SUR QUELQUES SÉRIES DE LAMBERT ET DE DIRICHLET

JACQUES TOUCHARD

Introduction. Nous nous occupons dans ce travail de séries dont voici le type le plus simple

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k} \frac{y^k}{1-y^k}$$

et de leurs analogues lorsqu'on remplace x^n par n^{-s} et y^n par $n^{-s'}$. Faute d'une autre désignation, nous avons cru pouvoir appeler ces séries respectivement séries de Lambert et séries de Dirichlet. Une série plus générale que la précédente est

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{g(x^k)}{1-x^{2\omega k}} \frac{g(y^k)}{1-y^{2\omega k}}$$

où les a_k sont des constantes et où $g(x)$ est un polynôme dont les coefficients sont des symboles de Jacobi (**1**, pp. 132-40; **4** pp 361–9).

$$\chi(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$$

possédant la période 2ω.

Les expressions

$$g\left(e^{\frac{2\pi im}{2\omega}}\right)$$

ont des propriétés multiplicatives analogues à celles des sommes de Ramanujan (**6**) d'où l'on peut déduire deux propositions concernant les racines de $g(x)$. Nous nous bornerons à les énoncer, dans les §§ 6 et 7, car elles résultent des calculs effectués autrefois par Dirichlet (**2**, pp. 46–50, 188–93), dans ses recherches sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un déterminant donné. Les polynômes $g(x)$ sont donc loin d'être nouveaux. Nous les avons utilisés toutefois, dans les §§ 10 et 11, pour obtenir des séries analogues à une belle série de Ramanujan. Dans les §§ 13 et 14, nous avons donné la représentation par des intégrales définies de diverses fonctions examinées auparavant.

1. Séries de Lambert. Soit $\chi(n)$ une fonction arithmétique complètement multiplicative, c'est-à-dire telle que $\chi(m)\cdot\chi(n) = \chi(m\ n)$, quels que soient

Reçu le 10 août, 1958.

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

les entiers positifs m et n. Désignons par $A(x)$ la série supposée convergente

$$(1) \qquad A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)x^n$$

et soit

$$(2) \qquad G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A(x^k)A(y^k),$$

où les a_k sont des coefficients constants. Quel est le terme en $x^\lambda y^\mu$ au second membre de (2)? Comme

$$(3) \qquad a_k A(x^k)A(y^k) = a_k \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{h'=1}^{\infty} \chi(h)\chi(h')x^{hk}y^{h'k}$$

on n'aura $hk = \lambda$, $h'k = \mu$, que si k est un diviseur commun de λ et μ et, par suite, un diviseur $k = d$ de leur p.g.c.d. Δ. S'il en est ainsi, le terme en $x^\lambda y^\mu$, en provenance de (3), sera

$$a_d \chi\left(\frac{\lambda}{d}\right) \chi\left(\frac{\mu}{d}\right) x^\lambda y^\mu.$$

Posons $\lambda = \Delta\lambda'$, $\mu = \Delta\mu'$, de sorte que $(\lambda', \mu') = 1$, on voit que le terme en

$$x^\lambda y^\mu = (x^\Delta)^{\lambda'}(y^\Delta)^{\mu'},$$

au second membre de (2) sera

$$\sum_{d|\Delta} a_d \chi\left(\frac{\lambda}{d}\right)\chi\left(\frac{\mu}{d}\right) (x^\Delta)^{\lambda'}(y^\Delta)^{\mu'}$$

ou encore, puisque $\chi(n)$ est complètement multiplicative,

$$\left[\sum_{d|\Delta} a_d \chi^2\left(\frac{\Delta}{d}\right)\right]\chi(\lambda'\mu')(x^\Delta)^{\lambda'}(y^\Delta)^{\mu'}.$$

Soit donc

$$(4) \qquad \gamma(x, y) = \sum_{(l,m)=1} \chi(l\, m)x^l y^m$$

où $l = 1, 2, 3, \ldots, m = 1, 2, 3 \ldots$ mais sont premiers entre eux, le p.g.c.d. Δ peut prendre toutes les valeurs entières $1, 2, 3 \ldots$ et, par conséquent, en remarquant que $\chi(1) = 1$

$$(5) \qquad G(x, y) = a_1\gamma(x, y) + \ldots + \left(\sum_{d|n} a_d \chi^2\left(\frac{n}{d}\right)\right) \gamma(x^n, y^n) + \ldots.$$

Considérons ensuite la série

$$(6) \qquad G(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A(x^k)A(y^k)A(z^k).$$

En raisonnant comme plus haut, cherchons le terme en $x^\lambda y^\mu z^\nu$ au second membre de (6). Désignons par Δ le p.g.c.d. de λ, μ, ν et posons $\lambda = \Delta\lambda'$, $\mu = \Delta\mu'$, $\nu = \Delta\nu'$; λ', μ', ν' seront premiers entre eux dans leur ensemble et le terme cherché en

$$x^\lambda y^\mu z^\nu = (x^\Delta)^{\lambda'}(y^\Delta)^{\mu'}(z^\Delta)^{\nu'}$$

sera

$$\left(\sum_{d|\Delta} a_d \chi^3\left(\frac{\Delta}{d}\right)\right)\chi(\lambda'\mu'\nu')(x^\Delta)^{\lambda'}(y^\Delta)^{\mu'}(z^\Delta)^{\nu'}.$$

Soit alors

$$\gamma(x, y, z) = \sum_{(l,m,n)=1} \chi(lmn)x^l y^m z^n, \tag{7}$$

où les entiers l, m, n varient chacun de 1 à ∞ mais sont premiers entre eux dans leur ensemble, on aura

$$G(x, y, z) = a_1\gamma(x, y, z) + \ldots + \left(\sum_{d|n} a_d \chi^3\left(\frac{n}{d}\right)\right)\gamma(x^n, y^n, z^n) + \ldots. \tag{8}$$

Il est clair que des formules analogues aux précédentes ont lieu quel que soit le nombre des variables qui figurent dans les fonctions G et γ.

