Canad. Math. Bull. Vol. 38 (1), 1995 pp. 66–79

CONFIGURATIONS DE PARTICULES ET ESPACES DE MODULES

J. C. HURTUBISE

RÉSUMÉ. Cet article de survol est le résumé de la conférence Coxeter-James de l'auteur, prononcée à la réunion d'hiver 1993 de la Société Mathématique du Canada.

La théorie de Morse décrit les liens entre la topologie d'une variété et la topologie des points critiques d'une fonction sur cette variété. La fonctionnelle d'énergie pour les applications d'une surface dans une variété, dont les points critiques seront des applications harmoniques et parfois holomorphes, et la fonctionnelle de Yang-Mills pour des connections sur une variété de dimension quatre sont deux cas en dimension infinie pour lesquels la théorie de Morse ne tient pas. Néanmois, dans les deux cas, on peut récupérer une quantité étonnante d'information, pourvu qu'on stabilise par rapport à un degré ou une charge qui sont des données du problème. Les preuves recyclent des résultats de la théorie de l'homotopie des années '70, et les combinent à des idées de géométrie complexe pour donner de jolis modèles des espaces en cause en termes de "particules". Nous espérons donner un survol général et accessible des idées utilisées.

ABSTRACT. This survey is the written summary of the author's Coxeter-James lecture, delivered at the 1993 Winter Meeting of the Canadian Mathematical Society.

Morse theory relates the topology of the critical set of a function on a manifold to the topology of the whole manifold. The energy functional for maps of surfaces into a manifold, whose critical points are harmonic and occasionally holomorphic maps, and the Yang-Mills functional for connections on a four-manifold are two infinite dimensional cases where Morse theory fails. Nevertheles, in both cases a surprising amount can be said, providing one stabilises with respect to a natural charge or degree. The proofs borrow from the homotopy theory of the 1970's and combine it with some input from complex geometry to give some nice "particle" models of the spaces involved. This paper gives a fairly general and, it is hoped, accessible survey of the ideas involved.

1. **Introduction.**

1a) Espaces d'applications et la fonctionnelle d'énergie. La théorie de Morse étudie les relations topologiques entre l'ensemble des points critiques d'une fonction sur une variété et la variété en entier. C'est un point de vue qui a permis des percées spectaculaires, notamment en topologie des variétés de dimension élévée, et qui continue à porter fruit de nos jours. Un de ses grands succès a été dans l'étude de l'espace de lacets d'une variété Riemannienne: si x_0 est le point de base, on considère sur

$$\Omega(X) = \Omega(X, x_0) = \{s\colon [0,1] \longrightarrow X \mid s(0) = s(1) = x_0\}$$

la fonctionnelle du carré de la longueur

$$L(s) = \int_0^1 |ds|^2$$

L'auteur de cet article a le plaisir de remercier le CRSNG et le FCAR pour leur appui.
Reçu par les éditeurs le 30 mai 1994; révisée 15 août 1994.
Classification (AMS) par sujet : Primary: 58D27; secondary: 58E15, 53C07.

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-009-5 Published online by Cambridge University Press

dont les points critiques sont les géodésiques. On peut obtenir un grand nombre de résultats sur l'existence de géodésiques fermées. En spécialisant au cas $X = U(n)$, on peut aussi démontrer le célèbre théorème de périodicité de Bott. Sur ces sujets, et d'autres, le lecteur est renvoyé à un très bel article de survol de Bott [B].

Il serait naturel de vouloir généraliser de l'espace des courbes à l'espace des surfaces, en considérant l'espace

$$\mathrm{Map}^0(\Sigma, X)$$

des applications f d'une surface (de Riemann) compacte Σ dans une variété Riemannienne X, fixant des points de base ($f(\sigma_0) = x_0$). On a une fonctionnelle d'énergie analogue à celle des lacets, donnée par

$$E(f) = \int_\Sigma |df|^2 \, d\,\mathrm{vol}.$$

Les points critiques de $E(f)$ sont les applications harmoniques. Il existe une vaste et belle théorie de ces applications (voir [EL]); le point clef pour nous sera par contre un "défaut" de la fonctionnelle $E(f)$. En effet, on ne peut appliquer la théorie de Morse dans ce contexte, car une condition de compacité, dite de Palais Smale, fait défaut [U]. Ceci n'est pas un simple détail technique, que l'on pourrait contourner pour obtenir une théorie valable. Pour constater qu'il y a des problèmes sérieux, on n'a qu'à considérer le cas où $\Sigma = X = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, la sphère de Riemann. Dans ce cas, on démontre que les seules applications harmoniques sont holomorphes (ou anti-holomorphes, selon le signe du degré) et qu'elles sont d'énergie minimale. La théorie de Morse nous donnerait alors une rétraction (par flot de gradient) de l'espace $\mathrm{Map}^0_k(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$ sur l'espace $\mathrm{Hol}^0_k(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$ des fonctions holomorphes fixant un point de base. (Ici, l'indice $k > 0$ indique le degré des applications, qui classifie les composantes de ces espaces.) Or $\mathrm{Hol}^0_k(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$ est dimension $4k$, et donc ses groupes d'homologie sont nuls en dimension $> 4k$; comme ceci n'est pas le cas pour $\mathrm{Map}^0_k(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$, la rétraction est impossible.

Cette absence de compacité a un pendant du côté analytique, dans les phénomènes d' "ébullition" ("bubbling off"). Il existe des suites d'applications harmoniques dont l'absence de sous-suite convergente se manifeste par la création de sphères qui se détachent de Σ, et dans la limite, "disparaissent". On retrouve un exemple de ceci dans $\mathrm{Hol}_k(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$: Si f_i sont des éléments de cet espace, on peut les écrire comme des quotients de polynômes $p_i(z)/q_i(z)$, $\max\big(\text{degré } (p_i), \text{degré } (q_i)\big) = k$, tels que les zéros des p_i et des q_i sont des ensembles disjoints. On choisit alors p_i et q_i de telle façon qu'ils convergent vers deux polynomes p et q avec un zéro en commun. La fonction limite p/q ne sera plus de degré k.

