Compositio Mathematica **131:** 31–50, 2002.

Composantes de dimension maximale d'un analogue du lieu de Noether–Lefschetz

(Components of Maximal Dimension of an Analogue of the Noether–Lefschetz Locus)

ANNA OTWINOWSKA
Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, United Kingdom, e-mail: ania@maths.warwick.ac.uk

(Received 1 February 2000; accepted in final form: 16 November 2000)

Abstract. Let $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ be a smooth hypersurface of degree $d \geqslant 5$, and let $S \subset X$ be a smooth hyperplane section. Assume that there exists a non trivial cycle $Z \in \mathrm{Pic}(X)$ of degree 0, whose image in $\mathrm{CH}_1(X)$ is in the kernel of the Abel–Jacobi map. The family of couples (X, S) containing such Z is a countable union of analytic varieties. We show that it has a unique component of maximal dimension, which is exaclty the locus of couples (X, S) satisfying the following condition: There exists a line $\Delta \subset S$ and a plane $P \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ such that $P \cap X = \Delta$, and $Z = \Delta - dh$, where h is the class of the hyperplane section in $\mathrm{CH}_1(S)$. The image of Z in $\mathrm{CH}_1(X)$ is thus 0. This construction provides evidence for a conjecture by Nori which predicts that the Abel–Jacobi map for 1-cycles on X is injective.

Mathematics Subject Classifications (2000). 14C30, 14D07, 14J10, 14J70, 14N05.

Key words. algebraic cycles, Hodge theory, Noether–Lefschetz locus, Abel–Jacobi map.

1. Introduction

Soient X une variété projective complexe de dimension trois et Z un 1-cycle de X homologue à 0. L'application d'Abel–Jacobi

$$\mathrm{AJ}_X\colon \mathcal{Z}_1(X)_{\mathrm{hom}} \to \frac{\mathrm{H}^3(X, \mathbb{C})}{F^2\mathrm{H}^3(X) + \mathrm{H}^3(X, \mathbb{Z})}$$

(où $\mathcal{Z}_1(X)_{\mathrm{hom}}$ désigne le groupe des 1-cycles homologues à 0) s'annule sur les cycles rationnellement équivalents à 0 dans X. Réciproquement, on a

CONJECTURE 1. *Si la variété X satisfait* $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$*, la condition* $\mathrm{AJ}_X(Z) = 0$ *entraîne que Z est rationnellement équivalent à* 0.

Cette conjecture est due à Clemens ([Cle]) sous l'hypothèse supplémentaire $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Sous sa forme générale, elle est une conséquence de la conjecture de Nori ([No]), qui prédit que sous l'hypothèse $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, un multiple Z'

de Z est algébriquement équivalent à 0. En effet, si Z' est algébriquement équivalent à 0 et est dans le noyau de l'application d'Abel–Jacobi, un multiple Z'' de Z' est dans l'image de $\mathrm{CH}_0(C)_{\mathrm{hom}}$ par une correspondance Γ homologue à 0 entre une courbe C et X. Cela signifie que Z'' est dans $F_S^2\mathrm{CH}_1(X)$, où $F_S^\bullet\mathrm{CH}$ dénote la filtration de Bloch-Beilinson définie par Saito (*cf.* [S]). Or la condition $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ entracîne conjecturalement $F_S^\bullet\mathrm{CH}_1(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$. Donc Z'' et par conséquent Z devraient être de torsion dans $\mathrm{CH}_1(X)$. Comme le noyau de l'application d'Abel–Jacobi est sans torsion sur les cycles de codimension 2 (*cf.* [Mu]), cela implique que Z devrait être rationnellement équivalent à 0.

Pour tester ces conjectures, il est naturel d'étudier les paires (X, Z) formées d'une variété X et d'un cycle Z homologue à 0 et telles que $\mathrm{AJ}_X(Z) = 0$. On se propose ici d'effectuer une telle étude dans le cas où X est une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^4$, et où Z est à support dans une surface S qui est une section hyperplane lisse de X. La classe de Z dans $\mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z})$ est primitive, et on peut supposer qu'elle est non nulle (sans quoi Z serait rationnellement équivalent à 0 dans S, et la conjecture serait trivialement vraie).

Soit maintenant $\mathbb{P}Gl(5)'$ le sous-groupe de $\mathbb{P}Gl(5)$ laissant globalement invariant un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^4$, et soit $B^d \subset \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(d))/\mathbb{P}Gl(5)'$ la variété paramétrant les classes d'isomorphisme de couples d'hypersurfaces lisses (X, S) tels que $S = X \cap H$. Pour tout $(X, S) \in B^d$, on pose $U := X - S$, et on note $j: S \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Enfin, on note $\mathrm{Pic}(S)_o$ le groupe de Picard primitif, c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(S)$ constitué des cycles de degré 0.

