CORRESPONDENCE.

ON THE GROUPING OF ENDOWMENT ASSURANCES FOR VALUATION.

To the Editor of the Journal of the Institute of Actuaries.

SEHR GEEHRTER HERR,—Sie hatten die Güte, mir im Juli 1898 Gastfreundschaft zu gewähren, indem Sie meinen Brief über die Gruppenrechnung der Prämien-Reserven für gemischte Versicherungen in Ihrem *Journal* (vol. xxxiv, page 150 u. ff.) veröffentlichten.

Ein kürzlich empfangener Brief des Herrn Prof. Dr. Johannes Karup in Gotha veranlasst mich um Publizirung nachstehender Zeilen zu bitten.

Es war mir damals, als ich jenen Brief schrieb wohlbekannt, dass die darin mitgetheilte Methode für die deutschen, oesterreichischen und ungarischen Fachkreise nicht neu sei, wer sie aber zum erstenmale erfunden hat, konnte ich nicht eruiren, darum beschränkte ich mich darauf, zu sagen, dass sie bei uns angewendet wird. Herr Prof. Dr. Karup theilt mir nun mit, dass diese Methode bei der Lebensversicherungs-Bank für Deutschland in Gotha über seinen Vorschlag bereits seit dem Jahre 1878 angewendet wird, und dass die Bank diese Methode der österreichischen Regierung im Jahre 1882, der schweizerischen Regierung aber im Jahre 1884 mitgetheilt hat.

Die Priorität der Erfindung dürfte somit Herrn Prof. Dr. Karup gebühren, so dass es recht und billig wäre, der Methode den Namen Karup's beizulegen, als desjenigen, der sie zum erstenmale erfunden hat. Denn erfunden wurde die Methode von Vielen ganz unabhängig von einander. Zum Beweise dessen, dass sie sich fast von selbst aufdrängt, wenn man sich der geisttödtenden Arbeit der Einzelnberechnung der Reserven für gemischte Versicherungen entziehen will, sei es mir gestattet, mitzutheilen, wie ich sie seinerzeit erfunden habe.

Als nächstliegende Methode zur Gruppirung der gemischten Versicherungen für die Reserveberechnung bot sich die doppelte Gruppirung nach Fälligkeits-Jahren und innerhalb dieser nach

Geburts-Jahren, so dass die Factoren $A_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}$ und $\mathbf{a}_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}$ für alle Versicherungen einer kleinen Gruppe identisch sind.

Da nun

$$A_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}=\frac{M_{x+\kappa}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+\kappa}}=A_{x+\kappa}-\frac{d\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}$$

und $$\mathbf{a}_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}=\frac{\mathbb{N}_{x+\kappa}-\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}=\mathbf{a}_{x+\kappa}-\frac{\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}$$

ist man ohneweiters veranlasst, sämmtliche Untergruppen, für welche $x+\kappa$ dieselbe Zahl ist, zusammenzufassen, weil $\mathbb{N}_{x+n}$ für eine jede einzelne Versicherung constant ist.

Die Technik der Gruppenrechnung ist in der oesterr.-ungarischen Monarchie und im deutschen Reiche sehr ausgebildet, weil man hier auf die ziffermässige Genauigkeit der Resultate seit jeher grosses Gewicht legte, und ich glaube, dass es keine, noch so complizirte Versicherungs-Combination auf ein Leben gibt, für welche ein jeder, auch nur halbwegs gebildete Versicherungs-Techniker nicht mit Leichtigkeit eine Gruppen-Rechnungs-Methode zum Zwecke der Bestimmung der Prämien-Reserven ersinnen würde. So z. B. sind die Methoden für die Gruppen-Rechnung der Reserven für die Versicherungen auf bestimmten Termin (Assurances à Terme Fixe)* $\left(P'=\frac{v^n}{\mathbf{a}_{\overline{xn}|}}\right)$ und für die Erlebens-Versicherungen (Endowments) mit Prämien-Rückgewähr $\left\{P'=\frac{P_{\overline{xn}|}^{\;1}}{1-P(IA)_{\overline{xn}|}^{\;1}}\right\}$ allgemein bekannt.

Da diese Formeln eventuell von Interesse sein könnten, sei es mir gestattet, dieselben hier mitzutheilen.