Néanmoins, on peut rescaper quelque chose, à savoir une propriété qui a d'abord été mise en évidence par Segal, qui démontra pour $X = \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$:

Théorème de Stabilité, ou d'approximation homologique [S]. L'inclusion

$$\mathrm{Hol}^0_k(\Sigma, \mathbb{P}_n) \longrightarrow \mathrm{Map}^0_k(\Sigma, \mathbb{P}_n)$$

induit des isomorphismes d'homologie

$$H_i\big(\mathrm{Hol}^0_k(\Sigma, \mathbb{P}_n), \mathbb{Z}\big) \longrightarrow H_i\big(\mathrm{Map}^0_k(\Sigma, \mathbb{P}_n), \mathbb{Z}\big)$$

pour $i < i(k) = (k - 2g)(2n - 1)$.

Ici k est le degré de l'application et g le genre de Σ. Si $\Sigma = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, le théorème est aussi démontré pour les groupes d'homotopie π_i.

La version homotopique (plus forte) de ce théorème nous indique donc, essentiellement, que si on ne considère que des familles compactes dans $\mathrm{Map}^0_k(\Sigma, \mathbb{P}_n)$ de dimension suffisamment petite par rapport à k, une rétraction semblable à celle prédite par la théorie de Morse devrait être possible. Plusieurs points sont à remarquer:

1) Les applications holomorphes sont les minimums de la fonctionnelle d'énergie. Les autres points critiques n'interviennent pas. En fait, on peut montrer que leur indice croit avec k [EW].
2) $\mathrm{Map}^0_k(\Sigma, \mathbb{P}_n)$ est un espace de dimension infinie. Nous verrons que son type d'homotopie est indépendant de k.
3) Les espaces $\mathrm{Hol}^0_k(\Sigma, \mathbb{P}_n)$ sont par contre de dimension finie, et leur dimension croit linéairement avec k.

Il est naturel de se demander si le phénomène découvert par Segal s'étend de $\mathbb{P}_n$ à d'autres variétés X. Une classe naturelle est constituée des variétés de drapeaux G/P, où G est un groupe de Lie semi-simple et P un sous groupe parabolique (voir Section 3a). Encore, les minimums de la fonctionnelle d'énergie correspondent aux applications holomorphes, et l'homogénéité de la variété rend plus facile une description explicite de ces applications. Le degré topologique est alors un r-tuple d'entiers $(k_1, \ldots, k_r)$, qui doivent être tous positifs ou nuls pour qu'il y ait des fonctions holomorphes. Posant $|k| = \min |k_i|$, on a alors l'analogue du théorème de Segal avec $i(k) = c_0|k| - c_1$, $c_0 > 0$, pour:

- -X une Grassmannienne ([Ki1])
- -X certaines variétés de drapeaux "classiques" $\big(G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})\big)$, et $\Sigma = \mathbb{P}_1$, en homologie ([Gu1])
- -X une variété de drapeaux classique et $\Sigma = \mathbb{P}_1$, en homologie. ([MM])
- -X une variété de drapeaux arbitraire et $\Sigma = \mathbb{P}_1$, en homologie et en homotopie [BHMM]
- -X une variété de drapeaux arbitraire et Σ arbitraire, en homologie [H].

Il y a aussi des extensions à des variétés presque homogènes: les variétés toriques [Gu2], et variétés admettant l'action d'un groupe résoluble [BHMM3].

1b) La fonctionnelle de Yang-Mills. Il existe un autre cas d'une fonctionnelle dont le comportement géométrique est très semblable à celui de $E(f)$: la fonctionnelle de Yang-Mills. Soit P un fibré principal sur une variété X de dimension quatre, Riemannienne et compacte, avec groupe de structure semi-simple et compact, disons $SU(2)$ pour fixer les idées. De tels fibrés sont classifiés par un entier k; prenons $P = P_k$. On peut considérer sur de tels fibrés des connexions A dont l'expression dans une base locale est donnée par des opérateurs différentiels

$$\nabla^A_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A_\mu(x), \quad A_\mu(x) \in su(2).$$

On définit une courbure associée

$$F_{\mu\nu} = [\nabla^A_\mu, \nabla^A_\nu]$$

et la fonctionnelle de Yang-Mills est l'intégrale du carré de la courbure:

$$\mathrm{YM}(A) = \int_X |F|^2 \, d\,\mathrm{vol}.$$

Des considérations d'ordre topologique donnent une borne inférieure de $8\pi^2|k|$ à la fonctionnelle. Les A qui réalisent cette borne sont appelés des instantons, et satisfont à l'équation d'(anti-)autodualité

$$F = \pm \star F.$$

Le signe dépend de celui de k [DK]. Le groupe $\mathcal{G}_k$ des automorphismes de P_k qui agissent trivialement sur X et qui fixent un point de P_k, agit sur l'espace $\mathcal{A}_k$ des connextions. En coordonnés locales:

$$A_\mu \longmapsto gA_\mu g^{-1} + \frac{\partial g}{\partial x^\mu} g^{-1}.$$

Cette action préserve $\mathrm{YM}(A)$, et donc la fonctionnelle passe au quotient $\mathcal{B}_k(X) = \mathcal{A}_k / \mathcal{G}_k$. Le quotient $\mathcal{M}_k(X)$ de l'espace des minimums s'appelle l'espace des modules d'instantons sur X.

Ici encore, la condition de Palais-Smale n'est pas satisfaite, et Atiyah et Jones, parallèlement à Segal, ont été amenés à conjecturer, en 1977 [AJ]:

($\star$) Pour $X = S^4$, l'inclusion

$$i\colon \mathcal{M}_k(S^4) \longmapsto \mathcal{B}_k(S^4)$$

induit des isomorphismes

$$i_*\colon H_i\big(\mathcal{M}_k(S^4), \mathbb{Z}\big) \longrightarrow H_i\big(\mathcal{B}_k(S^4), \mathbb{Z}\big)$$
$$i_*\colon \pi_i\big(\mathcal{M}_k(S^4)\big) \longrightarrow \pi_i\big(\mathcal{B}_k(S^4)\big)$$

pour $i < i(k)$, $\lim_{k\to\infty} i(k) = \infty$, et $i(k) \geq i(k-1)$.

