Canad. Math. Bull.Vol. **36** (2), 1993 pp. 190–196

QUELQUES FORMULES EXACTES POUR DES MOYENNES DE FONCTIONS L DE DIRICHLET

STÉPHANE LOUBOUTIN

RÉSUMÉ. Nous donnons une expression finie pour la valeur $L(1,\chi)$ dès lors que χ est un caractère de Dirichlet modulo $f \geq 2$, impair et non principal. Cette expression, valable même lorsque ce caractère n'est pas primitif, nous permet de généraliser au théorème 2 le résultat de H. Walum sur un comportement en moyenne de ces fonctions L (sa démonstration qui fait usage de sommes de Gauss ne semble pas pouvoir être adaptée au cas de caractères non primitifs.) Nous appliquons ces résultats à l'obtention de bornes pour le nombre de classes relatif des corps cyclotomiques: nous retrouvons celles de T. Metsänkylä et de K. Feng par une méthode nous permettant de les ensuite amender.

PROPOSITION 1. *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f \geq 2$, impair et non principal, mais non nécessairement primitif. Alors,*

$$L(1,\chi) = \frac{\pi}{2f}\sum_{a=1}^{f-1}\chi(a)\cot g\Big(\frac{\pi a}{f}\Big).$$

PREUVE. Posons $\zeta(b,s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+b)^s}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, $b > 0$. Puisque $\chi(f) = 0$ et $\chi(f-a) = -\chi(a)$, $1 \leq a \leq f-1$, nous avons pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L(s,\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s} = f^{-s}\sum_{a=1}^{f-1}\chi(a)\zeta\Big(\frac{a}{f},s\Big) = \frac{f^{-s}}{2}\sum_{a=1}^{f-1}\chi(a)\Big(\zeta\Big(\frac{a}{f},s\Big) - \zeta\Big(\frac{f-a}{f},s\Big)\Big).$$

Nous pouvons substituer 1 à s dans cette expression, et le résultat découle de:

$$\big(\zeta(b,s) - \zeta(1-b,s)\big)_{s=1} = \frac{1}{b} + \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{b+n} + \frac{1}{b-n}\Big) = \pi\cot g(\pi b),$$

cette dernière égalité s'obtenant par dérivation logarithmique du produit infini de la fonction sinus. ∎

THÉORÈME 2. *La sommation portant sur les $\frac{\phi(m)}{2}$ caractères de Dirichlet impairs modulo m, nous avons:*

$$\sum_{\chi_m(-1)=-1}|L(1,\chi_m)|^2 = \Big(\frac{\pi^2}{12}\prod_{p/m}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\Big)\phi(m) - \Big(\frac{\pi\phi(m)}{2m}\Big)^2.$$

Reçu par les éditeurs le 8 mai 1991; révisé le 13 août 1992.
Classification (AMS) par sujet: 11M06, 11M20, 11R18.

PREUVE. *Les relations d'orthogonalité:*

$$\sum_{\chi_m(-1)=-1} \chi_m(a)\bar{\chi}_m(b) = \begin{cases} \frac{\phi(m)}{2} & \text{si } b \equiv a \pmod m \text{ et } (a,m)=1, \\ -\frac{\phi(m)}{2} & \text{si } b \equiv -a \pmod m \text{ et } (a,m)=1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donnent:

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_m(-1)=-1} |L(1,\chi_m)|^2 &= \frac{\pi^2}{4m^2} \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{b=1}^{m-1} \cot g\Big(\frac{\pi a}{m}\Big) \cot g\Big(\frac{\pi b}{m}\Big) \Big(\sum_{\chi_m(-1)=-1} \chi_m(a)\,\bar{\chi}_m(b)\Big) \\ &= \frac{\pi^2 \phi(m)}{4m^2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m-1} \cot g^2\Big(\frac{\pi a}{m}\Big). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors du lemme suivant:

LEMME (a). *(i)*

$$S(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a=1}^{m-1} \cot g^2\Big(\frac{\pi a}{m}\Big) = \frac{(m-1)(m-2)}{3}.$$

(ii)

$$\tilde{S}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,m)=1}}^{m-1} \cot g^2\Big(\frac{\pi a}{m}\Big) = \frac{m^2}{3} \prod_{p/m}\Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big) - \phi(m).$$

PREUVE. (i) découle de ce que les $\cot g(\frac{k\pi}{m})$, $1 \leq k \leq m-1$ sont les racines du polynôme unitaire $f_m(X) = \frac{1}{2im}\big((X+i)^m - (X-i)^m\big) = X^{m-1} - \frac{(m-1)(m-2)}{6} X^{m-3} + \cdots$.

