Canad. Math. Bull. Vol. **22** (3), 1979

IDENTITÉ POUR $\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$

PAR
ARMEL MERCIER

1. **Introduction.** Dans cet article, nous établirons un théorème sur la représentation de certaines séries de Dirichlet (ceci généralise un résultat de [3]). Avec ce nouveau résultat nous donnerons seulement quelques applications qui évidemment pourraient être augmentées de beaucoup. Par exemple, nous donnerons une expression asymptotique pour

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} d^{\alpha}(n), \quad l, k\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

(il est entendu que le résultat reste valide pour $l\in\mathbb{Z}$), où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n. Notons enfin que, pour une série de Dirichlet donnée, nous désignerons par σ_0 son abscisse de convergence absolue, lorsqu'elle existe.

2. **Résultat**

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction multiplicative telle que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$ converge absolument pour $\sigma>\sigma_0$. Alors pour tout k, $l\in\mathbb{N}$ et pour $\sigma>\sigma_0$ on a*

$$(1)\quad \sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}=\frac{1}{\phi(k')}\Bigg[\prod_{p^a\|d}\Bigg(\frac{f(p^a)}{p^{as}}+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{f(p^{a+r})}{p^{(a+r)s}}\Bigg)\times\sum_{\substack{n=1\\ (n,d)=1}}^{\infty}\frac{f(n)\chi_1(n)}{n^s}$$
$$+\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\Bigg(\Bigg\{\prod_{p^a\|d}\Bigg(\frac{f(p^a)}{p^{as}}+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{f(p^{a+r})/p^{(a+r)s}}{\chi(p^r)^{\phi(k')-1}}\Bigg)\Bigg\}\frac{1}{\chi(l')}\sum_{\substack{n=1\\ (n,d)=1}}^{\infty}\frac{f(n)\chi(n)}{n^s}\Bigg],$$

où $d=(k,l)$, $k'=k/d$, $l'=l/d$, χ désigne les caractères mod k', χ_1 est le caractère principal et ϕ désigne la fonction d'Euler.

Preuve. Soit $d=(k,l)$, la démonstration de l'équation (1) se fait par induction sur le nombre d'éléments dans la décomposition de d en facteurs premiers. Mais $(l,k)=d$, alors $l=dl'$ et $k=dk'$ et on remarque que la condition $n\equiv l(k)$ est équivalente à $n=dn'$ et $n'\equiv l'(k')$, $(l',k')=1$.

Reçu par les rédacteurs le 20 avril 1978.

Supposons que $d=p_0^\alpha$, alors

$$(2)\qquad \sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')}}^{\infty}\frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n'p_0^\alpha)^s}=\frac{1}{p_0^{\alpha s}}\sum_{e\mid p_0^\alpha}\Bigg(\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=e}}^{\infty}\frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s}\Bigg)$$

$$=\frac{f(p_0^\alpha)}{p_0^{\alpha s}}\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=1}}^{\infty}\frac{f(n')}{(n')^s}+\frac{1}{p_0^{\alpha s}}\sum_{\substack{e\mid p_0^\alpha\\ e>1}}\Bigg(\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=e}}^{\infty}\frac{f(n'p^\alpha)}{(n')^s}\Bigg).$$

Il s'agit maintenant d'évaluer ces deux sommes. Or

$$\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=1}}^{\infty}\frac{f(n')}{(n')^s}=\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')}}^{\infty}\frac{f(n')g(n')}{(n')^s},$$

où

$$g(n')=\begin{cases}1 & \text{si}\quad (n',p_0)=1\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