Cette conjecture a été démontrée pour $i(k) = \frac{|k|}{2} - 1$ dans [BHMM2]. (Voir aussi [Ki2], [Ti]). On peut naturellement étendre cette conjecture à des variétés X arbitraires de dimension quatre; une preuve, en homologie, pour $X = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ou une surface réglée, avec $i(k) = c_0|k| - c_1$, $c_0 > 0$, se trouve dans [HM].

D'autres similarités existent entre la fonctionnelle de Yang-Mills et celle de l'énergie d'une application d'une surface (voir [DK]):

1) Comme pour les applications harmoniques, l'absence de compacité de $\mathcal{M}_k(X)$ se manifeste par une "ébullition": à mesure que l'on s'approche du bord de l'espace, une partie de la courbure se concentre en des points de X, et on obtient, à la limite, une ou plusieurs fonctions delta superposées à un élément de $\mathcal{M}_j(X)$, $j < k$ [U].
2) Encore, le type d'homotopie du "grand espace" $\mathcal{B}_k(X)$ est indépendant de k, et $\mathcal{B}_k(X)$ est de dimension infinie.

3) L'espace $\mathcal{M}_k(X)$, par contre, est une variété (souvent avec singularités) de dimension finie, dont la dimension augmente linéairement avec k.
4) Encore, on ne traite que des espaces de minimums. Or la fonctionnelle possède d'autres points critiques; l'indice de ces points, dans les cas où il est connu [T1], augmente avec $|k|$.

Il y a aussi une similarité du point de vue technique, qui nous sera grandement utile dans nos preuves. Dans les cas que l'on peut traiter, les espaces de modules admettent des descriptions en termes de "particules avec étiquettes". Ceci permet de mener à bien l'analyse topologique qui s'impose.

L'auteur tient tout particulièrement à remercier ses collaborateurs Charles Boyer, Ben Mann et Jim Milgram pour leur appui et leur enthousiasme dans cette étude.

2. **Applications de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.** Dans cette section, nous allons esquisser une preuve du théorème de Segal pour les applications de la sphère de Riemann $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans elle-même. Cette preuve, qui est différente de celle de Segal, ne donne pas une borne aussi bonne ($i(k)$ sera $k/2-1$ plutôt que k), mais elle a l'avantage de se généraliser presque immédiatement aux autres cas que nous allons traiter au numéro 3. Aussi, nous ne traiterons que l'homologie. Pour démontrer le résultat pour les groupes d'homotopie, on démontre le résultat, en homologie, mais au niveau des revêtements universels. L'isomorphisme en homotopie suit par un théorème de Whitehead.

2a) Stabilisation. Il existe une application de "stabilisation" qui réalise l'équivalence d'homotopie entre $\mathrm{Map}_k^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$ et $\mathrm{Map}_{k+1}^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$. Elle se définit comme suit.

En coordonnées complexes standards sur $\mathbb{P}_1$, prenons ∞ comme point de base sur la première sphère et 0 pour la deuxième. Soit $D\subset\mathbb{P}_1$ un disque contenant le point ∞. A homotopie près, on peut remplacer $\mathrm{Map}_k^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$ par son sous-espace $\mathrm{Map}_k^D(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$ d'applications g tels que $g(D)=\{0\}$, l'homotopie consistant essentiellement en un "agrandissement" du point ∞. Soit $f\in\mathrm{Map}_1^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$ de degré un, avec $f\equiv 0$ sur le complément d'un disque $D'\subset D$ et $\infty\notin D'$. L'application

$$S_{k,k+1}\colon \mathrm{Map}_k^D(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)\longrightarrow \mathrm{Map}_{k+1}^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1) \tag{2.1}$$

est définie par

$$S_{k,k+1}(g)=g\star f=\begin{cases} g & \text{sur } \mathbb{P}_1\setminus D\\ f & \text{sur } D'\\ 0 & \text{sur } D\setminus D'\end{cases}.$$

L'inverse homotopique se définit par $S_{k+1,k}(g)=g\star f'$, où f' est de degré -1. L'application $S_{k,k+1}$ a aussi une version holomorphe $\hat{S}_{k,k+1}$, qui lui est homotopiquement équivalent. Puisque $f(\infty)=0$, on peut se restreindre à homotopie près au sous-espace $\mathrm{Hol}_k^D(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$ de fonctions sans pôles dans D. On pose alors

$$\begin{aligned}\hat{S}_{k,k+1}\colon \mathrm{Hol}_k^D(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)&\longrightarrow \mathrm{Hol}_{k+1}^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)\\ g(z)&\longmapsto g(z)+\frac{a}{z-b}\end{aligned} \tag{2.2}$$

où $a \neq 0$, $b \in D$ sont fixes. On vérifie sans peine que $\hat{S}_{k,k+1}$ et $S_{k,k+1}$ sont homotopes.

2b) Théorème limite. Nous avons alors un diagramme, défini et commutant à homotopie près, qui définit des espaces limites $\overline{\mathrm{Map}}$, $\overline{\mathrm{Hol}}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Map}_k^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1) & \xrightarrow{S_{k,k+1}} & \mathrm{Map}_{k+1}^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1) & \underset{\sim}{\longrightarrow} & \cdots & \longrightarrow & \overline{\mathrm{Map}} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & I\uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hol}_k^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1) & \xrightarrow{\hat{S}_{k,k+1}} & \mathrm{Hol}_{k+1}^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \overline{\mathrm{Hol}} \end{array} \tag{2.3}$$

THÉORÈME (GRAVESEN [GR]). *L'inclusion I est une équivalence d'homologie.*

C'est un très joli théorème, dont nous ne donnerons pas la preuve.

2c) La stabilisation holomorphe. Dans le diagramme (2.3) les applications $S_{k,k+1}$ sont toutes des équivalences d'homotopie, et l'application I, comme nous venons de le voir, est une équivalence d'homologie. Pour obtenir le théorème de Segal, il suffira donc de démontrer:

THÉORÈME 2.4. *La stabilisation*

$$\hat{S}_{k,k+1}\colon \mathrm{Hol}_k^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1) \longrightarrow \mathrm{Hol}_{k+1}^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$$

induit des isomorphismes au niveau des groupes d'homologie H_i pour $i < \frac{k}{2} - 1$.