Puisque $\sum_{d/n} \mu(d) = 1$ (lorsque $n = 1$), 0 (lorsque $n > 1$), le point (ii) résulte de:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(m) &= \sum_{a=1}^{m-1} \cot g^2(\pi a/m) \sum_{\substack{d/a \\ d/m}} \mu(d) = \sum_{d/m} \mu(d) \sum_{\substack{a=1 \\ d/a}}^{m-1} \cot g^2(\pi a/m) \\ &= \sum_{d/m} \mu(d) \sum_{b=1}^{m/d-1} \cot g^2\big(\pi b/(m/d)\big) = \sum_{d/m} \mu(d)(m/d-1)(m/d-2)/3 \\ &= (m^2/3) \sum_{d/m} \mu(d)/d^2 - m \sum_{d/m} \mu(d)/d + (2/3) \sum_{d/m} \mu(d). \end{aligned}$$

■

THÉORÈME 3. *Soient χ_0 le caractère principal modulo 2 et m un entier impair. Alors, la sommation portant sur les $\frac{\phi(m)}{2}$ caractères de Dirichlet impairs modulo m, nous avons:*

$$\sum_{\chi_m(-1)=-1} |L(1,\chi_0\chi_m)|^2 = \Big(\frac{\pi^2}{16} \prod_{p/m}\Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big)\Big)\phi(m) - \Big(\frac{\pi\phi(m)}{4m}\Big)^2.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1993-028-8 Published online by Cambridge University Press

PREUVE. Semblablement à la preuve du théorème 2, nous avons:

$$\begin{aligned}\sum_{\chi_m(-1)=-1} &|L(1,\chi_0\chi_m)|^2 \\ &= \frac{\pi^2}{4(2m)^2}\sum_{a=1}^{2m-1}\sum_{b=1}^{2m-1}\chi_0(a)\chi_0(b)\cot g\Big(\frac{\pi a}{2m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi b}{2m}\Big)\Big(\sum_{\chi_m(-1)=-1}\chi_m(a)\bar{\chi}_m(b)\Big) \\ &= \frac{\pi^2\phi(m)}{4(2m)^2}\sum_{\substack{a=1\\(a,2m)=1}}^{2m-1}\cot g^2\Big(\frac{\pi a}{2m}\Big);\end{aligned}$$

et ce puisque $b\equiv a \pmod m$, $1\le a, b\le 2m-1$, et a et b impairs impliquent $b=a$, et que $b\equiv -a \pmod m$, $1\le a, b\le 2m-1$, et a et b impairs impliquent $b=2m-a$. ∎

THÉORÈME 4. *Soient χ_0 le caractère principal modulo 6 et $m\neq 3$ un nombre premier impair. Alors, la sommation portant sur les $\frac{\phi(m)}{2}$ caractères de Dirichlet impairs modulo m, nous avons:*

$$\sum_{\chi_m(-1)=-1}|L(1,\chi_0\chi_m)|^2 = \begin{cases}\frac{\pi^2}{18}(1-\frac{1}{m^2})\phi(m)-\frac{5}{2}(\frac{\pi\phi(m)}{6m})^2 & si\ m\equiv 1 \pmod 3,\\ \frac{\pi^2}{18}(1+\frac{1}{m^2})\phi(m) & si\ m\equiv 2 \pmod 3.\end{cases}$$