Mais g est une fonction multiplicative, d'où pour $\sigma>\sigma_0$, on a

$$\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')}}^{\infty}\frac{f(n')g(n')}{(n')^s}=\frac{1}{\phi(k')}\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{f(n')g(n')}{(n')^s}\sum_{\chi}\frac{\chi(n')}{\chi(l')}$$

$$=\frac{1}{\phi(k')}\sum_{\chi}\Bigg(\frac{1}{\chi(l')}\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{f(n')g(n')\chi(n')}{(n')^s}\Bigg)$$

$$=\frac{1}{\phi(k')}\Bigg[\sum_{\substack{n=1\\ (n,p_0^\alpha)=1}}^{\infty}\frac{f(n)\chi_1(n)}{n^s}+\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\Bigg(\frac{1}{\chi(l')}\sum_{\substack{n=1\\ (n,p_0^\alpha)=1}}^{\infty}\frac{f(n)\chi(n)}{n^s}\Bigg)\Bigg].$$

Donc

$$(3)\qquad \sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=1}}^{\infty}\frac{f(n')}{(n')^s}=\frac{1}{\phi(k')}\Bigg[\sum_{\substack{n=1\\ (n,p_0^\alpha)=1}}^{\infty}\frac{f(n)\chi_1(n)}{n^s}+\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\Bigg(\frac{1}{\chi(l')}\sum_{\substack{n=1\\ (n,p_0^\alpha)=1}}^{\infty}\frac{f(n)\chi(n)}{n^s}\Bigg)\Bigg]$$

où χ désigne les caractères mod k' et χ_1 désigne le caractère principal.

Pour la deuxième somme, nous remarquons que

$$(4)\qquad \sum_{\substack{e\mid p_0^\alpha\\ e>1}}\Bigg(\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=e}}^{\infty}\frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s}\Bigg)=\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=p_0}}^{\infty}\frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s}+\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=p_0^2}}^{\infty}\frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s}$$

$$+\cdots+\sum_{\substack{n'=1\\ n'\equiv l'(k')\\ (n',p_0^\alpha)=p_0^\alpha}}^{\infty}\frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-039-5 Published online by Cambridge University Press

Or pour $1 \le \beta < \alpha$, $(p_0^\alpha, n') = p_0^\beta$ entraîne $p_0^\beta \| n'$ et pour $\delta \ge \alpha$, $(p_0^\alpha, n') = p_o^\alpha$ entraîne $p_0^\delta \| n'$, d'où

$$\sum_{\substack{n'=1 \\ n' \equiv l'(k') \\ (n', p_0^\alpha) = p_0^\beta \\ 1 \le \beta < \alpha}}^{\infty} \frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s} = \sum_{\substack{m=1 \\ mp_0^\beta \equiv l'(k') \\ (m, p_0) = 1}}^{\infty} \frac{f(mp_0^\beta p_0^\alpha)}{(mp_0^\beta)^s}.$$

Mais $mp_0^\beta \equiv l'(k')$ possède exactement une solution si $p_0 \nmid k'$, donc

$$(5) \qquad \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \equiv l'(k') \\ (n', p_0^\alpha) = p_0^\beta \\ 1 \le \beta < \alpha}}^{\infty} \frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s} = \frac{f(p_0^{\alpha+\beta})}{p_0^\beta} \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv l'(p_0^\beta)^{\phi(k')-1} (\mathrm{mod}\, k') \\ (m, p_0) = 1 \\ p_0 \nmid k'}}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s}$$

Et puisque $(l'(p_0^\beta)^{\phi(k')-1}, k') = 1$, alors

$$(6) \qquad \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv l'(p_0^\beta)^{\phi(k')-1} (\mathrm{mod}\, k') \\ (m, p_0) = 1 \\ 1 \le \beta < \alpha \\ p_0 \nmid k'}}^{\infty} = \frac{1}{\phi(k')} \left[\sum_{\substack{m=1 \\ (m, p_0) = 1 \\ (k', p_0) = 1}}^{\infty} \frac{f(m)\chi_1(m)}{m^s} \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{\chi \\ \chi \ne \chi_1 \\ 1 \le \beta < \alpha \\ (p_0, k') = 1}} \frac{1}{\chi(l')\chi(p_0^\beta)^{\phi(k')-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, p_0) = 1}}^{\infty} \frac{f(m)\chi(m)}{m^s} \right].$$