La preuve de ce théorème peut se diviser en 3 étapes:

i) Stratification. Nous décomposons d'abord $\mathrm{Hol}_k = \mathrm{Hol}_k^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$ et $\mathrm{Hol}_{k+1} = \mathrm{Hol}_{k+1}^0(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_1)$ en strates, qui correspondent aux différentes multiplicités possibles d'une application holomorphe de degré k ou $k+1$. Soit donc $f \in \mathrm{Hol}_k$ avec, disons, j pôles; puisque $f(\infty) = 0$, f s'écrit

$$f(z) = \sum_{i=1}^{j} \frac{p_i(z-\beta_i)}{(z-\beta_i)^{k_i}} \tag{2.5}$$

avec $\sum_{i=1}^{j} k_i = k$, p_i un polynôme de degré $< k_i$, et $p_i(0) \neq 0$. Les j pôles ont donc des multiplicités $k_1, \ldots, k_j$. Posons $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_j$, et $\mathcal{K} = (k_1, \ldots, k_j)$. On définit:

$$S_{\mathcal{K}} = \{f \in \mathrm{Hol}_k \mid f \text{ a } j \text{ pôles, de multiplicités } k_1, \ldots, k_j\}. \tag{2.6}$$

L'ensemble des $S_{\mathcal{K}}$ donne une stratification de Hol_k, indicée par les partitions de k. La strate générique est $S_{(1,\ldots,1)}$; de façon plus générale, la codimension réelle de $S_{\mathcal{K}}$ dans Hol_k sera $2\sum_i (k_i - 1)$.

Il existe alors une suite spectrale (essentiellement celle de Leray) qui calcule l'homologie de Hol_k à partir de celles des $S_{\mathcal{K}}$:

$$\bigoplus_i \bigoplus_{\mathcal{K} \text{partition de } k} H_{i-\mathrm{codim}(S_{\mathcal{K}})}(S_{\mathcal{K}}, \mathbb{Z}) \Rightarrow \bigoplus_i H_i(\mathrm{Hol}_k, \mathbb{Z}). \tag{2.7}$$

La notation vise à souligner que le i-ème groupe d'homologie de Hol_k est calculé à partir du $\big(i - \mathrm{codim}(S_{\mathcal{K}})\big)$-ème groupe de $S_{\mathcal{K}}$.

Nous stratifions Hol_{k+1} de la même façon. L'application de stabilisation ajoute à f un pole simple, et respecte donc la stratification, envoyant $S_{(k_1,\ldots,k_j)}$ dans $S_{(k_1,\ldots,k_j,1)}$. On a alors un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \oplus_i \oplus_{\mathcal{K}} H_*(S_{\mathcal{K}}, \mathbb{Z}) & \Rightarrow & \oplus_i H_i(\mathrm{Hol}_k, \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \oplus_i \oplus_{K'} H_*(S_{\mathcal{K}'}, \mathbb{Z}) & \Rightarrow & \oplus_i H_i(\mathrm{Hol}_{k+1}, \mathbb{Z}) \end{array}$$

La naturalité nous dit alors que pour démontrer l'isomorphisme entre l'homologie de Hol_k et celle de Hol_{k+1}, il suffit de le faire au niveau des strates, l'isomorphisme des H_i au niveau de l'espace tout entier s'obtenant de l'isomorphisme des $H_{i-\mathrm{codim}\, S_{\mathcal{K}}}$ au niveau des strates.

ii) Isomorphismes au niveau des strates. Examinons d'un peu plus près les strates $S_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K} = (k_1, \ldots, k_j)$. Un élément de $S_{\mathcal{K}}$ est donné par:

(1) Le choix de j points distincts x_i dans le plan, et une attribution de multiplicités k_i aux points x_i, avec $\sum_i k_i = k$

(3) Un étiquettage de ces points: à chaque point, on associe une partie principale, c'est à dire le polynôme $p_i(z)$, $p_i(0) \neq 0$. L'espace de ces polynômes est $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{k_i - 1}$. Notons que le type d'étiquette (l'espace où on le prend) varie selon k_i.

Tous ces choix sont libres, et la strate $S_{\mathcal{K}}$ est donc un espace de points étiquetés. Il s'avère que l'homologie de ces espaces a été bien étudié au début des années '70, parce qu'elle s'appliquait...à l'étude des espaces de fonctions continues tels que $\mathrm{Map}^0(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1)$! (Modèle dit de "May-Milgram" [May], [Mi]). L'homologie en est essentiellement connue. Pour illustrer, nous discuterons de celle de ${}_kS = S_{(1,\ldots,1)}$, l'espace de k points (non ordonnés) du plan, étiquetés par les éléments de $\mathbb{C}^*$; à homotopie près, on peut remplacer $\mathbb{C}^*$ par S^1. Nous considérons, à la place de l'homologie à coefficients entiers, l'homologie modulo 2. Il y aura des résultats analogues modulo p, ce qui nous permettra de reconstruire éventuellement l'homologie à coefficients entiers (mais non sans un peu de peine).