2. Series de Dirichlet. Utilisons, comme beaucoup d'auteurs l'ont fait, la correspondance entre

$$x^n \text{ et } n^{-s},\ y^n \text{ et } n^{-s'},\ z^n \text{ et } n^{-s''};$$

l'analogue de $A(x)$ est

$$\mathrm{X}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{9}$$

l'analogue de $A(x^k)$ est $k^{-s}\,\mathrm{X}(s)$ et l'analogue de $G(x, y)$ est

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\mathrm{X}(s)}{k^s}\frac{\mathrm{X}(s')}{k^{s'}} = \mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s') \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^{s+s'}}. \tag{10}$$

Posons de plus

$$\mathrm{X}_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^q(n)}{n^s}, \qquad q = 2, 3 \ldots \tag{11}$$

et soit, d'autre part, $\xi\,(s, s')$ l'analogue de $\gamma(x, y)$

$$\xi(s, s') = \sum_{(l,m)=1} \frac{\chi(lm)}{l^s m^{s'}}; \tag{12}$$

l'analogue de $\gamma(x^n, y^n)$ sera $n^{-s-s'}\xi(s, s')$ et le second membre de l'égaligé (5) devient

$$\xi(s, s')\left[\frac{a_1}{1^{s+s'}} + \ldots + \frac{1}{n^{s+s'}} \sum_{d|n} a_d \chi^2\left(\frac{n}{d}\right) + \ldots\right].$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

Le crochet est le produit de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^2(n)}{n^{s+s'}} = \mathrm{X}_2(s+s') \quad \text{par} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+s'}} \, ;$$

en comparant à (10), on obtient la formule

$$\xi(s, s') = \frac{\mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s')}{\mathrm{X}_2(s+s')} \tag{13}$$

Un procédé entièrement semblable donnera, en s'appuyant sur les formules (7) et (8) et en posant

$$\xi(s, s', s'') = \sum_{(l,m,n)=1} \frac{\chi(lmn)}{l^s m^{s'} n^{s''}}, \tag{14}$$

la relation

$$\xi(s, s', s'') = \frac{\mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s')\mathrm{X}(s'')}{\mathrm{X}_3(s+s'+s'')}. \tag{15}$$

Les formules (13) et (15) sont faciles à démontrer directement. Considérons, par exemple, la formule (14); multiplions les deux membres par

$$\chi^3(k) k^{-s-s'-s''},$$

nous aurons:

$$\begin{aligned} \frac{\chi^3(k)}{k^{s+s'+s''}} \xi(s, s', s'') &= \sum_{(l,m,n)=1} \frac{\chi(lk)\chi(mk)\chi(nk)}{(lk)^s (mk)^{s'} (nk)^{s''}} \\ &= \sum_{(l,m,n)=k} \frac{\chi(lmn)}{l^s m^{s'} n^{s''}}, \end{aligned}$$

où k est le p.g.c.d. des trois nombres l, m, et n. Comme les groupes de trois nombres entiers positifs quelconques ont pour p.g.c.d. soit 1, soit 2, soit 3, . . . , on aura, en faisant dans l'égalité précédente $k = 1, 2, 3 \ldots$ et en sommant,

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_3(s+s'+s'') \, \xi(s, s', s'') &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi(l)}{l^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^{s'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{s''}} \\ &= \mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s')\mathrm{X}(s''), \end{aligned}$$

ce qui est la formule (15). On peut trouver plusieurs autres démonstrations, notamment en se servant de la décomposition de $\mathrm{X}(s)$ en facteurs. Nous allons maintenant donner deux exemples très simples.

3. Exemples. Comme premier exemple, soit $\chi(n)$ un caractère complexe (**7**, pp. 391–414) au sens de Dirichlet, pour le module 9. Le nombre 9 a deux racines primitives 2 et 5 et $\phi(9) = 6$. Choisissons la racine primitive 2 comme base des indices et $\omega = j = \exp(2\pi i/3)$ comme racine de $x^6 - 1 = 0$. Alors

$$\chi(n) = \omega^{ind n} \text{ et } \chi(n) = 0, \text{ si } 3|n.$$

$$\chi(1) = 1, \quad \chi(2) = j, \quad \chi(3) = 0, \quad \chi(4) = j^2,$$
$$\chi(5) = j^2, \quad \chi(6) = 0, \quad \chi(7) = j, \quad \chi(8) = 1$$
$$\chi(9) = 0$$
$$\chi(n + 9) = \chi(n).$$

En conservant les notations de la § 2, on a

$$\xi(s, s') = \frac{X(s)X(s')}{X_2(s + s')}$$

$$\xi(s, s', s'') = \frac{X(s)X(s')X(s'')}{X_3(s + s' + s'')}$$
$$= \frac{X(s)X(s')X(s'')}{(1 - 3^{-s-s'-s''})\zeta(s + s' + s'')}.$$

$\zeta(\sigma)$ étant la fonction de Riemann. Enfin, comme $\chi^4(n) = \chi(n)$, d'où $X_4(s) = X(s)$, si l'on pose

$$\xi(s_1, s_2 \ldots s_4) = \sum_{(l_1, l_2, \ldots l_4)=1} \frac{\chi(l_1 l_2 \ldots l_4)}{l_1^{s_1} l_2^{s_2} \ldots l_4^{s_4}}$$

on aura

$$\xi(s_1, s_2, s_3, s_4) = \frac{X(s_1)X(s_2)X(s_3)X(s_4)}{X(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)}.$$

Si, au lieu de former les caractères (mod 9) avec la racine $\omega = +j$, nous avions choisi la racine $\omega = -j$, il aurait fallu 7 variables $s_1, s_2 \ldots s_7$ pour obtenir

$$\xi(s_1, s_2, \ldots, s_7) = \frac{X(s_1)X(s_2) \ldots X(s_7)}{X(s_1 + s_2 + \ldots + s_7)}.$$

4. Comme deuxième exemple de fonction complètement multiplicative, nous choisirons la fonction $\lambda(n)$ ainsi définie (**6**, p. 254):

$$n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2} \ldots, \qquad \lambda(n) = (-1)^{a_1+a_2+\cdots}.$$

