PART II

PLANETARY AND LUNAR THEORIES

https://doi.org/10.1017/S0074180900012523 Published online by Cambridge University Press

CONSTRUCTION ET PRECISION DE NOUVELLES THEORIES PLANETAIRES

P. Bretagnon and J. Chapront
Bureau des Longitudes, Paris, France

Au Bureau des Longitudes, la construction de théories planétaires a été développée dans trois directions : Une théorie générale du mouvement des quatre grosses planètes du système solaire est en cours d'élaboration à la Faculté des Sciences de Lille, avec L. Duriez (1977), à la suite des travaux de V.A. Brumberg et J. Chapront (1973). Des théories de type classique, à variations séculaires, du mouvement de l'ensemble des planètes de Mercure à Neptune, sont en voie d'achèvement au Bureau des Longitudes. Elles sont construites par P. Bretagnon et J.L. Simon (1975, 1978). Des compléments numériques à l'ensemble de ces recherches, intégrations numériques, représentation des solutions en séries de Tchebychev, sont apportés par P. Rocher, en ce qui concerne le mouvement des petites planètes, et par J. Piraux pour les actions de Pluton sur Uranus et Neptune, dans le cadre des théories à variations séculaires.

1- LES THEORIES PLANETAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES.

Les théories à variations séculaires forment le noyau fondamental de l'ensemble de ces travaux qui ont pour but d'aboutir à la construction de nouvelles éphémérides.

On donne la définition suivante à l'expression "variations séculaires" : les arguments de longues périodes (mouvement des périhélies et des noeuds) sont développés par rapport au temps. Les variables sont les éléments elliptiques :

$$\sigma = (a , \lambda , h , k , p , q)$$

a : demi-grand axe,
λ : longitude moyenne,
$z = k + \sqrt{-1}\,h = e.\exp\sqrt{-1}\,\tilde{\omega}$; e : excentricité, $\tilde{\omega}$: longitude du périhélie
$\zeta = q + \sqrt{-1}\,p = \sin i/2.\exp\sqrt{-1}\,\Omega$; i : inclinaison, Ω : longitude du noeud

Elles sont représentées par des développements de Taylor, en puissance du temps, sous la forme de séries de Fourier, en multiples des longitu-

R. L. Duncombe (ed.), Dynamics of the Solar System, 61–67.

https://doi.org/10.1017/S0074180900012523 Published online by Cambridge University Press

des. Elles sont calculées avec $\sigma = \sigma^{(0)}$ où $\sigma^{(0)}$ est une constante d'intégration qui doit être ajustée à l'Observation.

Deux méthodes ont été envisagées pour le calcul des solutions :
- Une méthode itérative qui substitue de proche en proche les solutions à partir des $\sigma^{(0)}$, et des solutions du problème des deux corps, dans un formulaire fermé des équations différentielles pour les variables elliptiques.
- Une méthode d'accroissement où les seconds membres des équations sont développés en puissance des masses, à partir de la même solution de départ que ci-dessus. Cette méthode nécessite, pour tous les ensembles de planètes, le calcul de dérivées partielles, en très grand nombre.

Les solutions, une fois obtenues à partir d'un jeu de constantes initiales $\sigma^{(0)}$, il reste un problème fondamental à traiter : il faut ajuster la théorie avec l'Observation, après que l'on se soit assuré de la bonne précision interne des fonctions $\sigma(t,\sigma^{(0)})$. Avant d'aborder la comparaison avec les observations elles-mêmes, ce qui nécessite, sur un long intervalle de temps, un travail de compilation considérable, nous avons choisi d'effectuer un ajustement sur un modèle qui représente au mieux l'Observation. Dans ce but, nous avons utilisé l'intégration numérique d'Oesterwinter et Cohen (1972), qui couvre 55 années d'observations méridiennes de l'U.S. Naval Observatory. Un nouveau jeu d'éléments corrigés $\sigma^{(0)}$ est alors déduit.

Par ailleurs, une théorie générale planétaire en variables elliptiques héliocentriques est élaborée. Les éléments σ sont identiques à ceux choisis plus haut. A la place de a et λ on pose :

$\beta = \left(\frac{a}{A}\right)^{-3/2} - 1$, où A est la valeur numérique calculée à partir d'un moyen mouvement N vérifiant la relation : $N^2A^3 = n^2a^3 = GM_\odot$

et, $\varepsilon = \lambda - Nt$

Les seconds membres des équations de Lagrange relatives à ces variables sont développés analytiquement sur ordinateur, selon les puissances croissantes de β, z, $\bar{z}$, ζ, $\bar{\zeta}$ et de $\exp\pm\sqrt{-1}(Nt+\varepsilon)$. On en recherche une solution par approximations successives, ordonnées selon les puissances des masses des planètes.