Soit $*$ le point de base de S^1, et e_1 le cycle qui engendre $H_1(S^1, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$. Pour balayer les cycles d'un espace de particules étiquetées, il y a essentiellement deux mécanismes: a) déplacer les particules et b) déplacer les étiquettes le long d'un cycle. Il y aura deux entiers attachés à un cycle $c = c_{ij}$: sa dimension i, et le nombre de points j qui le "supportent", c'est à dire, le nombre de points qui doivent se déplacer ou encore porter un cycle non-trivial dans leur espace d'étiquettes; d'un autre point de vue, c'est le plus petit j tel que ce cycle se retrouve dans ${}_jS$. L'homologie est ainsi bi-graduée: $H_i = \oplus_j H_{i,j}$. Les cycles ont donc comme support des "nuages" de points, que nous supposerons contenus dans le disque unité, appliquant une homotopie si necessaire. Soient $A \in H_{i,j}$ un tel cycle, et notons par $(A + x)$ le résultat d'une translation de A par x, et par $e^{i\theta}A$ la rotation de A par un angle θ. On définit

$$Q_1(A) = \{(p, q, \theta) \mid (p, q) \in e^{i\theta}(A + 2) \times e^{i\theta}(A - 2), \theta \in [0, 2\pi)\}/\mathbb{Z}/2 \in H_{2i+1,2i},$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-009-5 Published online by Cambridge University Press

où l'action de $\mathbb{Z}/2$ est définie par l'involution $I(p,q,\theta) = \big(q,p,(\theta+\pi)_{(\mathrm{mod}\,2\pi)}\big)$. (Il y a un abus de langage: cette définition est ensembliste) De même, si $A \in H_{ij}$ et $B \in H_{kl}$ sont deux cycles, on définit leur produit

$$AB = \big\{(p,q) \in (A+2)\times(B-2)\big\} \in H_{i+k,j+l}.$$

Le cycle $*$ est alors l'élément neutre de cette multiplication. Le cycle $e_1 = e_{1,1}$ se représente naturellement dans $H_1({}_1S, \mathbb{Z}/2)$ comme cycle avec support un seul point; l'homologie de ${}_kS$ est alors l'espace des polynômes dans

$$\mathbb{Z}/2[e_{11}, Q_1(e_{11}), Q_1^2(e_{11}), \ldots]$$

dont le deuxième degré (celui de la cardinalité du support) est inférieur ou égal à k. [Mi]. On remarque que les cycles de dimension j dans cette description necessitent au plus j points comme support. C'est ce phénomène qui est à l'origine de la stabilité homologique au niveau des strates: les cycles de petite dimension requièrent peu de points. Ceci est un phénomène général, et nous avons

PROPOSITION 2.9. *L'application de stabilisation induit des isomorphismes*

$$H_s(S_{(k_i,\ldots,k_j)}, \mathbb{Z}) \simeq H_s(S_{(k_i,\ldots,k_j,1)}, \mathbb{Z})$$

pour $s < \frac{\ell}{2}$, *où* ℓ *est le nombre de pôles simples, i.e., le nombre de* $k_i = 1$*).*

iii) Codimensions. Dans la Section i), nous avons vu que la codimension réelle de $S_{(k_1,\ldots,k_j)}$ dans Hol_k était $2\big(\sum_j (k_j - 1)\big) = 2(k-$(nombre de pôles)); on en déduit facilement:

(2. 10) $$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}}(S_{(k_1,\ldots,k_j)}) \geq k - \text{ nombre de pôles simples.}$$

Combinant (2.9) et (2.10) on a donc $\big(\mathrm{codim}(S_{\mathcal{K}}) = \mathrm{codim}(S_{\mathcal{K},1})\big)$:

(2. 11) $$H_{i-\mathrm{codim}\, S_{\mathcal{K}}}(S_K, \mathbb{Z}) \simeq H_{i-\mathrm{codim}\, S_{\mathcal{K},1}}(S_{\mathcal{K},1}, \mathbb{Z})$$

pour tout $i < \frac{k}{2}$, et donc par la suite spectrale (2.7)

(2. 12) $$H_i(\mathrm{Hol}_k, \mathbb{Z}) \simeq H_i(\mathrm{Hol}_{k+1}, \mathbb{Z})$$

pour tout $i < \frac{k}{2} - 1$. (On perd une dimension par "effet de bord").

Nous obtenons donc le résultat. Il est à remarquer, cependant, que la preuve ne nous donne pas immédiatement l'homologie de Hol_k, même si nous connaissons celle des strates; il peut y avoir des différentielles non triviales dans la suite spectrale. La naturalité nous permet simplement d'affirmer que les différentielles pour H_i dans Hol_k et celles dans Hol_{k+1} sont les mêmes, si i est inférieur à $\frac{k}{2} - 1$. En fait, le calcul explicite de l'homologie de Hol_k se retrouve dans [CCMM].

3. **Autres cas.**

3a) $\mathrm{Hol}_k^0(\mathbb{P}_1, G/P)$. Le théorème de stabilité de Segal se généralise au cas d'applications dans une variété des drapeaux arbitraire. Ces variétés s'écrivent comme des variétés homogènes G/P, G un groupe de Lie semi-simple complexe, et P un sous groupe parabolique.

Considérons le case $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$. Les différents P possibles sont tous conjugués à des groupes $P_\triangle$ de matrices triangulaires supérieures par blocs. Pour être plus précis, posons $\triangle = (d_1, \ldots, d_r)$, $\Sigma_{j=1}^r d_j = n$, et $n_i = \sum_{j=1}^i d_i$. Une matrice M dans $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ peut être découpée en blocs $M_{[i,j]}$ de taille $d_i \times d_j$, et on pose alors

$$P_\triangle = \{M \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C}) \mid M_{[i,j]} = 0 \text{ si } i > j\}. \tag{3.1}$$

Soit

$$F_\triangle = \left\{V_1 \subset \cdots \subset V_{r-1} \subset \mathbb{C}^n \mid V_i \text{ sous-espace de } \mathbb{C}^n, \dim(V_i) = n_i\right\} \tag{3.2}$$

$F_\triangle$ est une variété de $\big(\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})\big)$—drapeaux. Le groupe $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ agit transitivement sur $F_\triangle$, et $P_\triangle$ est le stabilisateur du drapeau standard $\{V_i^\triangle = \langle e_1, \ldots, e_{n_i}\rangle\}$, où (e_i) est la base standard de $\mathbb{C}^n$. On a

$$F_\triangle \simeq \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})/P_\triangle. \tag{3.3}$$

Soit $N_\triangle$ le sous groupe de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$

$$N_\triangle = \left\{M \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; M_{[i,j]} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \mathbb{I} & \text{si } i = j \end{cases}\right\} \tag{3.4}$$

$N_\triangle$ agit sur $F_\triangle$, et ses orbites se regroupent en une décomposition cellulaire de $G/P_\triangle$ ([BE]). Il y a une orbite dense, isomorphe à $N_\triangle$: celle de $\{V_i^\triangle\}$. $G/P_\triangle$ parait donc comme une compactification de l'espace affine $N_\triangle$. L'union des autres orbites forme "l'infini" de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})/P_\triangle$. Des N semblables, avec les mêmes propriétés existent pour tout G, P.