PREUVE. Nous avons de même:

$$\sum_{\chi_m(-1)=-1}|L(1,\chi_0\chi_m)|^2 = \frac{\phi(m)}{2}\frac{\pi^2}{4(6m)^2}\sum_{\substack{a=1\\(a,6m)=1}}^{6m-1}\sum_{b=1}^{6m-1}\epsilon(b,a)\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi b}{6m}\Big)$$

avec

$$\begin{aligned}\epsilon(b,a) &= \chi_0(a)\chi_0(b)\sum_{\chi_m(-1)=-1}\chi_m(a)\bar{\chi}_m(b) \\ &= \begin{cases}1 & \text{si } b\equiv a \pmod m \text{ et } (b,6m)=1,\\ -1 & \text{si } b\equiv -a \pmod m \text{ et } (b,6m)=1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Le changement d'indice $b\longmapsto 6m-b$ nous donne alors:

$$\sum_{\chi_m(-1)=-1}|L(1,\chi_0\chi_m)|^2 = \frac{\pi^2\phi(m)}{4(6m)^2}\sum_{\substack{a=1\\(a,6m)=1}}^{6m-1}\sum_{\substack{b=1\\ b\equiv a \pmod m\\(b,6m)=1}}^{6m-1}\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi b}{6m}\Big).$$

Le résultat découle finalement du lemme (a) et du lemme suivant:

LEMME (b). *Soit $m\neq 3$ un nombre premier impair. Alors,*

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,6m)=1}}^{6m-1}\sum_{\substack{b=1\\(b,6m)=1\\ b\neq a\\ b\equiv a \pmod m}}^{6m-1}\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi b}{6m}\Big) = \begin{cases}6-6m & si\ m\equiv 1 \pmod 3,\\ 4m+12 & si\ m\equiv 2 \pmod 3.\end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1993-028-8 Published online by Cambridge University Press

PREUVE. La sommation intérieure de ce lemme ne porte que sur $b = a+2m$ lorsque 3 ne divise pas $a+2m$, et que sur $b = a+4m$ lorsque 3 divise $a+2m$. En posant $k_{a,m} = 1$ lorsque $a \not\equiv m \pmod 3$, et $k_{a,m} = 2$ lorsque $a \equiv m \pmod 3$, nous avons donc en notant $\tilde{S}(m)$ la somme double de ce lemme:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(m) &= \sum_{\substack{a=1\\(a,6m)=1}}^{6m-1} \cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}+k_{a,m}\frac{\pi}{3}\Big)\\ &= 6+\sum_{\substack{a=1\\(a,6)=1}}^{6m-1} \cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}+k_{a,m}\frac{\pi}{3}\Big).\end{aligned}$$

Nous ne prouvons maintenant ce lemme que, par exemple, dans le cas $m \equiv 1 \pmod 3$. Nous avons donc:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(m) = 6 &+ \sum_{\substack{a=1\\a\equiv 1 \pmod 6}}^{6m-1} \cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}+\frac{2\pi}{3}\Big)\\ &+ \sum_{\substack{a=1\\a\equiv 5 \pmod 6}}^{6m-1} \cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}+\frac{\pi}{3}\Big).\end{aligned}$$

Le changement d'indice $a \longmapsto 6m-a$ dans cette dernière sommation donne alors:

$$\tilde{S}(m) = 6+2\sum_{\substack{a=1\\a\equiv 1 \pmod 6}}^{6m-1} \cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}\Big)\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}+\frac{2\pi}{3}\Big).$$

Nous calculons cette somme en l'exprimant à partir des coefficients d'un polynôme dont ces cotangentes sont les racines. Soient $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\zeta_a = e^{\frac{2i\pi a}{6m}}$ et $x_a = \cot g(\frac{\pi a}{6m}) = i\frac{\zeta_a+1}{\zeta_a-1}$, de sorte que $\cot g(\frac{\pi a}{6m}+\frac{2\pi}{3}) = -\frac{x_a+\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_a-1}$ et

$$\cot g(\frac{\pi a}{6m})\cot g(\frac{\pi a}{6m}+\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\zeta_a+1}{\zeta_a-1}\frac{\zeta_a+\omega}{\zeta_a-\omega} = -1-\frac{2i}{\sqrt{3}}\frac{1}{\zeta_a-1}+\frac{2i\omega}{\sqrt{3}}\frac{1}{\zeta_a-\omega}.$$

