frac{N}{b} \right\}.$$

Pour $t \in \pi(\tilde{\Gamma})$, on pose

$$u(t) = h_1 t^\gamma - h_2 \left(\frac{a}{b}t - r \right)^\gamma.$$

On a

$$\sigma = \sum_{0 \leq v \ll N/b} \varphi(u(n_0 + bv)) e\left(g(u(n_0 + bv)) + \left(\frac{b-a}{b}n_0 + (b-a)v + r \right) \xi \right).$$

10.2 Calcul de la dérivée cinquième

Lemme 8 On a, pour $t \in \pi(\tilde{\Gamma})$, en notant $u^{(j)}(t)$ la dérivée j -ème de $u(t)$, pour j borné,

$$u^{(j)}(t) = A\gamma(\gamma - 1) \cdots (\gamma - j)t^{\gamma-1-j} (1 + v_j(t))$$

avec $A \asymp \Delta H N$ et $v_j(t) \ll_j L/\Delta + \Delta$.

Démonstration On a

$$u^{(j)}(t) = \gamma(\gamma - 1) \cdots (\gamma - j + 1) \left(h_1 t^{\gamma-j} - h_2 \left(\frac{a}{b}\right)^j \left(\frac{a}{b}t - r\right)^{\gamma-j} \right)$$

et en utilisant la relation $(h_1/h_2)^c = a/b + \theta$ on obtient

$$u^{(j)}(t) = \gamma(\gamma - 1) \cdots (\gamma - j + 1) h_2 \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma t^{\gamma-j} \left(\left(1 + \frac{b\theta}{a}\right)^\gamma - \left(1 - \frac{br}{at}\right)^{\gamma-j} \right).$$

Mais

$$\left(1 + \frac{b\theta}{a}\right)^\gamma - \left(1 - \frac{br}{at}\right)^{\gamma-j} = \gamma \frac{b\theta}{a} + (\gamma - j) \frac{br}{at} + O(\theta^2) + O_j(r^2/t^2)$$

et comme $r \asymp \Delta N, t \asymp N, |\theta| \leq L \ll \Delta$, on a finalement

$$u^{(j)}(t) = \gamma(\gamma - 1) \cdots (\gamma - j) h_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma-1} r t^{\gamma-1-j} \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma - j} \frac{\theta t}{r} + O_j(\Delta)\right). \blacksquare$$

En prenant K assez grand, L peut être pris suffisamment petit par rapport à Δ (par exemple $10^{-5}\Delta$), et le lemme précédent nous permet de calculer l'ordre de grandeur de la dérivée cinquième de $g(u(t))$, en utilisant simplement les règles de dérivation usuelles des fonctions composées. On a

$$g(u(t)) \asymp \Delta x, \quad \left(g(u(t))\right)^{(5)} \asymp \frac{\Delta x}{N^5}.$$

De même on peut calculer l'ordre de grandeur de la dérivée de $\varphi(u(t))$, on a

$$(3) \quad \varphi(u(t)) \asymp 1, \quad \left(\varphi(u(t))\right)' \asymp \frac{1}{N}.$$

10.3 Majoration de σ

Grâce à (3), nous pouvons éliminer dans σ le facteur $\varphi(u(n_0 + bv))$ par sommation par parties (lemme 7.2 de [5] par exemple).

Le théorème 5.13 de [17] permet d'énoncer le critère de la dérivée cinquième suivant

Lemme 9 Soit f une fonction réelle 5 fois continûment dérivable sur un intervalle I de longueur $|I| \geq 1$, telle que $|f^{(5)}| \asymp \lambda_5$ sur I . Alors

$$\left| \sum_{n \in I} e(f(n)) \right| \ll |I| \lambda_5^{1/30} + |I|^{7/8} \lambda_5^{-1/30}.$$