Dans le cas $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})/T$, T le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, nous obtenons $N = \mathbb{C}$. L'action d'un élément a de N est une translation $\big(a(z) = z+a\big)$, et $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ se décompose en 2 orbites:

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Reconsidérons la partie principale d'une application d'un disque $D \subset \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $0 \in D$, avec un pôle, disons en zéro. Celle-ci s'écrit:

$$\sum_{i=-j}^{-1} a_i z^i. \tag{3.5}$$

Cette partie principale peut être considérée comme le représentant canonique d'une classe d'équivalence des fonctions $\sum_{i=-j}^\infty a_i z^i$, modulo la relation $f \sim f'$ si $f = f' + g$, $g = \sum_{i=0}^\infty b_i z^i$. L'action des fonctions $g\colon D \longrightarrow N \simeq \mathbb{C}$ sur les fonctions $f\colon D \longrightarrow \mathbb{P}_1 = \mathrm{Sl}(z, \mathbb{C})/T$

se traduit en coordonnées par une addition: $f \longmapsto f+g$; notre relation d'équivalence devient donc celle d'appartenir à la même orbite sous cette action. Une configuration de parties principales sur D devient donc un élément de l'espace quotient

$$\{F: D \longrightarrow \mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})/T\}/\{g: D \longrightarrow N\}.$$

Ceci se généralise d'une façon naturelle à toute variété G/P, et donc nous obtenons une définition des configurations de G/P parties principales sur D, due à Segal-Gravesen [Gr].

$$(3.6) \qquad \mathcal{PP}(D) = \{f: D \longrightarrow G/P,\ f \text{ “méromorphe” }\}/\{g: D \longrightarrow N\}.$$

La condition de méromorphicité est simplement que $f(D)$ n'est pas inclus dans l' “infini” de G/P, et donc ne l'intersecte qu'en un ensemble discret de points.

Ces parties principales ont toutes les propriétés essentielles des $\mathbb{P}_1$-parties principales; elles ont une multiplicité, et une configuration de parties principales sur $\mathbb{C}$ de multiplicité totale k correspond de façon unique à un élément de $\mathrm{Hol}_k^0(\mathbb{P}_1, G/P)$. Cet espace devient donc un espace de configurations de particules étiquetées, et on démontre le théorème de stabilité (pour H_i, $i < c_0|k| - c_1$) en suivant essentiellement les étapes de la Section 2 [BHMM].

3b) $\mathrm{Hol}_k^0(\Sigma, G/P)$. Nous compliquons la situation encore un peu, en considérant des applications d'une surface de Riemann compacte arbitraire dans G/P. Revenons encore un instant au cas $G/P = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire la théorie des fonctions méromorphes sur la surface de Riemann Σ de genre g. Celle-ci est beaucoup plus compliquée que celle de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. On ne peut spécifier de façon arbitraire une configuration de pôles et de parties principales pour obtenir une fonction. Il existe en effet une obstruction $Ob(\mathcal{C}) \in H^1(\Sigma, O) \simeq \mathbb{C}^g$ associée à toute configuration $\mathcal{C}$ qui doit être nulle pour que la fonction existe. Dans le cas d'un G/P quelconque, l'obstruction prend ses valeurs dans une variété $H^1(\Sigma, N)$ qui est isomorphe comme variété à $\mathbb{C}^{g \cdot \dim(N)}$. Plus précisément, si $\mathrm{Conf}_k(\Sigma, G/P)$ dénote l'espace de toutes les configurations de parties principales de multiplicité totale k sur $\Sigma \setminus \{\text{pt. de base}\}$, on a alors une application

$$(3.7) \qquad \mathrm{Ob}: \mathrm{Conf}_k(\Sigma, G/P) \longrightarrow H^1(\Sigma, N)$$

avec $\mathrm{Hol}_k^0(\Sigma, G/P) = \mathrm{Ob}^{-1}(0)$, où 0 est le point de base de $H^1(\Sigma, N)$.

Le théorème de stabilité [H] se démontre essentiellement en deux étapes. La première, donne un isomorphisme

$$H_i\big(\mathrm{Conf}_k(\Sigma, G/P)\big) \simeq H_i\big(\mathrm{Map}_k^0(\Sigma, G/P)\big),$$

pour $i < c_0|k| - c_1$, en suivant le cheminement de la Section 2. La seconde donne l'isomorphisme

$$H_i\big(\mathrm{Hol}_k^0(\Sigma, G/P)\big) \simeq H_i\big(\mathrm{Conf}_k(\Sigma, G/P)\big),$$

pour $i < c_0|k| - c_i$ en montrant qu'une famille (de dimension suffisamment petite par rapport à $|k|$) d'éléments de Conf_k peut être déformée dans Hol_k. Le mécanisme essentiel est le suivant: supposons, pour simplifier, que N est abélien; l'espace $H^1(\Sigma, N)$ est alors un espace vectoriel V. Chaque partie principale μ donne alors une obstruction $\mathrm{Ob}(\mu) \in V$. Si $\mathcal{C}$ est une configuration de ces parties principales, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \sum_{\mu\in\mathcal{C}} \mathrm{Ob}(\mu)$. Pour que $\mathcal{C}$ soit un élément de Hol_k^0, on doit avoir $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = 0$. On déforme donc $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ vers zéro en changeant l'échelle des différents μ qui composent $\mathcal{C}$; ceci est toujours possible si il y en a assez (k assez grand) et si $\mathcal{C}$ est suffisamment générique. Le changement d'échelle des μ s'effectue en utilisant l'action du tore maximal de G sur G/P.

3c) Instantons sur S^4. Il est peut être étonnant que les mêmes techniques s'appliquent aux théorèmes de stabilité pour les espaces instantons $\mathcal{M}_k(X)$ (conjecture d'Atiyah-Jones). Nous expliquons pourquoi.