De même

$$\sum_{\substack{n'=1 \\ n' \equiv l'(k') \\ (n', p_0^\alpha) = p_0^\alpha}}^{\infty} \frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s} = \sum_{\delta=\alpha}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ (m, p_0) = 1 \\ m \equiv l'(p_0^\delta)^{\phi(k')-1} (\mathrm{mod}\, k') \\ p_0 \nmid k'}}^{\infty} \frac{f(mp_0^\delta p_0^\alpha)}{(mp_0^\delta)^s} \right)$$

$$= \sum_{\substack{\delta=\alpha \\ p_0 \nmid k'}}^{\infty} \left(\frac{f(p_0^{\alpha+\delta})}{p_0^{\delta s}} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, p_0) = 1 \\ m \equiv l'(p_0^\delta)^{\phi(k')-1} (\mathrm{mod}\, k')}}^{\infty} \frac{f(m)}{n^s} \right)$$

Utilisant le fait que $(l'(p_0^\delta)^{\phi(k')-1}, k') = 1$, alors nous obtenons

$$(7) \qquad \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \equiv l'(k') \\ (n', p_0^\alpha) = p_0^\alpha}}^{\infty} \frac{f(n'p_0^\alpha)}{(n')^s} = \sum_{\substack{\delta=\alpha \\ p_0 \nmid k'}}^{\infty} \frac{f(p_0^{\alpha+\delta})}{p_0^{\delta s}} \left\{ \frac{1}{\phi(k')} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, p_0) = 1}}^{\infty} \frac{f(m)\chi_1(m)}{m^s} \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{\chi \\ \chi \ne \chi_1}} \left(\frac{1}{\chi(l')\chi(p_0^\delta)^{\phi(k')-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, p_0) = 1}}^{\infty} \frac{f(m)\chi(m)}{m^s} \right) \right\}$$

Utilisant les équations (3), (4), (5), (6) et (7) nous obtenons le résultat demandé pour $d = p_0^\alpha$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-039-5 Published online by Cambridge University Press

Supposons maintenant vrai pour toute fonction multiplicative f et lorsque $d=p_1^{a_1}\cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}$. Montrons que le résultat reste valide pour $d=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$. Dans ce cas

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l_1(k_1)}}^{\infty}\frac{f(np_r^{a_r})}{(np_r^{a_r})^s}$$

où $(l_1,k_1)=p_1^{a_1}\cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}$, $k_1=\dfrac{k}{p_r^{a_r}}$, $l_1=\dfrac{l}{p_r^{a_r}}$.

Mais

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l_1(k_1)}}^{\infty}\frac{f(np_r^{a_r})}{(np_r^{a_r})^s}=\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l_1(k_1)\\ (n,p_r^{a_r})=1}}^{\infty}\frac{f(np_r^{a_r})}{(n,p_r^{a_r})^s}$$

$$+\sum_{\substack{n=1\\ np_r\equiv l_1(k_1)\\ (n,p_r^{a_r})=1}}^{\infty}\frac{f(np_r^{a_r+1})}{(np_r^{a_r+1})^s}+\cdots$$

$$=\frac{f(p_r^{a_r})}{p_r^{a_rs}}\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l_1(k_1)\\ (n,p_r^{a_r})=1}}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}+\frac{f(p_r^{a_r+1})}{p_r^{(a_r+1)s}}\sum_{\substack{n=1\\ np_r\equiv l_1(k_1)\\ (n,p_r^{a_r})=1}}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}+\cdots$$