Nous appliquons ce lemme à σ avec n remplacé par v et f remplacée par

$$g(u(n_0 + bv)) + \left(\frac{b-a}{b}n_0 + (b-a)v + r \right) \xi.$$

On a alors

$$|I| \asymp \frac{N}{b} \geq 1, \quad \lambda_5 \asymp \frac{\Delta x b^5}{N^5}$$

donc en posant

$$\beta = (\Delta x)^{1/30} \left(\frac{b}{N} \right)^{1/6} + (\Delta x)^{-1/30} \left(\frac{N}{b} \right)^{1/24}$$

on a

$$\sigma \ll \frac{N}{b} \beta$$

alors que la majoration triviale donne

$$\sigma \ll \frac{N}{b}.$$

11 Conclusion

La majoration de σ nous permet d'obtenir pour $\underline{h} \in \mathcal{A}_k$ la majoration

$$\sum_{(n_1, n_2) \in \mathcal{D}(\underline{h})} \varphi(u) e(g(u) + (n_1 - n_2)\xi) \ll b \Delta N \frac{N}{b} \beta_k = \Delta N^2 \beta_k$$

où

$$\beta_k = \min(1, \Delta^{1/30} x^{1/30} b_k^{1/6} N^{-1/6} + \Delta^{-1/30} x^{-1/30} b_k^{-1/24} N^{1/24}).$$

Il reste donc à majorer

$$M \delta^{-1} \Delta^{1/2} H^{1/2} x^{\gamma/2} \Delta N^2 \sum_{k=1}^K \sum_{\underline{h} \in \mathcal{A}_k} \beta_k.$$

Soit $\mathcal{A}_k(d)$ l'ensemble des $(h_1, h_2) \in \mathcal{A}_k$ tels que $\text{pgcd}(h_1, h_2) = d$.

Soit $1 \leq D \ll H$ un paramètre à choisir ultérieurement. On a

$$\sum_{k=1}^K \sum_{\underline{h} \in \mathcal{A}_k} \beta_k = \sum_{1 \leq d \leq D} \sum_{k=1}^K \sum_{\underline{h} \in \mathcal{A}_k(d)} \beta_k + \sum_{D < d \ll H} \sum_{k=1}^K \sum_{\underline{h} \in \mathcal{A}_k(d)} \beta_k.$$

Lorsque $\text{pgcd}(h_1, h_2) = d$, les $(h_1/h_2)^c$ sont espacés de $\gg d^2 H^{-2}$.

Par conséquent, le nombre d'éléments de $\mathcal{A}_k(d)$ est $\ll \frac{H^2 L}{d^2} + 1$.

De même pour $d \ll H$ le nombre de (h_1, h_2) , $h_1, h_2 \sim H$, $\text{pgcd}(h_1, h_2) = d$ est $\ll \frac{H^2}{d^2}$.

Ainsi en utilisant la majoration triviale $\beta_k \leq 1$ lorsque $d > D$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \sum_{\underline{h} \in \mathcal{A}_k} \beta_k &\ll \sum_{1 \leq d \leq D} \sum_{k=1}^K \left(\frac{H^2 L}{d^2} + 1 \right) \beta_k + \sum_{D < d \ll H} \frac{H^2}{d^2} \\ &\ll H^2 L \sum_{k=1}^K \beta_k + DK + \frac{H^2}{D} \\ &\ll \frac{H^2}{K} \sum_{k=1}^K \beta_k + HK^{1/2} \end{aligned}$$

en utilisant $L \asymp 1/K$ et en choisissant $D \asymp HK^{-1/2}$, $D \geq 1$, ce qui est possible car $K \asymp \Delta^{-1}$ et $\Delta H^2 \gg 1$.

La contribution du terme $HK^{1/2}$ est

$$\ll M\delta^{-1} \Delta^{1/2} H^{1/2} x^{\gamma/2} \Delta N^2 HK^{1/2}$$

qui en utilisant $K \asymp \Delta^{-1}$, $\Delta \leq \delta$, $H \leq x^{1-\gamma+\eta}$, $MN = x$, est négligeable dès que

$$N \ll x^{\gamma-1/2-\eta}$$

avec $\eta \ll \kappa$, ce qui est acceptable pour tout $\gamma > 5/6$.