Les ζ_a, $a \equiv 1 \pmod 6$ étant précisément les racines de $X^m+\omega^2$, les $\frac{1}{\zeta_a-1}$ sont celles de $(Y+1)^m+\omega^2 Y^m$ et les $\frac{1}{\zeta_a-\omega}$ celles de $(\omega Y+1)^m+\omega^2 Y^m$. D'où:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a=1\\a\equiv 1 \pmod 6}}^{6m-1} \cot g(\frac{\pi a}{6m})\cot g\Big(\frac{\pi a}{6m}+\frac{2\pi}{3}\Big) &= -m-\frac{2i}{\sqrt{3}}\Big(-\frac{m}{1+\omega^2}\Big)+\frac{2i\omega}{\sqrt{3}}\Big(-\frac{m\omega^{m-1}}{\omega^m+\omega^2}\Big)\\ &= -m-\frac{2im}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{1+\omega}-\frac{1}{1+\omega^2}\Big) = -3m.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Nous dérivons maintenant du théorème 4 une borne effective pour les nombres de classes relatifs h_p^- des corps cyclotomiques $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ de conducteurs premiers.

LEMME (c). *Soit q un nombre premier ne divisant pas m et soit f l'ordre de q dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$. Alors, $\prod(q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{\chi_m(-1)=-1}(1-\frac{\chi_m(q)}{q})$ vérifie*

$$\prod(q)=\begin{cases}(1+q^{-\frac{f}{2}})^{\frac{\phi(m)}{f}}, & \textit{lorsque } f \textit{ est pair et tel que } q^{f/2}\equiv -1 \pmod m,\\ (1-q^{-f})^{\frac{\phi(m)}{2f}}, & \textit{sinon.}\end{cases}$$

De plus, pour q fixé, $\prod(q)$ tend vers 1 lorsque m tend vers l'infini.

PREUVE. Nous avons (voir [6]):

$$\prod_{\chi_m}\left(1-\frac{\chi_m(q)}{q}\right)=(1-q^{-f})^{\frac{\phi(m)}{f}}.$$

Si nous remarquons que $\mathbf{G}=(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ est un groupe multiplicatif d'ordre $\frac{\phi(m)}{2}$, nous en déduisons mêmement que: $\prod_{\chi_m(-1)=+1}\big(1-\chi_m(q)T\big)=(1-T^g)^{\frac{\phi(m)}{2g}}$ avec $g=\mathrm{ord}_{\mathbf{G}}(q)$. Puisque $g=\frac{f}{2}$ lorsque f est pair et tel que $q^{f/2}\equiv -1 \pmod m$, et $g=f$ lorsque f est impair ou lorsque f est pair et tel que $q^{f/2}\not\equiv -1 \pmod m$, nous obtenons:

$$\prod_{\chi_m(-1)=+1}\left(1-\frac{\chi_m(q)}{q}\right)=\begin{cases}(1-q^{-\frac{f}{2}})^{\frac{\phi(m)}{f}}, & \text{lorsque } f \text{ est pair et } q^{f/2}\equiv -1 \pmod m,\\ (1-q^{-f})^{\frac{\phi(m)}{2f}}, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Le résultat s'en déduit, la dernière assertion résultant de ce que l'on a $q^{\frac{f}{2}}\geq m-1$ lorsque l'on est dans le premier cas, et $q^f\geq m+1$ lorsque l'on est dans le second cas. ∎

THÉORÈME 5. *Soient $p\neq 3$ un nombre premier impair et h_p^- le nombre de classes relatif du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta_p)$. Nous avons la majoration effective suivante:*

$$h_p^-\leq\big(1+o(1)\big)2p\left(\frac{p}{36}\right)^{\frac{p-1}{4}}.$$

PREUVE. Si χ_0 désigne le caractère principal modulo 6, alors

$$h_p^-=2p\left(\frac{p}{4\pi^2}\right)^{\frac{p-1}{4}}\prod_{\chi_p(-1)=-1}L(1,\chi_p)=\frac{1}{\prod(2)\prod(3)}2p\left(\frac{p}{4\pi^2}\right)^{\frac{p-1}{4}}\prod_{\chi_p(-1)=-1}L(1,\chi_0\chi_p).$$