Soit
$$g(n)=\begin{cases}1 & \text{si } (n,p_r^{a_r})=1\\ 0 & \text{autrement,}\end{cases}$$

alors

$$\sum_{\substack{n=1\\ n=l_1(k_1)}}^{\infty}\frac{f(np_r^{a_r})}{(np_r^{a_r})^s}=\frac{f(p_r^{a_r})}{p_r^{a_rs}}\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l_1(k_1)}}^{\infty}\frac{f(n)g(n)}{n^s}+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\frac{f(p_r^{a_r+\alpha})}{p_r^{(a_r+\alpha)s}}\sum_{\substack{n=1\\ np_r^{\alpha}\equiv l_1(k_1)}}^{\infty}\frac{f(n)g(n)}{n^s}\right)\tag{8}$$

Par hypothèse d'induction,

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l_1(k_1)}}^{\infty}\frac{f(n)g(n)}{n^s}=\frac{1}{\phi(k')}\left[\prod_{p^a\|p_1^{a_1}\cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}}\left(\frac{f(p^a)g(p^a)}{p^{as}}+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}\frac{g(p^{a+r})f(p^{a+r})}{p^{(a+r)s}}\right)\right.\tag{9}$$

$$\times\sum_{\substack{n=1\\ (n,p_1^{a_1}\cdots p_{r-1}^{a_{r-1}})=1}}^{\infty}\frac{f(n)g(n)}{n^s}+\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\left\{\prod_{p^a\|p_1^{a_1}\cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}}\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{f(p^a)g(p^a)}{p^{as}}\times\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{f(p^{a+r})g(p^{a+r})}{\chi(p^r)^{\phi(k')-1}p^{(a+r)s}}\right)\frac{1}{\chi(l')}\sum_{\substack{n=1\\ (n,p_1^{a_1}\cdots p_{r-1}^{a_{r-1}})=1}}^{\infty}\frac{\chi(n)f(n)g(n)}{n^s}\right\}\right]$$

Pour évaluer la somme

$$\sum_{\substack{n=1\\ np_r^{\alpha}\equiv l_1(k_1)}}^{\infty}\frac{f(n)g(n)}{n^s}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-039-5 Published online by Cambridge University Press

nous utilisons encore l'hypothèse d'induction. En effet puisque

$$(l_1, k_1) = p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}$$

alors $np_r^\alpha \equiv l_1(k_1)$ devient

$$n'p_r^\alpha \equiv l'(k'), \qquad (l', k') = 1 \qquad k_1 = k'p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}, \qquad l_1 = l'p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}.$$

Et pour que $n'p_r^\alpha \equiv l'(k')$ possède une solution il faut que $p_r \nmid k'$ et dans ce cas

$$n' \equiv l'(p_r^\alpha)^{\phi(k')-1} (\text{mod } k').$$

Utilisant ce fait, nous obtenons

$$(10) \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{f(p_r^{a_r+\alpha})}{p_r^{(a_r+\alpha)s}} \sum_{\substack{n=1 \\ np_r^\alpha \equiv l_1(k_1)}}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^s} \right)$$

$$= \frac{1}{\phi(k')} \times \sum_{\substack{\alpha=1 \\ p_r \nmid k'}}^{\infty} \left[\frac{f(p_r^{a_r+\alpha})}{p_r^{(a_r+\alpha)s}} \left\{ \prod_{p^a \| p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}} \left(\frac{f(p^a)g(p^a)}{p^{as}} \right. \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{r=1 \\ p \mid k'}}^{\infty} \frac{f(p^{a+r})g(p^{a+r})}{p^{(a+r)s}} \right) \sum_{\substack{n=1 \\ (n, p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}})=1}}^{\infty} \frac{f(n)g(n)\chi_1(n)}{n^s}$$

$$+ \sum_{\substack{\chi \\ \chi \neq \chi_1}} \left\{ \prod_{p^a \| p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}} \left(\frac{f(p^a)g(p^a)}{p^{as}} + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid k'}}^{\infty} \frac{f(p^{a+r})g(p^{a+r})}{\chi(p^r)^{\phi(k')-1} p^{(a+r)s}} \right) \right.$$

$$\left. \left. \left. \times \frac{1}{\chi(l')\chi(p_r^\alpha)^{\phi(k')-1}} \sum_{\substack{n=1 \\ (n_1, p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}})=1}}^{\infty} \frac{f(n)g(n)\chi(n)}{n^s} \right\} \right\} \right]$$

Remplaçant les équations (9) et (10) dans l'équation (8), nous obtenons le résultat désiré.

