Canad. Math. Bull. Vol. **30** (2), 1987

HYPERSURFACES FRAMÉES ET L'ÉLÉMENT β_1 DE TODA

BY

A. BAKER, N. RAY ET L. SCHWARTZ

RÉSUMÉ. L'objet de cet article est de construire un modèle pour l'élément β_1 de Toda (premier élément non nul de la composante p-primaire de l'homotopie stable des sphères qui n'est pas dans l'image du J-homomorphisme, $p \neq 2$). Le modèle construit possède en outre la propriété de se plonger, comme variété différentiable, en codimension 1.

La construction, basée sur la J-théorie et la chirurgie, exhibe en outre des complexes cellulaires satisfaisant à certaines conditions de plongement, répondant partiellement à un problème posé par le 2^e et le 3^e auteur.

0. **Introduction**. Les éléments de l'homotopie stable des sphères qui sont dans l'image du J-homomorphisme peuvent être représentés par des sphères dont le fibré normal a été convenablement rétrivialisé.

Il est beaucoup plus difficile de construire des variétés dont le fibré normal est trivialisé, on dira framée, représentant d'autres éléments de l'homotopie stable. L'élément β_1 de Toda a été étudié de ce point de vue par divers auteurs.

Rappelons que, p étant un nombre premier impair, β_1 est le premier élément non nul de la composante p-primaire de $\pi_*^S(S^0)$ qui n'est pas dans l'image de J. Sa dimension est $2p^2 - 2p - 2$. Des méthodes homotopiques montrent qu'il existe une hypersurface dans $\mathbb{R}^{2p^2-2p-1}$ qui convenablement framée représente β_1 (voir [9] par exemple).

M. Atiyah et L. Smith ([1]) ont montré que le groupe de Lie Sp(2) muni de la trivialisation du fibré tangent induite par les translations à gauche représente β_1 pour $p = 3$. N. Ray a prouvé dans [8] que la variété $S^{p-2} \times_{\mathbb{Z}/p} (S^{2p-3})^p$ peut être framée de manière à représenter β_1, ceci pour tout p.

Il est facile de montrer qu'aucun de ces exemples n'est une hypersurface.

Dans [10], E. Rees a construit une hypersurface représentant β_1 pour $p = 3$. Il forme cône $S^3 \cup_{\alpha_1} e^7$, où α_1 est d'invariant d'Adams $1/3$; puis le plonge dans S^{11} et considère le bord d'un voisinage régulier de l'image du plongement. Convenablement framé, celui-ci représente β_1. Une construction analogue est faite dans [4] à l'aide de [6].

Nous donnons ici une construction, valable pour tout p, d'une hypersurface framée représentant β_1. Nos constructions utilisent de manière essentielle le théorème suivant dû à K. H. Knapp ([6]) :

Reçu par la rédaction le 14 août 1985 et sous forme revisée le 26 juin 1986.

AMS Subject Classification (1980): primary 57R15; Secondary 55Q45.

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-031-0 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 0.1. (i) *Il existe une variété stablement parallelisable M de dimension $2p + 2$ possédant deux classes de cohomologie $x, y \in H^2(M, \mathbb{Z})$ telles que :*

$$\langle x.y^p, [M]\rangle \equiv 1 \ (p).$$

(ii) *La variété $\mathbb{T}^2 \times (M)^{p-2}$ convenablement framée représente β_1.*

Ce théorème est à relier à la remarque terminale de [8] ; voir aussi [3]. La trivialisation du fibré normal à $\mathbb{T}^2 \times (M)^{p-2}$ est obtenue comme suit :

On part d'une trivialisation du fibré normal bordant à zéro, par exemple le produit d'une trivialisation quelconque du fibré normal à $(M)^{p-2}$ par la trivialisation standard bordant à zéro du fibré normal à $\mathbb{T}^2$. On verra qu'on peut supposer que $\mathbb{T}^2 \times (M)^{p-2}$ est une hypersurface, on peut également choisir la trivialisation unique à orientation près induite par un plongement comme hypersurface.

