Canad. Math. Bull. Vol. 16 (1), 1973

UNE REMARQUE SUR LES MONOÏDES DE QUOTIENTS GÉNÉRALISÉS

PAR
PIERRE BERTHIAUME

0. **Introduction.** Dans [2] nous avons introduit, en nous inspirant des notions équivalentes pour les anneaux [3], les notions de monoïde maximal $Q(S)$ et de monoïde complet $B(S)$ des quotients d'un monoïde donné S, la première construction n'étant valide que lorsque S est commutatif, et nous avons montré que dans ce cas, on a toujours les inclusions (en général strictes) de monoïdes suivantes: $S \subset Q(S) \subset B(S)$.

Dans [4], McMorris a étendu la construction de $Q(S)$ aux monoïdes non nécessairement commutatifs, et notre intention dans cette note est de montrer que l'inclusion $Q(S) \subset B(S)$ demeure valide même dans ce cas.

1. **Rappel.** Nous commençons par résumer brièvement les principales notions que nous aurons à utiliser par la suite, et nous renvoyons le lecteur à [1], [2], et [4] pour les détails.

S désignera toujours un monoïde non nécessairement commutatif. Un idéal à droite D de S est dit *faiblement dense* dans S (notre terminologie) si et seulement si pour tout $s \neq s'$ dans S il existe un d dans D tel que $sd \neq s'd$, tandis que D est *dense* dans S si et seulement si pour tout s dans S, $s^{-1}D = \{x \in S \mid sx \in D\}$ est faiblement dense dans S: si S est commutatif les deux notions coïncident, mais cela est faux en général [4].

Le lemme suivant [4] sera utilisé dans la démonstration du résultat principal de cette note:

LEMME. *D est dense dans S si et seulement si pour toute suite finie $t_0 \neq t_1$, $t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$ d'éléments de S, où $n \geq 2$, il existe un $x \in S$ tel que tous les éléments $t_0x, t_1x, t_2x, \ldots, t_{n-1}x$ sont dans D et $t_0x \neq t_1x$.*

$Q(S)$ est alors l'ensemble de tous les S-homomorphismes $f: D \to S$ (i.e., $f(ds) = (f(d))s$ pour tout d dans D et s dans S) avec D un idéal à droite dense dans S (on dira alors que f est une fraction sur S), modulo la relation d'équivalence $f \equiv f'$, où $f': D' \to S$ est une fraction sur S, si et seulement si f et f' coïncident sur l'intersection de leurs domaines. $Q(S)$ devient alors un monoïde avec produit $f \cdot f'$ défini comme étant la composition de $f|$ suivi de f' où $f|$ est la restriction de f à $f^{-1}(D')$, un idéal

---

Reçu par les rédacteurs le 20 mai 1971.

https://doi.org/10.4153/CMB-1973-006-6 Published online by Cambridge University Press

dense de S. On a alors un monomorphisme de monoïdes $S \to Q(S): s \mapsto s/1$ où pour tout r dans S, $s/1(r) = sr$.

Soit maintenant I_S l'enveloppe injective de S_S dans la catégorie des S-ensembles à droite [1]. Si H est le monoïde $\mathrm{Hom}_S(I, I)$ et $B(S)$ le monoïde $\mathrm{Hom}_H({}_HI, {}_HI)$ avec les endomorphismes écrits à droite de leur argument, alors on obtient un monomorphisme de monoïdes $S \to B(S): s \mapsto \bar{s}$ où pour tout i dans I, $(i)\bar{s} = is$. Ce que nous voulons, c'est montrer que ce plongement factorise par $Q(S)$ comme dans le cas commutatif. Pour ce, nous aurons besoin des notions et résultats suivants qu'on peut tous retrouver dans [2].

Définition. Un idéal à droite D de S est dit S-dense si et seulement si pour tout $i \neq i'$ dans I il existe un d dans D tel que $id \neq i'd$.

Proposition 1. *Si D est S-dense et que $b \neq b'$ dans B alors il existe un d dans D tel que $bd \neq b'd$.*

Définition. $D \leq S(I)$ si et seulement si toute paire de S-homomorphismes de domaines respectifs des idéaux à droite de S et de codomaine I, qui coincident sur D, coïncident sur l'intersection de leurs domaines.