Du théorème 4 (en prenant $m=p$) et de la majoration de la moyenne géométrique par la moyenne arithmétique, nous déduisons le résultat des deux inégalités suivantes:

$$\prod_{\chi_p(-1)=-1}L(1,\chi_0\chi_p)\leq\left(\frac{\pi^2}{9}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right)^{\frac{p-1}{4}},\ \text{et } h_p^-\leq\frac{(1+\frac{1}{p^2})^{\frac{p-1}{4}}}{\prod(2)\prod(3)}2p\left(\frac{p}{36}\right)^{\frac{p-1}{4}}.$$ ∎

Notons que cette preuve menée en utilisant le théorème 2 conduirait à retrouver la moins bonne majoration obtenue par T. Metsänkylä, à savoir:

$$h_p^-\leq 2p\left(\frac{p}{24}\right)^{\frac{p-1}{4}},$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1993-028-8 Published online by Cambridge University Press

et que menée en utilisant le théorème 3 elle conduirait à retrouver la moins bonne majoration obtenue par K. Feng, à savoir:

$$h_p^- \leq \frac{2p}{\Pi(2)}\left(\frac{p}{32}\right)^{\frac{p-1}{4}}.$$

Ces deux majorations ressortissent à la même idée que celle que nous développions ailleurs (voir [4]): pour amender une majoration sur la valeur au point 1 d'une fonction L, on isole les premiers termes de son produit eulérien et on majore le produit infini restant qui n'est autre qu'un $L(1,\chi_0\chi_m)$ pour un certain caractère principal χ_0.

Soit χ_0 le caractère de Dirichlet principal modulo N pour $N \geq 2$ un entier. Des simulations numériques sur les valeurs de sommes analogues à celle du lemme (b) qui apparaitraient au cours de sa preuve conduisent à penser qu'il faudrait considérer un nombre de cas croissant avec N dans l'énoncé d'un résultat étendant celui du théorème 4.

Il semble donc difficile d'espérer pouvoir donner une formule explicite pour la somme $\sum_{\chi_m(-1)=-1} |L(1,\chi_0\chi_m)|^2$. Nous en avons néanmoins l'équivalent suivant montrant qu'il est possible, en choisissant N divisible par suffisamment de nombres premiers distincts, d'amender le théorème 5 en remplaçant 36 par tout réel strictement inférieur à $4\pi^2$.

THÉORÈME 6. *Soit $N \geq 2$ un entier et χ_0 la caractère principal modulo N. Alors, lorsque m tend vers l'infini en restant premier à N, nous avons l'équivalent suivant:*

$$\frac{2}{\phi(m)} \sum_{\chi_m(-1)=-1} |L(1,\chi_0\chi_m)|^2 \sim C(N) \prod_{p/m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right), \text{ où } C(N) = \frac{\pi^2}{6}\prod_{p/N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

et où la sommation porte sur les $\frac{\phi(m)}{2}$ caractères de Dirichlet impairs modulo m.

PREUVE. Semblablement à la preuve du théorème 4, le lemme (a) donne:

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi_m(-1)=-1} |L(1,\chi_0\chi_m)|^2 &= \frac{\pi^2\phi(m)}{4(mN)^2} \sum_{\substack{a=1\\(a,mN)=1}}^{mN-1} \sum_{\substack{b=1\\(b,mN)=1\\ b\equiv a \pmod m}}^{mN-1} \cot g\left(\frac{\pi a}{mN}\right)\cot g\left(\frac{\pi b}{mN}\right)\\
&= \left(C(N)\prod_{p/m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right)\frac{\phi(m)}{2} - \left(\frac{\pi\phi(m)}{2mN}\right)^2\phi(N)\\
&\quad + \frac{\pi^2\phi(m)}{4(mN)^2} \sum_{\substack{a=1\\(a,mN)=1}}^{mN-1} \sum_{\substack{b=1\\(b,mN)=1\\ b\neq a, b\equiv a \pmod m}}^{mN-1} \cot g\left(\frac{\pi a}{mN}\right)\cot g\left(\frac{\pi b}{mN}\right).
\end{aligned}$$