On a choisi de prendre pour chaque planète n^2a^3 égal à la même valeur $GM_\odot$ pour éviter l'apparition de perturbations séculaires dans le demi-grand axe à la deuxième approximation, qui est alors rigoureusement d'ordre 2 des masses. L. Duriez (1978) donne une démonstration du théorème de Poisson en variables héliocentriques.

σ désignant l'une quelconque des variables, on obtient une solution sans termes séculaires de la forme : $\sigma = \sigma^{(0)} + S_\sigma(\sigma_i^{(0)}, t)$.

$\sigma^{(0)}$ est une série trigonométrique quasipériodique de t, à longues périodes, dont les coefficients sont numériques, et qui est la solution générale de la partie autonome des équations; c'est dans cette solution qu'on introduit les constantes d'intégration. Elle est d'ordre zéro des masses au moins.

$S_\sigma(\sigma_i^{(0)}, t)$ est une série trigonométrique quasipériodique de t, à courtes périodes, dont les coefficients sont des polynômes des fonctions $\sigma_i^{(0)}$, et qui est une solution particulière (sans termes séculaires) de la partie non autonome des équations. Cette solution est d'ordre 1 des masses au moins. Pratiquement, on construit $S_\sigma(\sigma_i^{(0)}, t)$ ordre par ordre en masses, en développant au voisinage des fonctions $\sigma_i^{(0)}$ les seconds membres des équations initialement exprimés en variables σ_i. On y retrouve toutes les inégalités des théories classiques, du type de Le Verrier, y compris celles de petit diviseur, comme la grande inégalité : $(2N_J - 5N_S)t$.

La solution complète est finalement conditionnée par la résolution du système autonome, ce qu'on réalise par approximations successives, à partir de la solution du système linéaire de Laplace-Lagrange. Le calcul du système autonome est poussé aux termes de degré 1, 3 et 5 en variables $z_i^{(0)}$ et $\zeta_i^{(0)}$, pour les ordres 1 et 2 en masses, et pour les 4 grosses planètes.

En ce qui concerne le développement des équations et des solutions, un programme ordinateur permet d'atteindre tous les termes de degré global inférieur ou égal à 5 dans les variables elliptiques : β, z, $\bar{z}$, ζ et $\bar{\zeta}$, et les multiples de $\pm Nt$ inférieurs à 20. L'extension aux degrés supérieurs est envisagée.

Actuellement une tentative de raccordement des solutions du problème général avec les développements des théories à variations séculaires décrites plus haut est envisagée. Elle devrait permettre, dans l'avenir d'étendre la durée de validité des théories de type classique qui restent très précises sur un intervalle de temps d'environ 1000 ans mais qui se dégradent au delà.

Il faut enfin rattacher à ce travail l'autre extrémité de l'étude qui consiste à compléter les solutions par des méthodes numériques, en vue d'un ajustement complet à l'Observation. C'est le cas, en particulier, des perturbations de Pluton, essentielement sur Neptune et Uranus. Une intégration, en séries de polynômes de Tchebychev, des écarts entre la solution de P. Bretagnon et le problème complet est entreprise. A la suite d'un ajustement au modèle d'observation d'Oesterwinter, des corrections significatives ont été déterminées.

2- RESULTATS DES THEORIES A VARIATIONS SECULAIRES.

Nous avons développé nos solutions dans les variables a, λ, $z = k + \sqrt{-1}h$, $\zeta = q + \sqrt{-1}p$ sous forme semi-numérique où seules les longitudes moyennes apparaissent explicitement, les autres éléments étant substitués numériquement. Il est, en effet, impossible de conserver une forme entièrement analytique qui conduirait à une fonction perturbatrice de plusieurs centaines de milliers d'arguments : les développements doivent, en effet, être poussés jusqu'à l'ordre 15 en excentricités-inclinaisons pour le couple Terre-Mars et jusqu'à l'ordre 70 en α (rapport des demi-grands axes) pour le couple Vénus-Terre afin d'atteindre la précision recherchée. Nous avons par ailleurs construit les dérivées de nos solutions par rapport à toutes les constantes d'intégration ce qui constitue, avec les solutions semi-numériques, une théorie entièrement analytique dans un petit domaine autour des constantes que nous avons choisies. L'ensemble des expressions intervenant dans les solutions et dans les dérivées est donné sous forme fermée ce qui facilite la détermination de la précision des résultats.

Au départ nous avons cherché à construire les solutions par la méthode itérative mais il n'a pas été possible, pour les planètes inférieures, de déterminer les arguments quasi-résonants à une précision suffisante. Par contre, cette méthode a donné de bons résultats pour les grosses planètes avec toutefois des difficultés de convergence dans les longitudes d'Uranus et de Neptune.