REMARQUES. 1) Puisque

$$p^r \cdot (p^r)^{\phi(k')-1} \equiv 1 \qquad (\text{mod } k')$$

alors

$$\frac{1}{\chi(p^r)^{\phi(k')-1}} = \chi(p^r) \qquad (\text{Voir [1]})$$

d'où l'équation (1) du théorème peut s'écrire sous la forme

$$(11) \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{\phi(k')} \sum_{\chi} \left\{ \prod_{p^a \| d} \left(\frac{f(p^a)}{p^{as}} + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid k'}}^{\infty} \frac{f(p^{a+r})\chi(p^r)}{p^{(a+r)s}} \right) \frac{1}{\chi(l')} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,d)=1}}^{\infty} \frac{f(n)\chi(n)}{n^s} \right\}$$

où $d = (k, l)$, $k' = k/d$, $l' = l/d$.

2) Lorsque f est une fonction complètement multiplicative, l'équation (11) devient

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{\phi(k')} \frac{f(d)}{d^s} \sum_{\chi} \left(\frac{1}{\chi(l')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\chi(n)}{n^s} \right)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-039-5 Published online by Cambridge University Press

3) Soit χ les caractères mod k, alors pour $(l, k)=1$ et $f(n)$ étant une fonction multiplicative telle que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$ converge absolument pour $\sigma>\sigma_0$, alors par l'équation (11) on a

$$(12)\quad \sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}-\frac{1}{\phi(k)}\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\left(\frac{1}{\chi(l)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\chi(n)}{n^s}\right)$$
$$=\frac{1}{\phi(k)}\times\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\cdots\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}.$$

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s=\zeta^z(s)F(s, z)$, ζ désigne la fonction zeta de Riemann, où $F(s, z)=\sum_{n=1}^{\infty} b(n)/n^s$ et $\sum_{n=1}^{\infty}|b(n)|\,n^{-1}(\log 2n)^{B+3}$ est uniformément bornée pour $|z|\leq B$. Utilisant un résultat de Selberg [5], nous obtenons, à partir de l'équation (12),

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv l(k)}} f(n)-\frac{1}{\phi(k)}\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\left(\frac{1}{\chi(l)}\sum_{n\leq x} f(n)\chi(n)\right)$$
$$=\frac{1}{\phi(k)}\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{f(p)}{p}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z}\left(1+\frac{f(p)}{p}+\cdots\right)\frac{x\log^{z-1} x}{\Gamma(z)}$$
$$+0\left(x\log^{z-2} x\right).$$

Or par un théorème de Rieger [4], nous avons, pour $(l, k)=1$,

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv l(k)}} f(n)=\frac{1}{\phi(k)\Gamma(z)}\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{f(p)}{p}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z}$$
$$\times\prod\left(1+\frac{f(p)}{p}+\cdots\right)x\log^{z-1} x+0\left(z\log^{z-2} x\right).$$

De ces deux dernières équations, nous obtenons

$$(13)\quad \frac{1}{\phi(k)}\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\left(\frac{1}{\chi(l)}\sum_{n\leq x} f(n)\chi(n)\right)=0\left(x\log^{z-2} x\right).$$