On sait que

$$X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

et il est clair que

$$X_2(s) = \zeta(s).$$

Nous avons donc, d'après le §2, les formules

$$\sum_{(l,m)=1} \frac{\lambda(lm)}{l^s m^{s'}} = \frac{\zeta(2s)\zeta(2s')}{\zeta(s)\zeta(s')\zeta(s + s')}.$$

et

$$\sum_{(l,m,n)=1} \frac{\lambda(lmn)}{l^s m^{s'} n^{s''}} = \frac{\zeta(2s)\zeta(2s')\zeta(2s'')\zeta(s+s'+s'')}{\zeta(s)\zeta(s')\zeta(s'')\zeta(2s+2s'+2s'')}$$

On aurait un exemple analogue en prenant, au lieu de $\lambda(n)$, la fonction $\lambda(n)(-1/n) = \lambda(n) \sin(\frac{1}{2}n\pi)$, utilisée par Landau **(8)**.

5. Symbole de Jacobi. Nous allons maintenant nous borner aux fonctions complètement multiplicatives qui sont les caractères de Dirichlet réels c'est-à-dire égaux à ± 1. On sait qu'un tel caractère se réduit au symbole de Jacobi (D/n).

Pour simplifier, nous supposerons que le nombre D est positif et qu'il n'a pas de diviseur carré. Par suite, si P désigne un produit de facteurs premiers impairs, tous différents, on aura soit $D = P$, soit $D = 2P$. Cela étant nous croyons utile de rassembler, ici quelques propriétés du caractère $\chi(n) = (D/n)$.

$\chi(n)$ est nul, si n n'est pas premier à $2D$. La plus petite période 2ω de $\chi(n)$ est:

$$\begin{aligned} &\text{si } D = P \equiv 1 \pmod 4, && 2\omega = 2P, \\ &\text{si } D = P \equiv 3 \pmod 4, && 2\omega = 4P, \\ &\text{si } D = 2P, && 2\omega = 8P, \end{aligned}$$

$$\chi(n + 2\omega) = \chi(n). \tag{16}$$

En outre

$$\chi(2\omega - n) = \chi(n), \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\omega} \chi(n) = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{n=1}^{2\omega} \chi(n) = 0. \tag{19}$$

Les équations (16) à (19) sont valables dans les trois cas.

Quand la période 2ω est divisible par 4 ou par 8, on a

$$\chi(n + \omega) = -\chi(n), \tag{20}$$

mais il n'en est plus de même quand 2ω est le double d'un impair:

Si $2\omega = 4P$, on a

$$\sum_{1}^{\omega} \chi(4k+1) = 0, \qquad \sum_{3}^{\omega} \chi(4k+3) = 0, \tag{21}$$

$$\sum_{1}^{2\omega} \chi(4k+1) = 0, \qquad \sum_{3}^{2\omega} \chi(4k+3) = 0. \tag{22}$$

Enfin, si $2\omega = 8P$, les équations (22) ont lieu, mais non pas les équations (21). Dans les formules ci-dessus, il faut comprendre que l'argument $4.k + 1$, par exemple, prend toutes les valeurs de cette forme plus petites que la limite

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

supérieure de la somme. Il est clair d'ailleurs que $\chi(n)$ est nul quand n n'est pas premier à 2ω.

6. Polynômes g(x). En gardant les notations de la section précédent, ces polynômes, dont nous avons parlé dans l'Introduction, sont définis par

$$g(x) = \sum_{(\mu, 2\omega)=1} \chi(\mu)x^{\mu}, \qquad \mu < 2\omega \tag{23}$$

Soir $\rho = \exp(\pi i/\omega)$, alors il est visible que, si α est premier à 2ω,

$$g(\rho^{\alpha}) = \chi(\alpha)g(\rho).$$

De plus et c'est la proposition A: *Si la période 2ω est divisible par 4 ou par 8, $g(x)$ admet toutes les racines non primitives de l'équation $x^{2\omega} - 1 = 0$.* Par exemple,

$$\text{si } \chi(n) = \left(\frac{15}{n}\right), \qquad 2\omega = 60,$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x + x^7 + x^{11} - x^{13} + x^{1\,7} - x^{19} - x^{23} - x^{29} - x^{31} \\ &\qquad - x^{37} - x^{41} + x^{43} - x^{47} + x^{49} + x^{53} + x^{59} \\ &= x(1 - x^{30})(1 + x^6)(1 + x^{10})(1 - x^{12}) \end{aligned}$$

et l,équation aux racines non primitives de $x^{60} - 1 = 0$ est

$$\Phi(x) = \frac{(x^{30} - 1)(x^{10} + 1)(x^6 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Une telle propriété ne peut plus avoir lieu quand la période 2ω est le double d'un impair. On a en effet, α étant premier à 2ω,

$$\rho^{\alpha+\omega} = -\rho^{\alpha}$$

et

$$g(\rho^{\alpha+\omega}) = -\chi(\alpha)g(\rho).$$

$\alpha + \omega$ est un nombre pair, premier à ω, et $-\rho^{\alpha}$ est une racine primitive de $x^{\omega} - 1 = 0$. Nous avons alors la proposition B:

Si 2ω est le double d'un impair, $g(x)$ admet toutes les racines non primitives de $x^{2\omega} - 1 = 0$, sauf celles qui sont racines primitives de $x^{\omega} - 1 = 0$. Par exemple, si

$$\chi(n) = \left(\frac{21}{n}\right), \qquad 2\omega = 42$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x + x^5 - x^{11} - x^{13} + x^{17} - x^{19} - x^{23} + x^{25} \\ &\qquad - x^{29} - x^{31} + x^{37} + x^{41} \\ &= x(x^6 - 1)(x^{14} - 1)(1 + x^4 + x^6 + x^{14} + x^{16} + x^{20}). \end{aligned}$$

L'équation aux racines non primitives de $x^{42} - 1 = 0$ est

$$\Phi(x) = \frac{(x^{21} - 1)(x^7 + 1)(x^3 + 1)}{x + 1} = 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

L'équation aux racines primitives de $x^{21} - 1 = 0$ est

$$F(x) = \frac{(x^{21} - 1)(x - 1)}{(x^3 - 1)(x^7 - 1)} = 0$$

et l'on a

$$\frac{\Phi(x)}{F(x)} = \frac{(x^{14} - 1)(x^6 - 1)}{x^2 - 1}$$

de sorte que

$$g(x) = \frac{\Phi(x)}{F(x)} g_1(x),$$

$g(x_1)$ étant un polynôme.