Il reste donc finalement à majorer

$$M\delta^{-1} \Delta^{1/2} H^{1/2} x^{\gamma/2} \Delta N^2 H^2 \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \beta_k.$$

D'après le lemme 1.6.1 de [8], pour tout $B > 0$, le nombre de k tels que $b_k \geq B$ est

$$\ll \frac{K}{B^2 L} + \frac{K}{B}$$

(autrement dit, « génériquement » $b_k \asymp \sqrt{1/L}$, les k pour lesquels b_k est beaucoup plus grand que $\sqrt{1/L}$ sont rares).

Soit $B \geq L^{-1/2} \asymp \Delta^{-1/2}$. Le β_k correspondant à un $b_k \asymp B$ est

$$\ll \Delta^{1/30} x^{1/30} B^{1/6} N^{-1/6} + \Delta^{-1/30} x^{-1/30} B^{-1/24} N^{1/24}.$$

La contribution des k tels que $b_k \asymp B$ est donc proportionnelle à une puissance négative de B et la contribution maximum est atteinte pour les $B \asymp \Delta^{-1/2}$.

Il reste donc à majorer

$$M\delta^{-1} \Delta^{1/2} H^{1/2} x^{\gamma/2} \Delta N^2 H^2 (\Delta^{1/30} x^{1/30} \Delta^{-1/12} N^{-1/6} + \Delta^{-1/30} x^{-1/30} \Delta^{1/48} N^{1/24}).$$

Le premier terme est acceptable si

$$N \ll x^{(147\gamma-119)/23-\eta}$$

et le second terme est acceptable si

$$N \ll x^{(597\gamma - 469)/133 - \eta}.$$

En définitive la première condition est la plus restrictive et nous impose

$$\frac{147\gamma - 119}{23} > \frac{1}{3}$$

et donc

$$c < \frac{441}{380} = 1.1605263 \dots$$

Nous avons montré le

Théorème 2 Pour tout $1 < c < \frac{441}{380} = 1.1605263 \dots$, on a

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \log x} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Amélioration

Le deuxième auteur [16, Théorème 1] a montré que le critère de la dérivée cinquième (le lemme 9) pouvait s'améliorer en

$$\left| \sum_{n \in I} e(f(n)) \right| \ll_\varepsilon |I|^{1+\varepsilon} \lambda_5^{7/192}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $|I| \lambda_5^{7/16} \gg 1$.

Nous reformulons ici ce résultat sous une forme légèrement différente, utile pour des références ultérieures:

Lemme 10 Soit f une fonction réelle 5 fois continûment dérivable sur un intervalle I de longueur $|I| \geq 1$, telle que $|f^{(5)}| \asymp \lambda_5$ sur I . Alors

$$\left| \sum_{n \in I} e(f(n)) \right| \ll_\varepsilon |I|^\varepsilon (|I| \lambda_5^{7/192} + \lambda_5^{-77/192}).$$

Démonstration Les notations ici sont indépendantes du reste de l'article. Nous pouvons supposer par commodité $I = [1, M]$ où $M > 1$ est un entier. Le résultat est trivial lorsque $M \ll \lambda_5^{-77/192}$ et il est acquis lorsque $M \gg \lambda_5^{-7/16}$ par le Théorème 1 de [16]. On peut donc supposer $\lambda_5^{-77/192} \ll M \ll \lambda_5^{-7/16}$. Soit N entier tel que $N \asymp \lambda_5^{-7/16}$. Nous pouvons prolonger f en une fonction 5 fois continûment dérivable sur $[1, N]$ en posant pour h réel, $0 \leq h \leq N - M$:

$$f(M + h) = f(M) + hf'(M) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(M) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(M) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(M) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(M).$$

D'après le lemme 3 on a

$$\left| \sum_{n=1}^M e(f(n)) \right| \ll (1 + \log N) \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^N e(f(n) + n\xi) \right|$$

et on peut appliquer le Théorème 1 de [16] à la somme de droite précédente, ce qui achève la démonstration. ■