Proposition 2. *D est S-dense si et seulement si $D \leq S(I)$.*

Proposition 3. *Soit $f: D \to S$ un S-homomorphisme où D est S-dense. Alors il existe un unique b dans B tel que pour tout d dans D, $f(d) = bd$.*

2. **Resultat principal.** Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé au début de cet article.

Théorème 1. *Si D est dense dans S alors il est S-dense.*

Démonstration. Nous allons montrer que si D est dense dans S alors $D \leq S(I)$. Soit à cet effet deux S-homomorphismes $f_1: D_1 \to S$ et $f_2: D_2 \to S$, où D_1 et D_2 sont des idéaux à droite de S, qui coïncident sur D, et supposons qu'il existe un m dans $D_1 \cap D_2$ tel que $f_1(m) \neq f_2(m)$. I_S étant une extension essentielle de S_S, il existe (voir [1, Théorème 7]) une suite finie d'éléments $m_1 \neq m_2, s_1, s_2, \ldots, s_n$ dans S tels que $m_1 = f_{j_1}(m_1) \cdot s_1$ et $f_{j_1'}(m) \cdot s_1 = f_{j_2}(m) \cdot s_2$ et $\ldots f_{j_{i-1}'}(m) \cdot s_{i-1} = f_{j_i}(m) \cdot s_i$ et $f_{j_i'}(m) \cdot s_i = \ldots$ et $f_{j_n'}(m) \cdot s_n = m_2$ où $i = 1, 2, \ldots, n$ et j_i et j_i' prennent les valeurs 1 ou 2. D étant dense dans S il existe aussi par le Lemme un x dans S tel que tous les éléments $m_1x, m_2x, ms_1x, \ldots, ms_nx$ sont dans D avec $m_1x \neq m_2x$. Mais puisque f_1 et f_2 coïncident par hypothèse sur D on aura toujours $f_{j_i}(ms_ix) = f_{j'}(ms_ix)$ d'où ultimement $m_1x = m_2x$ ce qui est une contradiction.

THÉORÈME 2. *Le monomorphisme* $S \to B(S): s \mapsto \bar{s}$ *factorise par le monomorphisme* $S \to Q(S): s \mapsto s/1$, *ce qu'on notera* $S \subset Q(S) \subset B(S)$.

DÉMONSTRATION. Soit $f: D \to S$ une fraction sur S. Par le Théorème 1 D est S-dense et par la Proposition 3, il existe un unique b dans B tel que pour tout d dans D, $f(d)=bd$, d'où on obtient une correspondance $f \mapsto b$. Si les fractions f et $f': D' \to S$ coïncident sur l'idéal dense D'' avec $f' \mapsto b'$, alors pour tout d dans D'', $bd=b'd$ et par la Proposition 1, $b=b'$: la correspondance $f \mapsto b$ est donc une fonction $Q(S) \to B(S)$ évidemment injective. C'est aussi un homomorphisme de demigroupe car soit $f' \cdot f \mapsto b''$: alors pour tout d dans $f^{-1}(D')$, on a $(f' \cdot f)(d)=b''d$, mais aussi $(f' \cdot f)(d)=f'(bd)=(b'b)d$ car $f^{-1}(D') \subset D$, d'où par unicité $b'b=b''$. Cet homomorphisme préserve finalement l'identité par la Proposition 1.

RÉFÉRENCES

1. P. Berthiaume, *The injective envelope of S-Sets*, Canad. Math. Bull. (2) **10** (1967), 261–273.

2. ———, *Generalized semigroups of quotients*, Glasgow Math. J. Vol. 12, Part 2, Sept 1971.

3. J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1966.

4. F. R. McMorris, *The maximal quotient semigroup of a semigroup*, Thesis, University of Wisconsin, Milwaukee, 1969.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL,
MONTRÉAL, QUÉBEC

https://doi.org/10.4153/CMB-1973-006-6 Published online by Cambridge University Press