Puis on tord cette trivialisation (considérée stablement), par l'application γ définie par :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{T}^2 \times (M)^{p-2} \xrightarrow{1 \times (x,y)^{p-2}} \mathbb{T}^2 \times (B\mathbb{T}^2)^{p-2} \xrightarrow{1 \times m} & & \mathbb{T}^2 \times B\mathbb{T}^2 \\
\downarrow \gamma & & \downarrow \ell \\
SO \xleftarrow{r} U \xleftarrow{\oplus} U \times U \xleftarrow{R \times R} & & \sum (BS^1_+) \times \sum (BS^1_+)
\end{array}$$

où m est la multiplication du H-espace $B\mathbb{T}^2$, R l'application de réflexion complexe, ℓ est définie par :

$$\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \times BS^1 \times BS^1 \xrightarrow{1 \times T \times 1} S^1 \times BS^1 \times S^1 \times BS^1$$
$$\xrightarrow{c \times c} \sum (BS^1_+) \times \sum (BS^1_+)$$

où T échange les deux facteurs centraux, c l'application qui écrase $\{1\} \times BS^1$ sur le point base de $\sum (BS^1_+)$. Enfin r est le plongement canonique de U dans SO.

En fait l'application γ est à valeurs dans $SO(2p^2 - 4p + 2)$.

Des méthodes homotopiques montrent que la variété de Knapp M peut se représenter par une hypersurface ([9]). Pour obtenir notre résultat sur β_1, il est suffisant de décrire un modèle pour M se plongeant en codimension 2, $\mathbb{T}^2 \times (M)^{p-2}$ est alors une hypersurface car

$$\mathbb{T}^2 \times (M)^{p-2} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \times (M)^{p-2} = \mathbb{R}^3 \times M \times (M)^{p-3} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2p+5} \times (M)^{p-3} \ldots$$
$$\ldots \hookrightarrow \mathbb{R}^{2p+5+(2p+2)(p-3)}.$$

La construction d'une telle variété M est notre principal résultat (théorème 1.1). La preuve de 1.1 est donnée dans les paragraphes 2, 3 et 4. Au paragraphe 5, nous donnons une analogue "différentiable" de 1.1, au §6 nous concluons par quelques remarques.

A la lumière des résultats de [3], il est tentant d'essayer d'étendre ces constructions aux éléments β_i, $2 \leq i \leq p - 2$ et $i = p$. Les auteurs ont quelques résultats dans cette direction.

Des remarques d'E. Ossa ont été utiles au 3e auteur, entre autres lors de la rédaction de ce travail. Qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

1. **Notations et enonce du résultat**. Tout au long de l'article, p sera un nombre premier impair fixé. Le produit $(S^2)^{p-1}$ sera désigné par X_{p-1}. On notera ξ le fibré en droites complexes

$$\underbrace{\eta \otimes \cdots \otimes \eta}_{(p-1)\text{ fois}}$$

de base X_{p-1}. De même, φ désignera le fibré en droites complexes

$$\bar{\eta} \otimes \underbrace{\eta \otimes \cdots \otimes \eta}_{(p-1)\text{ fois}}$$

(un facteur $\bar{\eta}$ suivi de $p - 2$ facteurs η) de base X_{p-1}.

Soit $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ le fibré en sphères de $\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1$, $n \in \mathbb{Z}$, θ^1 est le fibré réel trivial de rang un. C'est une variété lisse de dimension $2p$. On a alors :

THÉORÈME 1.1. *Supposons que* $[(p - 1)!]^m$ *divise* n. *Si* m *est assez grand* :

(i) *En tant que variété PL*, $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ *admet un plongement PL localement plat dans* $S^5 \times X_{p-1}$.

(ii) *Le bord d'un voisinage régulier fermé de l'image de ce plongement, soit M, satisfait à la condition cohomologique de* (0.1) *(ii) dès que* $n \wedge p = 1$.

(iii) *M peut être déformée au travers d'une isotopie différentiable par morceaux en une sous-variété lisse de* $S^5 \times X_{p-1}$, *et donc en une sous-variété framée de codimension* 2 *de* S^{2p+4}, *bordant à zéro comme variété framée.*

La preuve de 1.1 se scinde naturellement en une partie relevant de la théorie des fibrés et une de la chirurgie.