En vertu de ces deux propositions et en se rappelant que $\chi(m)$ est nul lorsque $(m, 2\omega) > 1$, on voit que si 2ω est divisible par 4 ou par 8,

$$(24) \qquad g\left(\exp\left(\frac{2\pi i m}{2\omega}\right)\right) = \chi(m)\, g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right)$$

quel que soit l'entier m et si 2ω est le double d'un impair, l'équation (24) a encore lieu, sauf pour les $\phi(2\omega)$ valeurs paires de m qui sont premières à ω. Pour ces valeurs $m = \alpha + \omega$, où $(\alpha, 2\omega) = 1$, on a

$$(25) \qquad g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}(\alpha + \omega)\right)\right) = -\chi(\alpha)\, g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right).$$

Nous ignorons si ces deux propositions A et B ont été énoncées explicitement. Comme nous l'avons dit en commençant, elles résultent des calculs de Dirichlet **(2)**. Il en est de même, quoique moins facilement, des propriétés multiplicatives qui suivent. Aussi indiquerons-nous très succintement les relations entre caractères qui permettent de les établir.

7. Propriétés multiplicatives de $g\left(\exp\left(\frac{2\pi i m}{2\omega}\right)\right)$.

Rappelons d'abord que, pour les sommes de Ramanujan

$$(26) \qquad c_q(m) = \sum_{(\mu, q)=1} \exp\left(\frac{2\pi i \mu m}{q}\right)$$

on a, lorsque $(q, q') = 1$,

$$c_q(m) c_{q'}(m) = c_{qq'}(m).$$

Les propriétés que nous allons énoncer comportent cinq cas différents. Posons

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

$$\chi(n) = \left(\frac{D}{n}\right), \qquad \chi'(n) = \left(\frac{D'}{n}\right),$$
$$\chi_1(n) = \left(\frac{DD'}{n}\right);$$

soient 2ω, $2\omega'$ et $2\omega_1$ les plus petites périodes respectives de $\chi(n)$, $\chi'(n)$ et $\chi_1(n)$.

h, h', h_1 désignant respectivement les entiers premiers à 2ω, $2\omega'$, $2\omega_1$ et $< 2\omega$, $2\omega'$, $2\omega_1$, nous poserons

$$g(x) = \sum \chi(h)x^h, \qquad g'(x) = \sum \chi'(h')x^{h'},$$
$$g_1(x) = \sum \chi_1(h_1)x^{h_1};$$

nous poserons encore

$$\rho = \exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right), \qquad \rho' = \exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega'}\right), \qquad \rho_1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega_1}\right).$$

Enfin P et P' seront deux entiers positifs impairs, premiers entre eux, et m est un entier positif quelconque.

1$^{\text{er}}$ Cas:

$$D = 2P, \qquad D' = P' \equiv 3 \pmod 4$$
$$g(\rho^m)g'(\rho'^m) = 2g_1(\rho_1{}^m).$$

La démonstration repose sur

$$\left(\frac{2PP'}{P'h + 2Ph'}\right) = \left(\frac{2P}{h}\right)\left(\frac{P'}{h'}\right).$$

2$^{\text{ième}}$ Cas: $D = 2P$, $D' = P' \equiv 1 \pmod 4$)

$$g(\rho^m)g'(\rho'^m) = -\left(\frac{2}{P'}\right)g_1(\rho_1^m).$$

La démonstration repose sur

$$\left(\frac{2PP'}{P'h + 4Ph'}\right) = -\left(\frac{2}{P'}\right)\left(\frac{2P}{h}\right)\left(\frac{P'}{h'}\right).$$

3$^{\text{ième}}$ Cas: $D = P \equiv 1 \pmod 4$, $D' = P' \equiv 3 \pmod 4$)

$$g(\rho^m)g'(\rho'^m) = -\left(\frac{2}{P}\right) g_1(\rho_1^m).$$

La démonstration repose sur

$$\left(\frac{PP'}{Ph' + 2P'h}\right) = -\left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{P}{h}\right)\left(\frac{P'}{h'}\right)$$

4$^{\text{ième}}$ Cas: $D = P \equiv 1 \pmod 4$, $D' = P' \equiv 1 \pmod 4$.

$$g(\rho^m)g'(\rho'^m) = e^{m\pi i}g_1(\rho_1^m).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

La démonstration repose sur ce que, si

$$h_1 = Ph' + P'h + PP',$$

on a

$$\left(\frac{PP'}{h_1}\right) = \left(\frac{P}{h}\right)\left(\frac{P'}{h'}\right).$$

5$^{\text{ième}}$ Cas: $D = P \equiv 3 \pmod 4$, $D' = P' \equiv 3 \pmod 4$

$$g(\rho^m)g'(\rho'^m) = -\left(\frac{2}{PP'}\right) 2(1 - e^{m\pi i})\, g_1(\rho_1^m).$$

La démonstration repose sur ce que: d'une part, si $h_1 = (P'h + Ph')/2$ est impair,

$$\left(\frac{PP'}{h_1}\right) = -\left(\frac{2}{PP'}\right)\left(\frac{P}{h}\right)\left(\frac{P'}{h'}\right),$$

d'autre part, si $h_1 = (P'h + Ph')/2$ est pair,

$$\left(\frac{PP'}{h_1 + PP'}\right) = \left(\frac{2}{PP'}\right)\left(\frac{P}{h}\right)\left(\frac{P'}{h'}\right).$$