Le point de départ est un théorème de Donaldson, qui nous dit:

THÉORÈME [D1], [A].

$$\mathcal{M}_k(S^4) = \{\textit{fibrés holomorphes } E \textit{ de rang 2 sur } \mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1,\ c_1(E)=0,\ c_2(E) = k, \textit{ avec } E \textit{ trivialisé sur } \mathbb{P}_1\times\{\infty\}\cup\{\infty\}\times\mathbb{P}_1\}.$$

Pensons maintenant à $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ comme une famille de sphères de Riemann $\{x\} \times \mathbb{P}_1$ paramètrée par $\{x\} \in \mathbb{P}_1$: de la même façon, un fibré holomorphe sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ devient une famille de fibrés sur $\mathbb{P}_1$. Ceux-ci ont un comportement assez particulier:

THÉORÈME [G]. *Tout fibré holomorphe E de rang 2 sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ avec $c_1(E) = 0$ se décompose en une somme de fibrés en droites $\mathcal{O}(j) \oplus \mathcal{O}(-j)$, j entier, $j \geq 0$. Dans une famille paramétrée par $x \in U$, la fonction $j(x)$ est semi-continue supérieurement.*

Soit z la coordonnée standard sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et $U_0 = \{z \neq \infty\}$, $U_1 = \{z \neq 0\}$. Le fibré $\mathcal{O}(j)$ est défini par la fonction de transition z^{-j} de U_0 à U_1; $\mathcal{O} = \mathcal{O}(0)$ est donc le fibré trivial.

Le théorème a comme conséquence que toute famille $E \longrightarrow U\times\mathbb{P}_1$, $U \subset \mathbb{C}$, U connexe, telle que $E\big|_{\{x_0\}\times\mathbb{P}_1}$ est trivial pour un x_0, a alors la propriété de $E\big|_{\{x\}\times\mathbb{P}_1}$ est trivial pour le x générique. Les $\{x\}$ avec $E\big|_{\{x\}\times\mathbb{P}_1}$ *non* trivial ($\{x\} \times \mathbb{P}_1$ est alors une "droite de saut") forment un ensemble discret de points de U.

Un exemple typique du comportement d'une famille de fibrés de rang 2 paramétrée par x est donnée par la matrice de transition de U_0 à U_1:

$$\begin{pmatrix} z^{-1} & x \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

Pour $x = 0$, le fibré est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$; pour $x \neq 0$, il est trivial ($\simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$).

Revenons à nos E correspondant à des éléments de $\mathcal{M}_k(S^4)$: ils sont triviaux sur $\{\infty\} \times \mathbb{P}_1$, et donc sur le $\{x\} \times \mathbb{P}_1$ générique. Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch nous permet de montrer qu'il y a k droites $\{x_i\} \times \mathbb{P}_1$ (comptés avec multiplicité) sur lesquels E n'est pas trivial.

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-009-5 Published online by Cambridge University Press

Soit $U = \mathbb{P}_1 \setminus \cup_i\{x_i\}$. Nos E sont non seulement triviaux, mais munis d'une trivialisation sur $\mathbb{P}_1 \times \{\infty\}$, donc $U \times \{\infty\}$. Puisque $E\big|_{\{x\}\times\mathbb{P}_1}$ est trivial pour $x \in U$, cette trivialisation s'étend de façon unique à $U \times \mathbb{P}_1$. Il s'en suit que si E, E' ont les mêmes droites de saut $\{x_i\}$, ils sont canoniquement isomorphes sur $U \times \mathbb{P}_1$; E et E' ne diffèrent qu'au voisinage de leurs droites de saut. Autrement dit, les modules de E sont "concentrés" aux droites de saut $\{x_i\} \times \mathbb{P}_1$.

La description de $\mathcal{M}_k$ qui s'en suit ressemble alors beaucoup aux précédentes: un E est déterminé par:

- le choix de k points x_i avec multiplicité.
- à chacun de ces points, on ajoute une étiquette qui décrit comment E "saute" en $\{x_i\} \times \mathbb{P}_1$.

A partir de cette description, la preuve du théorème de stabilité suit les grandes lignes de la Section 2: l'application de stabilisation ajoute une droite de saut (= pôle); le théorème "limite" est encore valable, soit dans une version due à Gravesen [Gr] ou dans une autre due à Taubes [T2]; et la stabilisation holomorphe s'obtient de la même façon [BHMM2].

3d) Instantons sur une surface réglée. Les surfaces réglées sont des fibrations holomorphes X

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_1 & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \\ & & \Sigma \end{array} \tag{3.8}$$

avec fibre $\mathbf{P}_1$ et base une surface de Riemann compacte Σ. Pour décrire $\mathcal{M}_k(X)$, quand X est munie de sa métrique kählérienne, on fait appel à un autre théorème de Donaldson; qui dit:

THÉORÈME [D2]. *$\mathcal{M}_k(X)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $N_k(X)$ des paires ((fibré vectoriel holomorphe E de rang 2, stable, avec $c_1 = 0$, $c_2 = k$), trivialisation de E en un point).*

Plutôt que $N_k(X)$, on considère $P_k(X)$, l'espace obtenu en remplaçant la condition de stabilité par une condition de trivialité sur la fibre générique de (3.8). On démontre, non sans peine, que la codimension de $P_k \setminus (P_k \cap N_k)$ dans P_k, et de $N_k \setminus P_k \cap N_k$ dans N_k, devient grande quand k croit. Ceci permet de remplacer N_k par P_k dans le théorème de stabilité, et donc, répétant l'analyse en termes de droites de saut, de décrire l'espace de modules en termes de particules étiquetées sur Σ. La preuve du théorème de stabilité suit alors les grandes lignes de la Section 2 [HM].

4. **Conclusion.** On peut se demander jusqu'où ces résultats peuvent s'étendre, car on a à peine effleuré le spectre de questions possibles. Par exemple, on peut se demander si cette propriété d'approximation homotopique pour les espaces d'applications holomorphes est valable pour toute surface de Riemann Σ et toute variété complexe X. De façon plus générale, en remplaçant les espaces d'applications holomorphes par des espaces

d'applications harmoniques, la question se pose si X est tout simplement Riemannien. Du côté de la fonctionnelle de Yang-Mills, on peut aussi se demander si la conjecture d'Atiyah-Jones est vérifiée pour toute variété de base en dimension quatre. Quelques commentaires s'imposent.