Pour les besoins des planètes inférieures, nous avons utilisé la méthode d'accroissement par rapport aux masses et actuellement nous avons construit une solution au premier et au deuxième ordre à la précision de $10^{-4''}$ pour les planètes inférieures et $10^{-3''}$ pour les grosses planètes. Nous avons de plus obtenu par la méthode itérative une solution développée jusqu'à l'ordre 6 par rapport aux masses (jusqu'à la puissance cinquième du temps dans les développements de Taylor) pour les grosses planètes. C'est cette solution de la méthode itérative que nous avons retenue pour les grosses planètes en l'améliorant pour certains arguments quasi-résonants à l'aide des résultats de la théorie au deuxième ordre. Nous avons ainsi réduit les difficultés de convergence des longitudes d'Uranus et de Neptune.

Au cours de ce travail, nous avons trouvé des termes séculaires dans les demi-grands axes et cela dès la deuxième approximation dans l'ordre des masses. Ces résultats ont confirmé les termes séculaires du demi-grand axe déjà trouvés par J.L. Simon. Ces termes, négligeables pour les planètes inférieures, ne prennent une importance numérique que pour Jupiter et Saturne. La méthode itérative, développée à un ordre élevé par rapport aux masses, a donné des résultats très différents pour ces termes. Par la troisième loi de Kepler, le terme séculaire du demi-grand axe donne, dans la longitude, un terme en t^2 qui atteint au bout de 1000 ans $-30''.2$ pour Jupiter et $+75''.4$ pour Saturne. Nous donnons dans le tableau ci-dessous, pour Jupiter et Saturne, le terme séculaire du demi-grand axe obtenu à la deuxième approximation dans la méthode d'accroissement, sa valeur obtenue par la méthode itérative et le terme en t^2, qui résulte de cette dernière valeur dans la longitude.

Terme séculaire du demi-grand axe.

Planète	Terme séculaire de a en UA/an Ordre 2	méthode itérative	Terme en t^2 de la longitude en "/an^2
Jupiter	$+ 0{,}624 \times 10^{-9}$	$+ 1{,}886 \times 10^{-9}$	$- 30{,}2 \times 10^{-6}$
Saturne	$+ 0{,}733 \times 10^{-9}$	$- 21{,}268 \times 10^{-9}$	$+ 75{,}4 \times 10^{-6}$

Des comparaisons de nos solutions à des intégrations numériques internes ont donné pour les grosses planètes des écarts ne dépassant pas, sur un intervalle de 1000 ans, 0",3 en longitude et 0",1 pour les autres éléments (excepté dans le cas des longitudes d'Uranus et de Neptune pour lesquelles les écarts atteignent plusieurs secondes dans l'état actuel de nos solutions).

Nous avons, par ailleurs, comparé la théorie de Le Verrier-Gaillot à un prolongement sur 1000 ans de l'intégration numérique des Astronomical Papers of American Ephemeris (1951). Les écarts entre ces deux solutions atteignent 60" en longitude et sont dus en partie à l'absence dans la théorie de Le Verrier-Gaillot des termes en t^2 provenant des termes séculaires du demi-grand axe. Notons toutefois que la solution de Gaillot a très bien représenté le mouvement de Jupiter entre 1750 et 1907 et que cette solution lui a permis de déterminer une remarquable valeur de la masse de Saturne : 1/ 3 499,8. L'UAI a proposé en 1976 à Grenoble 1/ 3 498,5.

Pour Mercure, Vénus et la Terre les comparaisons entre la théorie au deuxième ordre et une intégration numérique interne donnent, sur un siècle, des écarts ne dépassant pas 0",007. Pour Mars, ces écarts atteignent 0",035. Nous avons examiné la théorie de Mars que Clemence (1949) a publiée entre 1949 et 1961 et qui est développée jusqu'au troisième ordre des masses. Clemence s'est étonné d'avoir des écarts en longitude atteignant 0",042 par comparaison à l'intégration numérique de Herget qui couvre une période de 35 ans. Il considère que l'explication la plus probable est une erreur dans les théories de Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne de Newcomb et de Hill qu'il a utilisées. Mais il envisage également une erreur de l'intégration numérique ou de sa théorie. Nous n'avons pas effectué sous forme analytique, une comparaison rendue difficile par le choix de variables différentes entre notre solution et la théorie de Clemence. Toutefois, nous avons trouvé quelques termes des perturbations de la longitude moyenne au deuxième ordre des masses qui dépendent d'arguments que Clemence n'a pas retenu, par exemple :

$$+ 0''.2405 \sin (10\lambda_T - 19\lambda_M + 3\lambda_S) + 0''.5124 \cos (10\lambda_T - 19\lambda_M + 3\lambda_S)$$
$$- 0''.0059 \sin (8\lambda_T - 16\lambda_M + 6\lambda_J) - 0''.0362 \cos (8\lambda_T - 16\lambda_M + 6\lambda_J)$$
$$- 0''.0190 \sin (\lambda_{Me} - 10\lambda_T + 11\lambda_M) + 0''.0236 \cos (\lambda_{Me} - 10\lambda_T + 11\lambda_M)$$

Ceci explique probablement que les écarts, qui atteignent 0",042 en longitude entre la théorie de Clemence et l'intégration numérique sur une période de 35 ans, soient comparables à ceux que nous avons sur un siècle.