Versicherungen auf bestimmten Termin.—Wenn V′ die Reserve nach κ Jahren und P′ die jährliche Prämie bedeutet, dann ist

$$V'=v^{n-\kappa}-P'\mathbf{a}_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}=\frac{v^{x+n}}{v^{x+\kappa}}-P'\mathbf{a}_{x+\kappa}+\frac{P'\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}.$$

Erlebens-Versicherungen mit Prämien Rückgewähr.—Wenn, wie vorhin, V′ die Reserve nach κ Jahren und P′ die Prämie bedeutet, so ist

$$\begin{aligned}V'&=P'\frac{\mathbb{N}_x-\mathbb{N}_{x+\kappa}}{D_{x+\kappa}}-P'\frac{R_x-R_{x+\kappa}-\kappa M_{x+\kappa}}{D_{x+\kappa}}\\&=P'\frac{(\mathbb{N}_x-R_x)}{D_{x+\kappa}}+P'\left\{\frac{(x+\kappa)M_{x+\kappa}+R_{x+\kappa}}{D_{x+\kappa}}\right\}-xP'A_{x+\kappa}-P'\mathbf{a}_{x+\kappa}.\end{aligned}$$

Für den Fall, dass die Brutto-Prämie (office premium) rückzuerstatten ist, wird die Formel lauten:

* Das sind Versicherungen zahlbar an einem bestimmten Verfallstage ohne Rücksicht auf das Leben des Versicherten; die Pramienzahlung hört jedoch auf, wenn der Versicherte vor dem Termine stirbt.

https://doi.org/10.1017/S0020268100007010 Published online by Cambridge University Press

$$V' = \frac{P\mathbb{N}_x - P'R_x}{D_{x+\kappa}} + P'\frac{R_{x+\kappa} + (x+\kappa)M_{x+\kappa}}{D_{x+\kappa}} - xP'A_{x+\kappa} - Pa_{x+\kappa},$$

wo P die Netto- und P′ die Brutto-Prämie bedeutet.

Wie man auch bei diesen Ableitungen sieht, kommt es immer nur auf einen geschickten Griff an, um die Reserve-Formeln für die Gruppen-Rechnung brauchbar zu machen. Den Griff, für $v^{n-\kappa}$, $\frac{v^{x+n}}{v^{x+\kappa}}$ zu schreiben, um eine constante (v^{x+n}) und eine nur vom gegenwärtigen Alter $(x+\kappa)$ abhängige Zahl zu haben, hat z. B. auch Herr Louis Maingie* und zwar ganz unabhängig davon gefunden, dass er schon früher bekannt war.

Für die gütige Veröffentlichung dieser Zeilen bestens dankend, zeichne ich

Hochachtungsvoll

als Ihr ergebener

JULIUS ALTENBURGER.

Triest, den 19 *Januar* 1900.

TRANSLATION.

HONOURED SIR,—In July 1898 you were good enough to afford me the hospitality of your *Journal* by publishing my letter "On the grouping of Endowment Assurances for Valuation" (*J.I.A.*, xxxiv, 150).

A letter which I have lately received from Professor Dr. Johannes Karup, of Gotha, induces me to ask you kindly to give insertion to the following lines.

When I wrote my former letter, I was well aware that the method therein set forth was not a new one as far as German, Austrian, and Hungarian actuaries were concerned; but I could not remember who had first discovered it. I therefore confined myself to stating that it was made use of among us. Dr. Karup now informs me that the method has been employed, at his suggestion, by the Gotha Life Assurance Company ever since 1878. He further states that the Gotha Office communicated it to the Austrian Government in 1882, and to that of Switzerland in 1884.

The honour of the first discovery seems, therefore, to belong to Dr. Karup, and it would be only right to call the method by his name, as that of its first discoverer. As a matter of fact, however, the method has been discovered quite independently by many persons. In reality, it is almost forced upon us if we desire to avoid the overwhelming labour involved in the calculation, case by case, of the

* "Sur quelques Méthodes de grouper les Assurances en vue du calcul des Reserves." Par Louis Maingie.—*Bulletin de l'Association des Actuaires Belges*, No. 7, 15 Décembre 1899.

Reserves for Endowment Assurances, and I may, perhaps, be permitted to explain how I discovered it in my turn.

The most obvious method for collecting Endowment Assurances, with a view to valuation, is that involving a twofold grouping—first, according to the year of maturity; and secondly, the arrangement of each of such groups according to the year of birth—so that the factors $A_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}$ and $\mathbf{a}_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}$ are identical for all the assurances in a sub-group.