8. Il résulte, en définitive, des équations (24) et (25) que la connaissance de $g\ (\exp(\pi im/\omega))$ est ramenée à celle de $g\ (\exp(\pi i/\omega))$. Celle-ci exige la connaissance des sommes de Gauss. Les calculs de Dirichlet (**2**, pp. 188–93) montrent que si

$$\chi(n) = \left(\frac{P}{n}\right), \qquad P \equiv 1 \pmod 4;\, 2.\omega = 2P,$$

$$g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2P}\right)\right) = -\left(\frac{2}{P}\right)\sqrt{P};$$

si

$$\chi(n) = \left(\frac{P}{n}\right), \qquad P \equiv 3 \pmod 4, \qquad 2\,.\,\omega = 4P,$$

$$g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{4P}\right)\right) = \sqrt{4P};$$

si

$$\chi(n) = \left(\frac{2P}{n}\right), \qquad 2\omega = 8P,$$

$$g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{8P}\right)\right) = \sqrt{8P}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

9. Nous revenons à la série (1) du §1, en supposant que $\chi(n)$ est le symbole de Jacobi du § 5, ayant la période 2ω. On a alors

$$A(x) = \frac{g(x)}{1 - x^{2\omega}},$$

où $g(x)$ est le polynôme (23). La série (2) devient

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{g(x^k)}{1 - x^{2.\omega.k}} \frac{g(y^k)}{1 - y^{2\omega k}} \tag{27}$$

et la formule (5) subsiste. Cherchons quel est, au second membre de (4), le coefficient de $\chi(m)y^m$, sans nous inquiéter de la valeur, nulle ou non nulle, de $\chi(m)$. Ce sera

$$\sum_{(l,m)=1} \chi(l)x^l.$$

Comme $\chi(l)$ a la période 2ω et que l doit être premier à m, on aura

$$\sum_{(l,m)=1} \chi(l)x^l = \frac{f(x, 2m\omega)}{1 - x^{2m\omega}}$$

où

$$f(x, 2m\omega) = \sum_{(\mu,m)=1} \chi(\mu)x^\mu, \tag{28}$$

$$1 \leqslant \mu \leqslant 2m \,.\, \omega - 1$$

ou bien, si l'on veut, d'après les propriétés de $\chi(\mu)$,

$$f(x, 2m\omega) = \sum_{(\mu,\, 2m\omega)=1} \chi(\mu)x^\mu, \tag{29}$$

$$1 \leqslant \mu \leqslant 2m \,.\, \omega - 1.$$

On voit que $g(x) = f(x, 2\omega)$. Ainsi

$$\gamma(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} \chi(q)y^q \frac{f(x, 2q\omega)}{1 - x^{2q\omega}}. \tag{30}$$

On obtient une autre expression du polynôme $f(x, 2q\omega)$ de la manière suivante. Identifions les termes en a_1 au second membre de (27) et au second membre de (5), nous obtenons

$$\frac{g(x)}{1 - x^{2\omega}} \frac{g(y)}{1 - y^{2\omega}} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^2(n)\gamma(x^n, y^n). \tag{31}$$

L'inversion de cette formule est facile; elle revient, comme on le sait, ayant

$$G(s) = F(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^2(n)}{n^s}$$

à en déduire

$$F(s) = G(s) \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{\chi^2(n)}{n^s},$$

où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius. On a donc

$$\gamma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\ \chi^2(k) \frac{g(x^k)}{1 - x^{2\omega k}} \frac{g(y^k)}{1 - y^{2\omega k}} \tag{32}$$

Le terme en y^q, au second membre de (32), est

$$y^q \sum_{d|q} \mu(d) \chi^2(d) \chi\left(\frac{q}{d}\right) \frac{g(x^d)}{1 - x^{2\omega d}}$$

et, en comparant à (30), on trouve

$$\chi(q) f(x, 2q\omega) = \sum_{d|q} \mu(d) \chi^2(d) \chi\left(\frac{q}{d}\right) g(x^d) \frac{1 - x^{2q\omega}}{1 - x^{2d\omega}} \tag{33}$$

et, comme

$$\chi^2(d) \chi\left(\frac{q}{d}\right) = \chi(q) \cdot \chi(d),$$

on a aussi, en divisant les deux membres par $\chi(q)$,

$$f(x, 2q\omega) = \sum_{d|q} \mu(d) \chi(d) g(x^d) \frac{1 - x^{2q\omega}}{1 - x^{2d\omega}}. \tag{34}$$

Cette formule (34) subsiste même si $\chi(q)$ est nul car si l'on pose, pour un instant

$$h(x) = g(x) \frac{1 - x^{2q\omega}}{1 - x^{2\omega}},$$

le second membre de (34) n'est autre que le polynôme $h(x)$, privé des termes $\chi(\mu) x^{\mu}$, où μ n'est pas premier à q. C'est donc bien le polynôme $f(x, 2q\omega)$.

10. Séries analogues à une série de Ramanujan. Nous allons chercher une expression de la somme des trois séries

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} f(x^{n|q}, 2q\omega) \frac{1}{q^s},$$

$$S_1 = \sum_{q=1}^{\infty} f(x^{n|q}, 2q\omega) \frac{\chi(q)}{q^s},$$

$$S_2 = \sum_{q=1}^{\infty} f(x^{n|q}, 2q\omega) \frac{\chi^2(q)}{q^s},$$

où n désigne un entier positif quelconque et en nous bornant, pour simplifier, aux cas où la période 2ω de $\chi(n)$ est divisible par 4 ou par 8. Dans ces cas, a lieu la formule (24). En outre $X(s)$ et $X_2(s)$ auront les significations (9) et (11) du § 2.