3. **Applications**

THÉOREME 2. *Soit Θ une fonction multiplicative telle que $\Theta(p)=bp^u+o(p^u)$, $b\in\mathbb{R}-\{0,-1,-2,\ldots\}$, $u\in\mathbb{R}$, et $\Theta(p^t)=O(p^{tu})$, $t>1$. Soit f une fonction additive telle que $f(p^v)$ ne dépend pas de p et $f(p)\neq 0$, alors pour k, $l\in\mathbb{N}$, on a*

$$(14)\quad \sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv l(k)}}\frac{\Theta(n)f(n)}{n^u}=C_1x\log^{b-1} x\log\log x+C_2x\log^{b-1} x$$
$$+O\left(x\log^{b-2} x\log\log x\right)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-039-5 Published online by Cambridge University Press

où

$$C_1=\frac{bf(p)}{\Gamma(b)}\,h(1,b)$$

$$C_2=\frac{bf(p)}{\Gamma^2(b)}\,(h'(1,b)\Gamma(b)-h(1,b)\Gamma'(b))$$

et

$$h(s,\omega)=\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p^a\|d}\left(\frac{\dfrac{\Theta(p^a)}{p^{au}}\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(p^a)/f(p)}}{p^{as}}+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}\frac{\dfrac{\Theta(p^{a+r})}{p^{(a+r)u}}\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(p^{a+r})/f(p)}}{p^{(a+r)s}}\right)$$

$$\times\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\omega}\sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1\\(n,k')=1}}^{\infty}\frac{n^{-u}\Theta(n)\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(n)/f(p)}}{n^s}$$

Preuve. En utilisant l'équation (11) on obtient pour $\sigma>\sigma_0$

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty}\frac{n^{-u}\Theta(n)t^{f(n)}}{n^s}=\frac{1}{\phi(k')}\sum_{\chi}\left\{\prod_{p^a\|d}\left(\frac{\dfrac{\Theta(p^a)}{p^{au}}\,t^{f(p^a)}}{p^{as}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{\dfrac{\Theta(p^{a+r})}{p^{(a+r)u}}\,t^{f(p^{a+r})}}{\chi(p^r)^{\phi(k')-1}p^{(a+r)s}}\right)\frac{1}{\chi(l')}\sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{\infty}\frac{n^{-u}\Theta(n)t^{f(n)}\chi(n)}{n^s}\right\}$$

où $t\in\mathbb{C}$, $|t|\le 1$. Posant $\omega=bt^{f(p)}$, alors l'équation ci-dessus devient

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty}\frac{n^{-u}\Theta(n)\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(n)/f(p)}}{n^s}-\frac{1}{\phi(k')}\sum_{\substack{\chi\\ \chi=\chi_1}}\left\{\prod_{p^a\|d}\left(\frac{\dfrac{\Theta(p^a)}{p^{au}}\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(p^a)/f(p)}}{p^{as}}\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{\dfrac{\Theta(p^{a+r})}{p^{(a+r)u}}\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(p^{a+r})/f(p)}}{\chi(p^r)^{\phi(k')-1}p^{(a+r)s}}\right)$$

$$\left.\times\frac{1}{\chi(l')}\sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{\infty}\frac{n^{-u}\Theta(n)\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(n)/f(p)}\chi(n)}{n^s}\right\}$$

$$=\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p^a\|d}\left(\frac{\dfrac{\Theta(p^a)}{p^{au}}\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(p^a)/f(p)}}{p^{as}}+\sum_{\substack{r=1\\ p\mid k'}}^{\infty}\frac{\dfrac{\Theta(p^{a+r})}{p^{(a+r)u}}\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(p^{a+r})/f(p)}}{p^{(a+r)s}}\right)$$

$$\times\sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{\infty}\frac{n^{-u}\Theta(n)\left(\dfrac{\omega}{b}\right)^{f(n)/f(p)}\chi_1(n)}{n^s}=\zeta^{\omega}(s)h(s,\omega)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-039-5 Published online by Cambridge University Press

où

$$h(s,\omega)=\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p^a\|d}\left(\frac{\frac{\Theta(p^a)}{p^{au}}\left(\frac{\omega}{b}\right)^{f(p^a)/f(p)}}{p^{as}}+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{\frac{\Theta(p^{a+r})}{p^{(a+r)u}}\left(\frac{\omega}{b}\right)^{f(p^{a+r})/f(p)}}{p^{(a+r)s}}\right)$$

$$\times\sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{\infty}\frac{n^{-u}\Theta(n)\left(\frac{\omega}{b}\right)^{f(n)/f(p)}\chi_1(n)}{n^s}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\omega}.$$