Le résultat découle alors du lemme suivant:

LEMME (d). *Avec des constantes ne dépendant que de N, nous avons:*

$$\sum_{a=1}^{mN-1} \sum_{\substack{b=1\\ b\neq a\\ b\equiv a \pmod m}}^{mN-1} \left|\cot g\left(\frac{\pi a}{mN}\right)\cot g\left(\frac{\pi b}{mN}\right)\right| = O\big(m\operatorname{Log}(m)\big).$$

PREUVE. Résulte de ce que $\frac{a}{mN}$ et $\frac{b}{mN}$ ne peuvent simultanément être proches de 0 ou de 1 (puisque $|\frac{a}{mN} - \frac{b}{mN}| \geq \frac{1}{N}$), et de ce que $|\cot g(\pi x)|$ est majoré par $1/\big(\pi x(1-x)\big)$ sur $]0, 1[$. ∎

REMARQUES. Dans son commentaire sur [9] que l'on trouvera dans M.R. 82m:10066, D. R. Heath-Brown proposait un équivalent pour les sommes

$$\sum_{\chi_m(-1)=-1} |L(1, \chi_m)|^{2k}, \quad k \geq 2.$$

Depuis, lors cette évaluation asymptotique a été obtenue en [11]. On trouvera des formules asymptotiques pour des sommes de fonctions L de Dirichlet dans [8], [11] et [12]. On trouvera une formule exacte pour des sommes de fonctions L attachées à des caractères de Dirichlet impairs et primitifs dans [13]. Dans cet article, il est même conjecturé une valeur pour des sommes analogues à celles que nous considérons au théorème 2 mais pour lesquelles la sommation est restreinte aux caractères impairs et primitifs modulo m.

RÉFÉRENCES

1. K. Feng, *On the first factor of the class number of a cyclotomic field*, Proc. Amer. Math. Soc. **84**(1982), 479–482.

2. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition Chapter XVI: The Arithmetical Functions $\phi(n)$, $\mu(d)$, $d(n)$, $\sigma(n)$, $r(n)$.

3. T. Lepistö, *On the growth of the first factor of the class number of the prime cyclotomic field*, Ann. Acad. Sci. Fenn. (A1), N **577**(1974).

4. S. Louboutin, *Majoration au point* 1 *des fonctions L asociées aux caractères de Dirichlet primitifs, ou au caractère d'une extension quadratique d'un corps quadratique imaginaire principal*, J. reine angew. Math. **419**(1991), 213–219.

5. T. Metsänkylä, *Class numbers and μ-invariants of cyclotomic fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **43**(1974), 299–300.

6. J. P. Serre, *Cours d'Arithmetique*, PUF (1977).

7. I. SH. Slavut-skii, *Mean values of L-functions and the class number of a cyclotomic field*, Algebraic systems with one action and relation, Leningrad. Gos. Ped. Inst., Leningrad, (1985), 122–129, (voir M.R. 87m:11083).

8. ———, *Mean values of L-functions and the class number of a cyclotomic field, II*, Studies of semigroups, Leningrad. Gos. Ped. Instl, Leningrad, (1990), 102–116, (voir M.R. 92e:11087).

9. H. Walum, *An exact formula for an average of L-series*, Illinois J. of Math. **26**(1982), 1–3.

10. L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, GTM **83**, Springer-Verlag, 1982.

11. W. P. Zhang, *A formula for quartic mean values of the L-function*, Kexue Tongbao (9) **34**(1989), 647–650, (voir M.R. 90j:11087).

12. ———, *On the mean value of the L-function*, J. Math. Res. Exposition (3) **10**(1990), 355–360, (voir M.R. 91i:11108).

13. ———, *A note on a class of mean square values of L-functions*, J. Northwest Univ. (3) **20**(1990), 9–12, (voir M.R. 91j:11068).

Université de Caen
U.F.R. Sciences
Département de Mathématiques
Esplanade de la Paix
14032 Caen Cedex
France
email: loubouti@univ-caen.fr