2. **Fibres vectoriels sur X_{p-1}**. Commençons par le lemme suivant :

LEMME 2.1. *Supposons que* $[(p - 1)!]^m$ *divise* n. *Si* m *est assez grand, le fibré vectoriel* $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n}$ *est J-trivial.*

PREUVE. Soit $T = \eta - 1$ le générateur de $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2)$. On a :

$$\xi^{\otimes n} = (nT + 1) \otimes \cdots \otimes (nT + 1)$$

$$\varphi^{\otimes n} = (-nT + 1) \otimes (nT +) \otimes \cdots \otimes (nT + 1).$$

Dans $K_{\mathbb{C}}(X_{p-1})$, la somme de ces deux termes est combinaison linéaire de termes provenant de $K_{\mathbb{C}}((S^2)^i)$, $0 \leq i \leq p - 2$, chacun de ces termes est divisible par n. Le lemme résulte alors du fait que l'ordre de $J((S^2)^i)$ divise $[(p - 1)!]^m$, si $0 \leq i \leq p - 2$, dès que m est assez grand.

Plus précisément, on a :

LEMME 2.2. *Avec les données et hypothèses de (2.1), le fibré vectoriel* $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n} \oplus \theta^2$ *est trivial à homotopie fibrée près.*

Ici, θ^2 est un fibré vectoriel réel trivial de rang 2.

PREUVE. C'est un exercice en théorie de l'obstruction. La situation est décrite par le diagramme suivant, commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} X_{p-1} \arrow[r, "\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n}"] \arrow[d, hook] & BSG_k \arrow[d] \\ CX_{p-1} \arrow[r, "H"] & BSG \end{tikzcd}$$

où H est l'homotopie à zéro fournie par (2.1), $k = 4$. Les obstructions à relever H vient dans les groupes : $\tilde{H}^{\ell+1}(\Sigma X_{p-1}, \pi_\ell(SG/SG_k))$.

La première obstruction à la trivialité (à homotopie fibrée près) de $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n}$ est la classe d'Euler qu'on annule par addition d'un facteur trivial de rang un. On a donc maintenant $k = 5$.

Les obstructions qui apparaissent pour $\ell = 5, 6, 7$ sont de 2 et 3 torsion. Il est facile de montrer, par naturalité, qu'elles sont nulles si m est assez grand.

Pour $\ell = 8$, la classe de Hopf (le cup-carré de la classe d'Euler de $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n}$) donne une obstruction non nulle (pour $p \geq 5$). On l'annule par addition d'un autre facteur trivial de rang un. On a $k = 6$.

Les autres obstructions apparaissant pour $\ell \geq 8$ sont de torsion première à p. On les annule, comme plus haut, en faisant croître m.

Notons qu'il ne peut apparaître d'obstructions de torsion p-primaire parce que $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n}$ est J-trivial et parce qu'on est dans la zone de stabilité pour la p-torsion.

Nous renvoyons à [12] §4 pour plus de détails.

On a donc une équivalence d'homotopie fibrée :

$$h : S(\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n} \oplus \theta^2) \xrightarrow{\sim} S^5 \times X_{p-1} \tag{2.3}$$

et un plongement donné par l'inclusion du sous-fibré en sphères :

$$i : S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \hookrightarrow S(\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n} \oplus \theta^2). \tag{2.4}$$

Nous allons examiner la donnée de (2.3) et (2.4) en détails.

3. **Chirurgie**. Rappelons d'abord la notion suivante ([13], chap. 11) :

DÉFINITION 3.1. Étant donnés deux complexes de Poincaré finis 1-connexes M^m et V^{m+q}, un plongement de Poincaré de M dans V consiste en :

(i) une fibration sphérique $\zeta : S^{q-1} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$;

(ii) une paire de Poincaré (D, E) 1-connexe et une équivalence d'homotopie $e : D \cup_E C(\pi) \to V$.

Dans cette définition, ζ est l'analogue du fibré en sphères du fibré normal lisse (PL), et (D, E) est le complémentaire d'un voisinage tubulaire (régulier).