Utilisant l'équation (13) et un résultat de Selberg [5], on a

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} n^{-u}\Theta(n)\left(\frac{\omega}{b}\right)^{f(n)/f(p)}=\frac{h(1,\omega)}{\Gamma(\omega)}\,x\log^{\omega-1}x+O\left(x\log^{\omega-2}x\right) \tag{15}$$

Dérivant par rapport à ω l'équation (15), tout en utilisant l'inégalité de Cauchy pour estimer $d/d\omega\, O(x\log^{\omega-2}x)$ et posant $\omega=b$, on obtient le résultat désiré.

Si l'on pose $\omega=b$ dans l'équation (15), nous obtenons, pour $k,l\in\mathbb{N}$ et Θ la fonction multiplicative définie dans l'énoncé du Théorème 2,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}}\frac{\Theta(n)}{n^u}=\frac{h(1,b)}{\Gamma(b)}\,x\log^{b-1}x+O\left(x\log^{b-2}x\right) \tag{16}$$

Pour terminer, nous donnerons une expression asymptotique pour

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} d^\alpha(n),\ k,l\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R},$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n. Ce résultat est connu lorsque $(l,k)=1$ (Voir [4]), et dans le cas où $\alpha=1$, l'expression asymptotique est connue pour $n\equiv O(p_0)$, p_0 étant un nombre premier fixe mais arbitraire (Voir [2]).

THÉORÈME 3. *Soient k, $l\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors nous avons*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} d^\alpha(n)=\frac{h(1,2^\alpha)}{\Gamma(2^\alpha)}\,x\log^{2^\alpha-1}x+O\left(x\log^{2^\alpha-2}x\right),$$

où

$$h(1,2^\alpha)=\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p^a\|d}\left(\frac{(a+1)^\alpha}{p^a}+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{(a+1+r)^\alpha}{p^{a+r}}\right)\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2\alpha}$$
$$\times\prod_{\substack{p\\ p\nmid d\\ p\nmid k'}}\left(1+\frac{2^\alpha}{p}+\frac{3^\alpha}{p^2}+\cdots\right)$$

et $d=(k,l)$, $k'=k/d$.

En particulier, pour k, $l\in\mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}}\frac{1}{d(n)}=\prod_{p^a\|d}\left(\frac{(a+1)^{-1}}{p^a}+\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid k'}}^{\infty}\frac{(a+1+r)^{-1}}{p^{a+r}}\right)$$
$$\times\prod_p\left(\sqrt{p^2-p}\log\frac{p}{p-1}\right)\prod_{p\mid k'}\left((p-1)\log\frac{p}{p-1}\right)^{-1}\prod_{p\mid d}\left(p\log\frac{p}{p-1}\right)^{-1}$$
$$\times\prod_{\substack{p\mid d\\ p\mid k'}}\left(p\log\frac{p}{p-1}\right)\frac{x}{k'(\pi\log x)^{1/2}}+O(x(\log x)^{-3/2}),\quad \text{où}\quad k'=k/d.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser l'équation (16).

Bibliographie

1. T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, 1976.

2. J. M. De Koninck et A. Mercier, *Remarque sur un article de T. M. Apostol*, Canad. Math. Bull., **20** (1977) 77–78.

3. A. Mercier, *Etude de certaines sommes de fonctions arithmétiques*, thèse de doctorat, Université Laval.

4. G. J. Rieger, *Zum Teilerproblem von Atle Selberg, Mathe, Nachrichten*, **30** (1965) 181–192.

5. A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc., **18,** (1954), 83–87.

Département de Mathématiques
Université du Québeca Chicoutimi
Chicoutimi, Qué. G7H 2B1