Dans la formule (34), remplaçons x par $x^{n/q}$; elle devient

$$(35)\qquad f(x^{n/q}, 2q\omega) = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right)\chi\left(\frac{q}{d}\right)g(x^{n/d})\,\frac{1 - x^{2n\omega}}{1 - x^{2n\omega/d}}$$

et, en substituant cette expression dans S, on voit que le second membre est le produit de

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)\,.\,\chi(q)}{q^s}$$

par

$$\sum_{q=1}^{\infty} g(x^{n/q})\,\frac{1 - x^{2n\omega}}{1 - x^{2n\omega/q}}\,\frac{1}{q^s}\,.$$

On a donc

$$(36)\qquad S = \frac{1}{X(s)}\sum_{q=1}^{\infty} g(x^{n/q})\,\frac{1 - x^{2n\omega}}{1 - x^{2n\omega/q}}\cdot\frac{1}{q^s}\,.$$

De même, en remplaçant x par $x^{n/q}$, dans la formule (33), et en substituant dans S_1, nous aurons

$$(37)\qquad S_1 = \frac{1}{X_2(s)}\sum_{q=1}^{\infty} \chi(q)g(x^{n/q})\,\frac{1 - x^{2n\omega}}{1 - x^{2n\omega/q}}\cdot\frac{1}{q^s}\,.$$

Enfin, on déduit de (35)

$$\chi^2(q)f(x^{n/q}, 2q\omega) = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right)\chi\left(\frac{q}{d}\right)\chi^2(d)g(x^{n/d})\,\frac{1 - x^{2n\omega}}{1 - x^{2n\omega/d}}$$

et, en substituant dans S_2, on obtient

$$(38)\qquad S_2 = \frac{1}{X(s)}\sum_{q=1}^{\infty} \chi^2(q)g(x^{n/q})\,\frac{1 - x^{2n\omega}}{1 - x^{2n\omega/q}}\cdot\frac{1}{q^s}\,.$$

Faisons maintenant $x = \exp(2\pi i/2\omega)$ dans les trois équations (36), (37), et (38);
le facteur

$$\frac{1 - x^{2n\omega}}{1 - x^{2n\omega/q}}$$

est nul si q ne divise pas n et est égal à q si q divise n. Nous avons donc

$$(39)\qquad \sum_{q=1}^{\infty} f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{2q\omega}\right), 2q\omega\right)\frac{1}{q^s} = \frac{g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right)}{n^{s-1}X(s)}\sum_{d|n} \chi(d)d^{s-1},$$

$$(40)\qquad \sum_{q=1}^{\infty} f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{2q\omega}\right), 2q\omega\right)\frac{\chi(q)}{q^s} = \frac{\chi(n)\,g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right)}{n^{s-1}X_2(s)}\sum_{d|n} d^{s-1},$$

$$(41)\qquad \sum_{q=1}^{\infty} f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{2q\omega}\right), 2q\omega\right)\frac{\chi^2(q)}{q^s} = \frac{\chi(n)\,g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right)}{n^{s-1}X(s)}\sum_{d|n} \chi\left(\frac{n}{d}\right)d^{s-1}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

Ce sont ces trois dernières formules que l'on peut considérer comme étant analogues à la formule de Ramanujan **(6**, pp. 55, 237**)**

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q(n)}{q^s} = \frac{1}{n^{s-1}\zeta(s)} \sum_{d|n} d^{s-1}.$$

Si nous supposons l'entier n premier à 2ω, ses diviseurs d le sont aussi et $\chi(n/d) = \chi(n)\chi(d)$, de sorte que les seconds membres de (39) et (41) sont les mêmes et, par suite, les premiers membres sont égaux. C'est ce que l'on peut démontrer directement. Il faut observer que, lorsque n.q est premier à 2ω, la somme

$$f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{2q\omega}\right), 2q\omega\right)$$

a un rapport étroit avec la somme de Ramanujan (26), dont l'expression arithmétique est **(6**, p. 237**)**

$$c_q(n) = \sum_{d|q.\, d|n} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d. \tag{42}$$

Reprenons en effet la formule (35) et faisons

$$x = \exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right),$$

nous obtenons

$$f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{2q\omega}\right), 2q\omega\right) = g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right) \sum_{d|q.\, d|n} \mu\left(\frac{q}{d}\right)\chi\left(\frac{q}{d}\right)\chi\left(\frac{n}{d}\right) . d.$$

Or

$$\chi\left(\frac{q}{d}\right)\chi\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{\chi(qn)}{\chi^2(d)} = \chi(qn), \tag{43}$$

car $\chi(d)$ n'est pas nul, donc

$$\begin{aligned} f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{2q\omega}\right), 2q\omega\right) &= g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right) \chi(q\, .\, n) \sum_{dq|.\, d|n} \mu\left(\frac{q}{d}\right) . d \\ &= g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{2\omega}\right)\right) \chi(q\, .\, n)\, c_q(n). \end{aligned} \tag{44}$$

La formule (44) subsisterait si un seul des nombres q et n avait un diviseur commun avec 2ω, mais son second membre serait nul. Si, au contraire, q et n avaient chacun un diviseur commun avec 2ω, la formule (44) n'aurait plus lieu.

11. Exemple. Prenons

$$\chi(n) = \left(\frac{-1}{n}\right);$$

Ici, $D = -1$ est négatif, ce que nous avions exclu précédemment, notamment de la § 8, mais on a facilement

$$\begin{aligned} X(s) &= 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \ldots = L(s), \\ X_2(s) &= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots = (1 - 2^{-s})\,\zeta(s) \end{aligned} \tag{45}$$

la période de $\chi(n)$ est $2\omega = 4$

$$g(x) = x - x^3,\ g\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right)\right) = 2i,\ g\left(\exp\left(\frac{2\pi i m}{4}\right)\right) = 2i\,.\,\chi(m)$$

$$f(x, 4q) = \sum_{(\mu, 4q)=1} \chi(\mu) x^{\mu}, \qquad \mu < 4q$$

et l'application des formules (39) à (41) nous donne

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{\infty} f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{4q}\right), 4q\right) \frac{1}{q^s} = \frac{2i}{n^{s-1} L(s)} \sum_{d|n} \chi(d)\, d^{s-1} \\ &\sum_{q=1}^{\infty} f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{4q}\right), 4q\right) \frac{\chi(q)}{q^s} = \frac{2i\chi(n)}{(1 - 2^{-s})\zeta(s)} \frac{\sigma_{s-1}(n)}{n^{s-1}} \\ &\sum_{q=1}^{\infty} f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{4q}\right), 4q\right) \frac{\chi^2(q)}{q^s} = \frac{2i\chi(n)}{n^{s-1} L(s)} \sum_{d|n} \chi\left(\frac{n}{d}\right) d^{s-1}. \end{aligned} \tag{46}$$