En particulier, un plongement lisse (PL localement plat) de variétés lisses (PL) induit un plongement de Poincaré.

LEMME 3.2. *La donné de (2.3) et (2.4) constitue un plongement de Poincaré de* $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ *dans* $S^5 \times X_{p-1}$.

PREUVE. Le fibré en sphères du fibré normal à i fournit ζ; (D, E) est le complémentaire d'un voisinage tubulaire de $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ dans $S(\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n} \oplus \theta^2)$; enfin h donne e.

Nous pouvons alors appliquer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3. ([13] chap. 11). *Supposons données deux variétés PL 1-connexes compactes M^m et V^{m+q}, avec $q \geq 3$ et $m + q \geq 5$. Alors, tout plongement de Poincaré de M dans V est induit par un plongement PL localement plat.*

La preuve de ce théorème utilise le résultat qui suit : pourvu que $q \geq 3$, le diagramme suivant est un carré fibré ([13] chap. 11) :

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{array}{ccc} B\widetilde{PL}_q & \rightarrow & BPL \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG_q & \longrightarrow & BG \end{array}$$

où $B\widetilde{PL}_q$ est le classifiant des q-fibrés en bloc PL.

Une réduction de ζ à BG_q induit donc une réduction à $B\widetilde{PL}_q$ consistante aux structures tangentielles PL de M et V.

COROLLAIRE 3.5. *Le plongement de Poincaré de $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ dans $S^5 \times X_{p-1}$ de (3.2) est induit par un plongement PL localement plat $f : S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \hookrightarrow S^5 \times X_{p-1}$.*

4. PREUVE DU THÉORÈME 1.1. La première partie n'est autre que (3.5). Vérifions la seconde partie. Soit U un voisinage régulier fermé de $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ dans $S^5 \times X_{p-1}$, et soit M son bord. L'inclusion de M dans U a le type d'homotopie d'une fibration sphérique, $\epsilon : S^2 \underset{j}{\hookrightarrow} M \underset{\pi}{\rightarrow} S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ (voir [2], chap. 11, théorème 4.4).

En outre, on a la cofibration :

$$X_{p-1} \underset{s}{\rightarrow} S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \underset{q}{\rightarrow} X_{p-1}^{\xi^{\otimes n}},$$

où s est l'une des sections évidentes et $X_{p-1}^{\xi^{\otimes n}}$ l'espace de Thom. Soit $u \in (X_{p-1}^{\xi^{\otimes n}}, \mathbb{Z})$ la classe de Thom, $u^p \not\equiv 0(p)$ dès que $n \wedge p$ par un calcul immédiat. Il en résulte facilement que q^*u a la même propriété.

Choisissons $x \in H^2(M, \mathbb{Z})$ tel que j^*x engendre $H^2(S^2, \mathbb{Z})$. Un argument facile de suite spectrale montre que x et $y = \pi^*q^*u \in H^2(M, \mathbb{Z})$ satisfont à (0, 1)(i).

Finalement, le plongement de M dans $S^5 \times X_{p-1}$ étant plat (théorème du voisinage collier), d'après ([5] théorème 7.4) M peut être déformé au travers d'une isotopie différentiable par morceaux en une sous-variété lisse de $S^5 \times X_{p-1}$.

En plongeant $S^5 \times X_{p-1}$ dans S^{2p+4}, on obtient (1.1)(iii), ce qui achève la démonstration.

5. **Un analogue différentiable de (1.1)**. Il est possible d'établir un analogue de (1.1) dans un contexte différentiable. Nous indiquons les modifications nécessaires.

Celles-ci apparaissent car l'énoncé de (3.3) comporte une condition supplémentaire due au fait qu'il n'y a pas d'analogue de (3.4). Étant donné un certain plongement de Poincaré, on doit se donner en plus une réduction ν de ζ au groupe orthogonal $0(q)$ qui soit compatible aux structures tangentielles de M et V en ce sens que : $\tau_M \oplus \nu \cong e^*\tau_V$ comme fibrés vectoriels stables. En retour, le plongement lisse construit admet ν comme fibré normal ([13], chap. 11).