(a) Pour les espaces d'applications holomorphes $\mathrm{Hol}(\mathbf{P}_1, X)$, il existe plusieurs X ne contenant aucune courbe rationnelle, mais dont l'espace $\mathrm{Map}(\mathbf{P}_1, X)$ a une structure topologique compliquée; une exemple nous est fourni par la surface de Hopf [BPV]. Des restrictions sur X s'imposent. Une classe de X pour lesquels le théorème stabilité peut se démontrer est celle des variétés admettant une action d'un groupe algébrique resoluble N, avec une orbite libre et dense. (L'exemple classique de ceci serait une variété torique; N est alors $(\mathbb{C}^*)^n$ [Gu2]). De façon plus générale, on pourrait faire la conjecture que le théorème tient pour une variété rationnelle ou unirationnelle. Pour une variété X générale, on peut se demander, si en stabilisant non seulement par rapport au degré, mais aussi au genre de Σ, on peut obtenir ces théorèmes d'"approximation homotopique".

(b) Du côté des instantons, il est à noter que le théorème "limite" de Taubes est vrai pour toute variété X compacte de dimension quatre. On s'attend alors à ce que la conjecture d'Atiyah-Jones soit vérifiée aussi pour tout X.

(c) Les deux cas traités ont un point commun: on construit une approximation "homotopique" à des espaces fonctionnels bien connus à partir "d'objets holomorphes". Il existe un autre cas intéressant de ceci dans les travaux de Lawson, qui reconstruisent des espaces d'Eilenberg Maclane à partir de variétés de Chow [L].

RÉFÉRENCES

[A] M. F. Atiyah, *Instantons in two and four dimensions*, Comm. Math. Phys. **93**(1984), 437–451.

[AJ] M. F. Atiyah and J. D. Jones, *Topological aspects of Yang-Mills theory*, Comm. Math. Phys. **61**(1978), 97–118.

[B] R. Bott, *Lectures on Morse Theory, Old and New*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7**(1982), 331–358

[BE] R. J. Baston and M. G. Eastwood, *The Penrose transform*, Oxford University Press, 1989.

[BHMM] C. P. Boyer, J. C. Hurtubise, B. M. Mann and R. J. Milgram, *The topology of the space of rational maps into generalised flag manifolds*, A paraître aux Acta Math., p. 35.

[BHMM2] ———, *The topology of instanton moduli spaces. I: The Atiyah-Jones Conjecture*, Ann. of Math. **137**(1993), 561–609.

[BHMM3] ———*Holomorphic maps of Riemann surfaces into almost Lie groups*, en preparation.

[BPV] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer Verlag, New York, 1984.

[CCMM] F. R. Cohen, R. L. Cohen, B. M. Mann and R. J. Milgram, *The topology of rational functons and divisors of surfaces*, Acta Math. **166**(1991), 163–221.

[D1] S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, Comm. Math. Phys. **93**(1984), 453–461.

[D2] ———, *Anti-self-dual connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. **50**(1985), 1–26.

[DK] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[EL] J. Eells and L. Lemaire, *Another Report on Harmonic Maps*, Bull. London Math. Soc. **20**(1988), 385–524.

[EW] J. Eells and J. Wood, *Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces*, Adv. Math. **49**(1983), 217–263.

[G] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann* Amer. J. Math. **79**(1957), 121–138

[Gu1] M. A. Guest, *Topology of the space of absolute minima of the energy functional*, Amer. J. Math. **106** (1984), 21–42.

[Gu2] ———, *The topology of the space of rational curves on a toric variety*, prétirage, Rochester University, 1993.

[Gr] J. Gravesen, *On the topology of spaces of holomorphic maps*, Acta Math. **162**(1989), 247–286.

[H] J. C. Hurtubise, *Holomorphic maps of a Riemann surface into a flag manifold*, prétirage CRM, 1994, J. Differential Geom., à paraître.

[HM] J. C. Hurtubise and R. J. Milgram, *The Atiyah-Jones conjecture for ruled surfaces*, prétirage, 1993.

[L] B. Lawson, *Algebraic cycles and homotopy theory*, Ann. of Math. **129**(1989), 253–291.

[Ki1] F. C. Kirwan, *On spaces of maps from Riemann surfaces to Grassmannians and applications to the cohomology of moduli of vector bundles*, Ark. Mat. (2)**24**(1986), 221–275.

[Ki2] ———, *Geometric invariant theory and the Atiyah-Jones conjecture*, prétirage d'Oxford University, 1992.

[May] J. P. May, *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. **271**, 1972.

[Mi] R. J. Milgram, *Iterated loop spaces*, Ann. of Math. **84**(1966) 386–403.

[MM] B. M. Mann and R. J. Milgram, *On the moduli space of* $\mathrm{SU}(n)$ *monopoles and holomorphic maps to flag manifolds*, J. Differential Geom. (1) **38**(1993), 39–103.

[S] G. Segal, *The topology of rational functions*, Acta Math., 143 (1979), 39–72.

[T1] C. H. Taubes, *Path-connected Yang-Mills moduli spaces*, J. Differential Geom. **19**(1984), 337–392.

[T2] ———, *The stable topology of self-dual moduli spaces*, J. Differential Geom. **29**(1989), 163–230.

[Ti] Y. Tian, *The based* $\mathrm{SU}(n)$*-instanton moduli spaces*, Math. Ann. **298**(1994), 117–140.

[U] K. Uhlenbeck, *Variational Problems for gauge fields*. Dans Seminar on Differential Geometry, (ed. S.-T. Yau), Ann. of Math. Stud. **102**, Princeton University Press, 1982.

Department of Mathematics and Statistics
McGill University
805 rue Sherbrooke O.
Montréal, Québec
H3A 2K6
e-mail: hurtubis@gauss.math.mcgill.ca