On voit sur (46) que, si les facteurs premiers impairs de n sont tous $\equiv 1 \pmod 4$, il en est de même pour tous les diviseurs impairs de n et, dans ce cas, le second membre de (46) se réduit à

$$\frac{2i\sigma_{s-1}(n)}{n^{s-1} L(s)}.$$

Enfin, d'après (44), si $n\,q$ est impair,

$$f\left(\exp\left(\frac{2\pi i n}{4q}\right), 4q\right) = 2i\,\chi(n\,.\,q) c_q(n).$$

12. Nous signalons qu'on peut obtenir une généralisation des résultats des §§ 9 et 10 en partant de la formule (7) que nous récrivons

$$\gamma(x, y, z) = \sum_{(l,m,n)=1} \chi(l)\chi(m)\chi(n) x^l y^m z^n$$

et de l'équation (8) dont on tirera, comme tout à l'heure, par inversion

$$\gamma(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\chi(k) \frac{g(x^k)}{1 - x^{2\omega k}} \frac{g(y^k)}{1 - y^{2\omega k}} \frac{g(z^k)}{1 - z^{2\omega k}}. \tag{47}$$

La formule (47) se prête au développement du premier membre suivant les puissances d'une des variables, z par exemple, et la formule (7) se prête au développement suivant les fonctions $\gamma(x, y)$, $\gamma(x^2, y^2), \ldots, \gamma(x^n, y^n), \ldots$. On peut ainsi trouver des sommes et des séries analogues à celles de Ramanujan.

13. Intégrales définies. Schlömilch **(11**, p. 277**)**, en transformant une intégrale d'Abel, a donné la formule

$$\int_0^\infty \frac{u^{y-1}du}{(l+mu)^{x+y}} = \frac{\Gamma(x)\,.\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\frac{1}{l^x m^y}, \qquad R(x) > 1, R(y) > 1. \tag{48}$$

Posons

$$P(u, \sigma) = \sum_{(l,m)=1} \frac{1}{(l+mu)^\sigma}, \; R(\sigma) > 2, \tag{49}$$

nous aurons

$$\int_0^\infty u^{s'-1} P(u, s+s')\, du = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s')}{\Gamma(s+s')}\frac{\zeta(s)\zeta(s')}{\zeta(s+s')}. \tag{50}$$

Si nous multiplions les deux membres de (49) par $\zeta(\sigma)$, il viendra

$$\zeta(\sigma)P(u, \sigma) = Q(u, \sigma) = \sum_{l=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(l+mu)^\sigma} \tag{51}$$

et par suite,

$$\int_0^\infty u^{s-1}\, Q(u, s+s')\, du = \frac{\Gamma(s)\,.\,\Gamma(s')}{\Gamma(s+s')}\zeta(s)\,.\,\zeta(s'). \tag{52}$$

Il semble que la formule (50) puisse présenter un certain intérêt. Lorsque s et s' sont des entiers pairs, l'intégrale du premier membre est un nombre rationnel et on peut rappeler qu'Euler **(5**, p. 350**)** a cherché des expressions, telles que:

$$\zeta(3) = 2^2 B_{3/2}\frac{\pi^3}{3!}, \qquad B_{3/2} = 0{,}05815227\ldots$$

$$\zeta(5) = 2^4 B_{5/2}\frac{\pi^5}{5!}, \qquad B_{5/2} = 0{,}02541327\ldots$$

$$\ldots$$

Partons maintenant d'une intégrale qui se déduit aisément d'une formule de Liouville **(3**, p. 150**)**:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{u^{s'-1}v^{s''-1}dudv}{(l+mu+nv)^{s+s'+s''}} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s')\Gamma(s'')}{\Gamma(s+s'+s'')}\frac{1}{l^s m^{s'} n^{s''}}, \tag{53}$$

où les parties réelles de s, s', s'' sont > 1, et posons

$$P(u, v, \sigma) = \sum_{(l,m,n)=1} \frac{1}{(l+mu+nv)^\sigma}, \qquad R(\sigma) > 3, \tag{54}$$

nous aurons

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{s-1}v^{s'-1}P(u, v, s+s'+s'')\, du\, dv = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s')\Gamma(s'')}{\Gamma(s+s'+s'')}\cdot\frac{\zeta(s)\zeta(s')\zeta(s'')}{\zeta(s+s'+s'')}. \tag{55}$$

Nous poserons encore

$$(56) \qquad Q(u, v, \sigma) = \zeta(\sigma)P(u, v, \sigma) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(l+mu+nv)^{\sigma}}$$

et, en multipliant les deux membres de (55) par $\zeta(s + s' + s'')$, nous obtiendrons une nouvelle formule qu'il est inutile d'écrire.

14. En supposant que $\chi(n)$ est un caractère réel et en posant comme au § 2

$$\mathrm{X}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}, \qquad \mathrm{X}_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi^2(n)n^{-s},$$

$$\mathrm{X}_3(s) = \mathrm{X}(s)$$

les calculs précédents s'étendent facilement. Soit

$$P(\chi, u, \sigma) = \sum_{(l,m)=1}\frac{\chi(lm)}{(l+mu)^{\sigma}}, \qquad R(\sigma) > 2,$$

$$P(\chi, u, v, \sigma) = \sum_{(l,m,n)=1}\frac{\chi(lmn)}{(l+mu+nv)^{\sigma}}, \qquad R(\sigma) > 3,$$

et soit également

$$\mathrm{X}_2(\sigma)P(\chi, u, \sigma) = Q(\chi, u, \sigma) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(lm)}{(l+mu)^{\sigma}},$$

$$\mathrm{X}(\sigma)P(\chi, u, v, \sigma) = Q(\chi, u, v, \sigma) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(lmn)}{(l+mu+nv)^{\sigma}}$$

nous aurons en partant des intégrales (48) et (53)