Nous avons amélioré nos constantes d'intégration par comparaison de notre théorie des huit planètes à l'intégration numérique d'Oesterwinter et Cohen. Les éléments moyens issus de cette comparaison sont plus proches de ceux de Newcomb que de ceux de Le Verrier pour Vénus et la Terre. C'est le contraire pour Mars. La théorie de Le Verrier donne, par exemple, la valeur moyenne de l'excentricité pour 1950.0 : 0,093 356 41; la valeur de Newcomb est 0,093 358 91; notre théorie donne 0,093 355 39. La valeur de Clemence : 0,093 359 71 est voisine de celle de Newcomb.

Après avoir repris nos calculs avec les nouvelles constantes d'intégration, nous allons entreprendre la construction des perturbations du troisième ordre par rapport aux masses afin d'améliorer les théories des planètes inférieures, en particulier la théorie de la Terre. Une bonne connaissance du mouvement de la Terre est, en effet, indispensable car ce mouvement intervient dans toute comparaison à l'observation de théories planétaires. Par ailleurs, une bonne théorie de la Terre est nécessaire à l'amélioration des perturbations planétaires indirectes de la Lune. De plus, une amélioration des constantes d'intégration de la Terre agit directement sur le problème central de la Lune par modification des constantes de ce problème.

Nous entreprendrons ensuite la nécessaire comparaison de nos théories à l'observation et il sera intéressant de déterminer de nouvelles valeurs des masses des grosses planètes.

REFERENCES

Brumberg, V.A., Chapront, J. 1973, Celes. Mech. 8, 335
Clemence, G.M. 1949, APAE Vol. 11, p. 225
Duriez, L. 1977, Astron. & Astrophys. 54, 93-112
Duriez, L. 1978, Astron. & Astrophys. A paraître
Eckert, W.J., Brouwer, D., Clemence, G.M. 1951, APAE Vol. 12, p. 1
Le Verrier, U.J.J. 1855, Ann. Obs. Paris
Oesterwinter, C., Cohen, C.J. 1972, Celes. Mech. 5, 317
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1975 a, Astron. & Astrophys. 42, 259
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1975 b, Astron. & Astrophys. Suppl. 22, 107
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1978 a, Astron. & Astrophys. A paraître
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1978 b, Astron. & Astroph. Suppl. A paraître

ABSTRACT: At the Bureau of Longitudes the construction of planetary theories have been developed in three directions: A general theory of the motion of the four largest planets in the solar system is in the course of development at the Faculty of Sciences at Lille by L. Duriez (1977) following the methods of V. A. Brumberg and J. Chapront (1973). Theories of the classical type with secular variations of the motions of all of the planets from Mercury to Neptune are being completed at the Bureau of Longitudes. They are constructed by P. Bretagnon and J. L. Simon (1975, 1978). The numerical complement to all of these studies, numerical integration, a representation of the solution by Tchebychev series, are being carried out by P. Rocher as concerns the motions of minor planets, and by J. Piranx for the action of Pluto on Uranus and Neptune in the framework of theories with secular variations.

DISCUSSION

Message: Qu'est quecest la raison pour ces termes du deuxieme ordre dans les demi-axes?

Bretagnon: L'equation de Lagrange pour le demi-grand axe s'ecrit:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

ou $\frac{\partial R}{\partial M}$ est proportionnel à G, constante de la gravitation. Par la troisieme loi de Kepler on a: $n^2a^3 = G(1+m)$.

d'ou: $\frac{da}{dt} = \frac{2na^2}{1+m} \times 0(m)$.

On voit don que' à la deuxieme approximation, cette equation aura la forme:

$$\frac{da}{dt} = \frac{0(m^2)}{1+m} = 0\ (m^2) + 0\ (m^3) + \cdots$$

Par consequent, les termes seculaires du demi-grande axe de la deuxieme approximation sont en realite d'ordre 3 par rapport aux masses. Ils proviennent, bien sur, de la partie indirecte de la fonction perturbatrice.

Garfinkel: What is the perturbation method that you use in your theory? Is it anything like the method of von Zeipel or the method of Lie-series?

Bretagnon: We are using the old method of Leverrier.

Garfinkel: How does your theory compare with the work of Meffroy?

Bretagnon: The only comparisons we have made were with the results of numerical integration.

https://doi.org/10.1017/S0074180900012523 Published online by Cambridge University Press