Le plongement de Poincaré donné par (2.3) et (2.4) ne satisfait pas cette condition, mais :

PROPOSITION 1.5. *Supposons que* $[(p-1)!]^m$ *divise* n. *Pour* m *assez grand, il existe une variété* K, *une équivalence d'homotopie* $h : K \to S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$ *telles que* ν_K *soit induit de* $\pi^*(\varphi^{\otimes n})$ *par* h, *où* π *désigne la projection* $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \to X_{p-1}$.

PREUVE. C'est un exercice de chirurgie. Supposons donnée une J-trivialisation de $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi^{\otimes n}$, soit $g : X_{p-1} \to G/O$; $g \cdot \pi : S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \to G/O$ est une J-trivialisation de $\pi^*(\xi^{\otimes n}) \oplus \pi^*(\varphi^{\otimes n})$. Cette J-trivialisation crée une donnée de chirurgie ([11]) :

$$\begin{array}{ccc} \nu_N & \xrightarrow{\ \bar{\ell}\ } & \pi^*(\varphi^{\otimes n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\ \ell\ } & S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \end{array}$$

L'invariant de Kervaire est donné par :

$$k(\ell) = \langle \pi^* g^*(\mathcal{K}) \cdot \mathcal{W}, [S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)] \rangle$$

où $\mathcal{K} \in H^*(G/O, \mathbb{Z}/2)$ est la classe de Kervaire totale, $\mathcal{W}$ la classe de Stiefel-Whitney totale de $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$.

Si 2 divise n, les classes w_i sont nulles, donc

$$k(\ell) = \langle \pi^* g^*(k_{2p}), [S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1)] \rangle.$$

Mais, quitte à remplacer n par $2^{p-1}n$ et g par $g \cdot d$ (où $d : X_{p-1} \to X_{p-1}$ est de degré 2 sur chaque facteur), on voit facilement qu'on annule $k(\ell)$. La variété K solution du problème satisfait aux conditions de (5.1).

On crée alors facilement un plongement de Poincaré de K dans $S^5 \times X_{p-1}$ pour lequel on peut appliquer le théorème (3.3) "différentiable".

Le reste de la preuve se conduit comme dans le cas PL, la variété M n'étant autre que $S(h^* \pi^* \varphi^{\otimes n} \oplus \theta^1)$.

6. **Remarques terminales**. Nous notons brièvement les liens entre ces résultats et [9] où sont démontrés les théorèmes suivants :

THÉORÈME 6.1. *Il existe un complexe* C *de dimension* $2p$ *tel que* :
(i) C *se plonge dans* S^{2p+3};
(ii) $\exists y \in H^2(C, \mathbb{Z})$ *tel que* $y^p \not\equiv 0\ (p)$.

THÉORÈME 6.2. *Il existe un complexe* W *de dimension* $2p^2 - 4p + 1$ *tel que* :
(i) W *se plonge dans* S^{2p^2-2p-1};
(ii) $\exists z \in H^{2p-3}(W, \mathbb{Z}/p)$ *tel que* $P^{p-2}z \neq 0$, *où* P^{p-2} *est la puissance de Steenrod.*

Bien entendu, ces résultats étaient non constructifs. Le bord d'un voisinage régulier de C dans S^{2p+3} donne un modèle pour M dans (0.1), alors que le bord d'un voisinage régulier de W dans S^{2p^2-2p-1} donne un modèle pour β_1.

Notre construction ne fournit pas un complexe C satisfaisant à (6.1), mais (1.1)(i) nous dit que $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \times \mathbb{R}$ admet un plongement PL dans S^{2p+4} et satisfait à

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-031-0 Published online by Cambridge University Press

(6.1)(ii) si $n \wedge p = 1$. Un examen détaillé de la preuve de (1.1) montre qu'en fait $S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1) \times \mathbb{R}^2$ admet un plongement PL dans S^{2p+4}. Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire que $S^1 \times (S(\xi^{\otimes n} \oplus \theta^1))^{p-2}$ admet un plongement PL dans S^{2p^2-2p-1} et satisfait à (6.2)(ii) et est donc un exemple pour W.