$$\int_0^{\infty}u^{s-1}P(\chi, u, s+s')\,du = \frac{\Gamma(s)\,.\,\Gamma(s')}{\Gamma(s+s')}\,\frac{\mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s')}{\mathrm{X}_2(s+s')},$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{s-1}v^{s'-1}P(\chi, u, v, s+s'+s'')\,du\,dv$$

$$= \frac{\Gamma(s)\Gamma(s')\Gamma(s'')}{\Gamma(s+s'+s'')}\,\frac{\mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s')\mathrm{X}(s'')}{\mathrm{X}(s+s'+s'')}$$

$$\int_0^{\infty}u^{s-1}Q(\chi, u, s+s')\,du = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s')}{\Gamma(s+s')}\,\mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s'),$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{s-1}v^{s'-1}Q(\chi, u, v, s+s'+s'')\,du\,dv$$

$$= \frac{\Gamma(s)\,.\,\Gamma(s')\,.\,\Gamma(s'')}{\Gamma(s+s'+s'')}\,\mathrm{X}(s)\mathrm{X}(s')\mathrm{X}(s'').$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-001-1 Published online by Cambridge University Press

Prenons en particulier le même caractère $\chi(n)$ que dans la § 11, nous aurons

$$(57) \qquad \int_0^\infty u^{s-1}P(\chi, u, s+s')\,du = \frac{\Gamma(s)\,.\,\Gamma(s')}{\Gamma(s+s')}\frac{L(s)L(s')}{(1-2^{-s-s'})\zeta(s+s')}$$

et

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{s-1}v^{s'-1}P(\chi, u, v, s+s'+s'')\,du\,dv$$

$$= \frac{\Gamma(s)\,.\,\Gamma(s')\,.\,\Gamma(s'')}{\Gamma(s+s'+s'')}\frac{L(s)L(s')L(s'')}{L(s+s'+s'')}.$$

15. Voici quelques exemples d'application de l'intégrale (50) que nous désignons par I (s, s') et de l'intégrale (57) que nous désignons par J (s, s'). On sait **(9**, p. 33**)** que

$$\zeta(2n) = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2n}\,.\,\frac{B_n}{(2n)!}$$

$$L(2n+1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\frac{E_n}{(2n)!}$$

$B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, . . . sont les nombres de Bernoulli $E_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 5, \ldots$, sont les nombres d'Euler. On trouve leurs valeurs dans **(10**, pp. 176–8**)**

$$I(2,2) = \frac{5}{12} \qquad J(1,3) = \frac{1}{4}$$

$$I(2,4) = \frac{7}{2^4\,.\,5} \qquad J(1,5) = \frac{5}{32}$$

$$I(3,3) = \frac{3^2\,.\,7}{2^6}\zeta^2(3) \qquad J(3,3) = \frac{1}{32}$$

$$I(2,6) = \frac{5}{2\,.\,3^2\,.\,7} \qquad J(1,7) = \frac{61}{2^5\,.\,17}$$

$$I(3,5) = \frac{2\,.\,3^2\,.\,5}{\pi^8}\zeta(3)\zeta(5) \qquad J(3,5) = \frac{5}{2^5\,.\,17}$$

$$I(5,5) = \frac{3^3\,.\,11}{2\,.\,\pi^{10}}\zeta(5) \qquad J(5,5) = \frac{5^2}{2^9\,.\,31}.$$

On voit qu'on peut obtenir des relations algébriques entre ces intégrales.

16. Considérons l'intégrale (52). Il n'est pas évident qu'elle a un sens car, pour la fonction $Q(u, \sigma)$, l'axe réel négatif est une ligne de points essentiels, y compris le point $u = 0$, et on voit directement qu'en faisant tendre u vers zéro par valeurs positives, $Q(u, \sigma)$ devient infini. Mais on établit sans peine la formule

$$(58) \qquad \Gamma(\sigma)Q(u,\sigma) = \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}dx}{(e^x-1)(e^{u.x}-1)}. \qquad R(\sigma) > 2.$$

En supposant u très petit positif, on a

$$\frac{1}{e^{ux}-1} = \frac{1}{ux}$$

et

$$\Gamma(\sigma)Q(u, \sigma) = \frac{1}{u}\Gamma(\sigma - 1)\zeta(\sigma - 1)$$

ou bien

$$Q(u, \sigma) = \frac{\zeta(\sigma - 1)}{\sigma - 1}\frac{1}{u},$$

et

$$P(u, \sigma) = \frac{1}{\sigma - 1}\frac{\zeta(\sigma - 1)}{\zeta(\sigma)}\frac{1}{u}.$$

On arriverait au même résultat en faisant, dans (58), u très grand positif et en se servant ensuite de la relation

$$Q\left(\frac{1}{u}, \sigma\right) = u^{\sigma} . Q(u, \sigma).$$

Les intégrales (50) et (52) ont donc bien un sens, puisque $R(s)$ et $R(s')$ sont > 1. Si nous considérons l'intégrale (52), en nous servant de (58) pour $\sigma = s + s'$, nous aurons

$$\int_0^\infty u^{s'-1}\,du \int_0^\infty \frac{x^{s+s'-1}\,dx}{(e^x - 1)(e^{ux} - 1)} = \Gamma(s)\zeta(s)\Gamma(s')\zeta(s'). \tag{59}$$

Posons $u = y/x$ et le premier membre devient

$$\int_0^\infty \frac{y^{s'-1}\,dy}{e^y - 1}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

ce qui constitue une démonstration directe de (59), donc de (52) et, par suite, de (50).

References

1. P. Bachmann, *Zahlentheorie*, Teil 1.
2. ——— *Zahlentheorie*, Teil 2.
3. G. Brunel, *Monographie de la fonction gamma.*
4. E. Cahen, *Théorie des nombres*, T. 2.
5. L. Euler, *Oeuvres*, Series Prima Vol. X.
6. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers* (2nd ed.; Oxford, 1954).
7. E. Landau, *Primzahlen*, vol. I.
8. ——— *Primzahlen*, vol. II.
9 E. Lindelöf, *Le Calcul des résidus.*
10. N. Nielsen, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli.*
11. O. Schlömilch, *Compendium der Höheren analysis*, vol. II.

Lausanne, Suisse