Ce lemme nous permet d'augmenter légèrement notre intervalle du Théorème 2. Montrons que le premier terme est prépondérant:

$$\frac{|I|\lambda_5^{7/192}}{\lambda_5^{-77/192}} = |I|\lambda_5^{7/16} \asymp \Delta^{7/16} x^{7/16} b^{19/16} N^{-19/16}$$

et par construction, $b \geq L^{-1/2} \asymp \Delta^{-1/2}$, donc

$$|I|\lambda_5^{7/16} \gg \Delta^{-5/32} x^{7/16} N^{-19/16} \gg \delta^{-5/32} x^{7/16} N^{-19/16}.$$

La condition $|I|\lambda_5^{7/16} \gg 1$ nous conduit à

$$N \ll x^{(5\gamma+9)/33-\eta}$$

ce qui est acceptable pour $\gamma > 2/5$.

Il reste à majorer

$$M\delta^{-1} \Delta^{1/2} H^{1/2} x^{\gamma/2} \Delta N^2 H^2 \Delta^{7/192} x^{7/192} \Delta^{-35/384} N^{-35/192}$$

ce qui nous conduit à

$$N \ll x^{(939\gamma-761)/143-\eta}$$

et finalement à

$$c < \frac{2817}{2426} = 1.16117\dots$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 1.

Références

- [1] R. C. Baker, G. Harman, and J. Rivat, *Primes of the form $[n^c]$* . J. Number Theory **50**(1995), 261–277.
- [2] J.-M. Deshouillers, *Nombres premiers de la forme $[n^c]$* . C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **282**(1976), A131–A133.
- [3] E. Fouvry and H. Iwaniec, *Exponential Sums with Monomials*. J. Number Theory **33**(1989), 311–333.
- [4] J. Friedlander and H. Iwaniec, *Using a parity-sensitive sieve to count prime values of a polynomial*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **94**(1997), 1054–1058.
- [5] S. Graham and G. Kolesnik, *Van der Corput's Method of Exponential Sums*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **126**, Cambridge University Press, 1991.
- [6] D. R. Heath-Brown, *Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity*. Canad. J. Math. **34**(1982), 1365–1377.
- [7] ———, *The Piatetski-Shapiro Prime Number Theorem*. J. Number Theory **16**(1983), 242–266.

- [8] M. Huxley, *Area, Lattice Points and Exponential Sums*. London Math. Soc. Monographs New Series **13**, Oxford Science Publications, 1996.
- [9] C.-H. Jia, *On Piatetski-Shapiro Prime Number Theorem II*. Science in China **36**(1993), 913–926.
- [10] G. A. Kolesnik, *The distribution of primes in sequences of the form $\lfloor n^c \rfloor$* . Mat. Zametki **2**(1967), 117–128.
- [11] ———, *Primes of the form $\lfloor n^c \rfloor$* . Pacific J. Math. **118**(1985), 437–447.
- [12] D. Leitmann and D. Wolke, *Primzahlen der Gestalt $\lfloor f(n) \rfloor$* . Math. Z. **145**(1975), 81–92.
- [13] H.-Q. Liu and J. Rivat, *On the Piatetski-Shapiro Prime Number Theorem*. Bull. London Math. Soc. **24**(1992), 143–147.
- [14] I. Piatetski-Shapiro, *On the distribution of prime numbers in sequences of the form $\lfloor f(n) \rfloor$* . Math. Sbornik **33**(1953), 559–566.
- [15] J. Rivat, *Autour d'un théorème de Piatetski-Shapiro (Nombres premiers dans la suite $\lfloor n^c \rfloor$)*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, 1992.
- [16] P. Sargos, *Un critère de la dérivée cinquième pour les sommes d'exponentielles*. Bull. London Math. Soc. **32**(2000), 398–402.
- [17] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function, revised by D. R. Heath-Brown*. Oxford Science Publications, 2nd edition, 1986.
- [18] J. Vaaler, *Some extremal functions in Fourier analysis*. Bull. Amer. Math. Soc. **12**(1985), 183–216.

*Institut Élie Cartan,
Université Nancy I,
B.P. 239,
54506 Vandœuvre cedex,
France
courriel: rivat@iecn.u-nancy.fr
sargos@iecn.u-nancy.fr*