Now since

$$A_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}=\frac{M_{x+\kappa}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+\kappa}}=A_{x+\kappa}-\frac{d\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}$$

and $$\mathbf{a}_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}=\frac{\mathbb{N}_{x+\kappa}-\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}=\mathbf{a}_{x+\kappa}-\frac{\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}$$

the possibility suggested itself of collecting together all the sub-groups in which $x+\kappa$ was the same, since $\mathbb{N}_{x+n}$ is constant for each individual assurance.

The art of the calculation of values in groups is very highly developed in Austria-Hungary and in Germany, because in these countries great importance has always been attached to the arithmetical accuracy of results; and I believe that there is no combination of assurances on one life, however complex, for which any actuary, even if little more than a beginner, could not easily devise a method of calculation by groups for the purpose of determining the necessary reserves.

For instance, for calculating by groups the reserves for Fixed Term Assurances (Assurances à Terme Fixe)*, $\left(P'=\frac{v^n}{\mathbf{a}_{x\overline{n}|}}\right)$ and for Endowments with Return of Premium, $\left\{P'=\frac{P_{x\overline{n}|}^{\;\;1}}{1-P(IA)_{x\overline{n}|}^{1}}\right\}$. formulas are universally known. As these formulas may prove of interest, I take leave to communicate them here.

Fixed Term Assurances.—If V' be the reserve after κ years, and P' the annual premium, then

$$V'=v^{n-\kappa}-P'\mathbf{a}_{x+\kappa:\overline{n-\kappa}|}=\frac{v^{x+n}}{v^{x+\kappa}}-P'\mathbf{a}_{x+\kappa}+\frac{P'\mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+\kappa}}.$$

Endowments with Return of Premium.—If, as before, V' be the reserve after κ years, and P' the premium, then

$$V'=P'\frac{\mathbb{N}_x-\mathbb{N}_{x+\kappa}}{D_{x+\kappa}}-P'\frac{R_x-R_{x+\kappa}-\kappa M_{x+\kappa}}{D_{x+\kappa}}$$

$$=P'\frac{(\mathbb{N}_x-R_x)}{D_{x+\kappa}}+P'\left\{\frac{(x+\kappa)M_{x+\kappa}+R_{x+\kappa}}{D_{x+\kappa}}\right\}-xP'A_{x+\kappa}-P'\mathbf{a}_{x+\kappa}.$$

* These are assurances payable at the end of a fixed term without reference to life; the premiums, however, ceasing should the assured die within the term.

In cases where the gross (office) premium is to be returned, the formula would be as follows:

$$\mathrm{V}'=\frac{\mathrm{P}\mathbb{N}_x-\mathrm{P}'\mathrm{R}_x}{\mathrm{D}_{x+\kappa}}+\mathrm{P}'\frac{\mathrm{R}_{x+\kappa}+(x+\kappa)\mathrm{M}_{x+\kappa}}{\mathrm{D}_{x+\kappa}}-x\mathrm{P}'\mathrm{A}_{x+\kappa}-\mathrm{P}\mathbf{a}_{x+\kappa},$$

where P is the net and P′ is the office premium.

It is apparent from these examples that a simple artifice is all that is necessary in order to make the Reserve Formulas applicable for the purpose of valuation by groups. For example, M. Louis Maingie has also conceived the idea of writing $\frac{v^{x+n}}{v^{x+\kappa}}$ instead of $v^{n-\kappa}$, in order to have one constant, v^{x+n}, and a number dependent only on the age attained, $x+\kappa$, and this quite independently, and without being aware of its having already been discovered.

Thanking you in advance for your courtesy in inserting this communication, I beg leave to subscribe myself, with great respect,

Yours faithfully,

JULIUS ALTENBURGER.

[The method of valuation referred to by Herr Altenburger is evidently applicable to any single-life benefit determinable at the expiration of a fixed period. The value of any such benefit, if expressed in commutation symbols, will involve functions of $x+\kappa$, the valuation age, and functions of $x+n$, the age at the expiration of the fixed term. Since $x+n$ does not vary during the whole currency of the contract, the latter functions may be calculated for each policy at the outset, and treated as part of the valuation data, and thus the only variable functions will be functions of $x+\kappa$ alone; and hence all benefits of the same form on lives aged $x+\kappa$, whatever may be the unexpired term, may be grouped with similar whole-life contracts.

It may be pointed out, however, that the method loses much of its advantage when applied to With-Profit Policies, since any change in the Bonus Additions, or in the Reductions of Premium, will necessitate the recalculation of the functions of $x+n$. Moreover, the formulas will in many cases become too complex to be of practical use.

ED. *J.I.A.*]