PROPOSITION 6.3. *Si $p \neq 2^{2k+1} - 1$, il n'existe pas de sous-complexe de S^{2p+3} homotopiquement équivalent à $\mathbb{CP}^p$.*

PREUVE. On applique le théorème A de [7]. Pour les nombres premiers de la forme $2^{2k+1} - 1$ (dits de Mersenne), on peut appliquer le théorème B dès qu'on a trouvé q premier tel que $q^h < p < q^h + q^{h-1} + \cdots + q$. Par exemple, pour $p = 31$, $q = 3$ convient, donc $\mathbb{CP}^{31}$ ne se "plonge" pas dans S^{65}; pour $p = 127$, $q = 5$ convient.

Cette méthode échoue pour $p = 3$ ou 7; en fait $\mathbb{CP}^3 \hookrightarrow S^9$.

En conclusion, nous observerons que les lemmes 2.1 et 2.2 se généralisent par le résultat suivant dont la démonstration est laissée au lecteur :

PROPOSITION 6.4. *Soit X un CW-complexe de dimension d, avec $d \leq 4p - 3$ et ξ un fibré en droites complexes sur X. Soit n un entier divisible par une puissance de $(p-1)!$ assez grande.*

Il existe alors un fibré en droites complexes φ de base X tel que $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi$ soit J-trivial si et seulement s'il existe $u \in H^2(X, \mathbb{Z})$ telle que $u^{p-1} + c_1(\xi)^{p-1'} \equiv 0(p)$. En outre, $\xi^{\otimes n} \oplus \varphi \oplus \theta^2$ est alors trivial à homotopie fibrée près.

Par exemple, il n'y a pas de fibrés en droites complexes φ sur $\mathbb{CP}^{p-1}$ tel que $\eta^{\otimes n} \oplus \varphi$ soit J-trivial ($n \wedge p = 1$), alors qu'il en existe un sur $\mathbb{CP}^{p-1} \# X_{p-1}$.

REFERENCES

1. M. Atiyah et L. Smith, *Compact Lie groups and the stable homotopy of spheres*, Topology **13** (1974), 135–142.

2. W. Browder, *Surgery on simply connected manifolds*, Springer-Verlag, 1972.

3. D. Carlisle, P. Eccles, S. Hilditch, N. Ray, L. Schwartz, G. Walker et R. Wood, *Modular representations of $GL(n, p)$, splitting $(\Sigma(C\mathbb{P}^\infty \times \cdots \times C\mathbb{P}^\infty)$ and the β-family as framed surfaces*, Math. Z. **189** (1985), 239–261.

4. V. Franjou et L. Schwartz, *Hypersurfaces et homotopie stable de U*, Notes aux C.R.A.S. Paris, t. 299, série I, n° 13 (1984).

5. M. Hirsch et B. Mazur, *Smoothings of PL-manifolds*, Annals of Math. Studies, Princeton U. Press, 1980.

6. K. H. Knapp, *Some applications of K-theory to framed bordism, e-invariant and transfert*, Habilitations-schrift, Bonn (1979).

7. T. Kobayashi, H. Maki, O. Nakamura et J. Umehara, *Some non embedding theorems up to homotopy type*, Memoir Fac. Soc. Kochi Univ., serie A, Math. vol. 3 (1982).

8. N. Ray, *Framed manifolds for the element β_1*, Indiana Univ. Math. Journal (28) n° 2 (1979).

9. N. Ray et L. Schwartz, *Embedding certain complexes via unstable homotopy theory*, AMS Contemp. Math. **19** (1983).

10. E. Rees, *Framing on hypersurfaces*, J. London Math. Soc. **22** (1980).

11. C. Rourke et D. Sullivan, *On the Kervaire obstruction*, Ann. of Math. **94** (1971).

12. D. Sullivan, *Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture*, Ann. of Math. n° 100 (1974), 1–79.
13. C. T. C. Wall, *Surgery on compact manifolds*, Academic Press (1970).

A. Baker et N. Ray,
Department of Mathematics, the University
Manchester, M139PL, Great-Britain

L. Schwartz,
UA 1169 du C.N.R.S.
Université Paris XI, bâtiment 425
91405 Orsay cedex, France

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-031-0 Published online by Cambridge University Press