On définit $\mathcal{N}^d$ comme l'ensemble des couples $(X, S) \in B^d$ tels qu'il existe un cycle $Z \in \mathrm{Pic}(S)_o$, tel que $\mathrm{AJ}_X(j_*Z) = 0$ (la condition $Z \in \mathrm{Pic}(S)_o$ entraîne que j_*Z est homologue à 0 dans $\mathrm{H}_2(X, \mathbb{Z})$, puisque $\mathrm{H}_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$). On verra que $\mathcal{N}^d$ est une réunion dénombrable de fermés analytiques, et qu'il peut-être vu du point de vue de la théorie de Hodge mixte des ouverts $U = X - S$ comme un analogue du lieu de Noether–Lefschetz classique d'une famille de surfaces. En effet, le lieu de Noether–Lefschetz classique est l'ensemble des surfaces S possédant une classe entière primitive dans $F^1\mathrm{H}^2(S)$; de même, on montrera dans la seconde partie que $\mathcal{N}^d$ est l'ensemble des couples (X, S) tels qu'il existe une classe entière non nulle dans $F^2\mathrm{H}^3(U)$.

Soit $(X, S) \in B^d$ tel que S contient une droite Δ et qu'il existe un plan $P \subset \mathbb{P}^4$ vérifiant $P \cap X = d\Delta$ (autrement dit, P est osculateur à X à l'ordre d le long de Δ). Alors $Z := d\Delta - h_X$ (où $h_X = c_1^2(\mathcal{O}_X(1))$ désigne la classe d'une section plane de X) est un cycle primitif dans $\mathrm{Pic}(S)$ et on constate facilement que son image dans $\mathrm{CH}_1(X)$ est nulle. Cela implique que $\mathrm{AJ}_X(Z) = 0$, donc $(X, S) \in \mathcal{N}^d$. Un calcul facile montre que le sous-ensemble ainsi construit de $\mathcal{N}^d$ est de codimension égale à $((d+1)(d+2)/2) - 7$ dans B^d.

Réciproquement, on montre ici:

THÉORÈME 1. *Pour $d \geqslant 5$, chaque composante irréductible de $\mathcal{N}^d$ est de codimension au moins* $((d+1)(d+2)/2) - 7$, *et l'unique composante de codimension*

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

minimale est constituée par les couples (X, S) *tels qu'il existe une droite* $\Delta \subset S$ *et un plan* $P \subset \mathbb{P}^4$ *osculateur à* X *à l'ordre* d *le long de* Δ*. De plus, au point générique de cette composante, le cycle* $d\Delta - h_X$ *engendre* $\mathrm{Pic}(S_b)_o \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{AJ}_{X_b} \circ j_*)$.

Par le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes, une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^4$ vérifie toujours la condition $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Le théorème 1 montre qu'en degré $\geqslant 5$ la composante de codimension minimale de $\mathcal{N}^d$ est constituée de cycles rationnellement équivalents à 0. Il contribue donc dans une certaine mesure à la conjecture 1.

Remarque. Pour $d = 2$, l'énoncé du théorème 1 est vide. Pour $d = 3$ et $d = 4$, l'énoncé du théorème 1 est faux, mais on sait déjà que pour les cubiques et les quartiques dans $\mathbb{P}^4$ l'application d'Abel–Jacobi est injective.

Comme dans [V 1] et [G 1], on va ramener la preuve du théorème 1 à l'énoncé purement algébrique suivant.

THÉORÈME 2. *Soient* $S := \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_4]$ *l'anneau gradué des polynômes à 5 variables,* $I \subset S$ *un idéal homogène et* $d > 1$ *un entier. On suppose que:*

(1) I *contient des polynômes homogènes* $F_0, \cdots, F_4$ *de degrés respectifs* $d-1, \cdots, d-1, d$ *en intersection complète;*
(2) $I^{3d-5} \neq S^{3d-5}$*;*

Alors on a

$$\dim(S^d/I^d) \geqslant \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7.$$

De plus, si

$$\dim(S^d/I^d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7$$

il existe une intersection complète de multidegré $(1, 1, d-1, d-1, d)$ *coïncidant avec* I *en degré* $\geqslant d$*.*

Le théorème 2 est un cas particulier assez général d'une conjecture suggérée dans [E-G-H]. La preuve du théorème 2 procède par des estimations assymptôtiques pour $d \to \infty$. Ses principales étapes et la preuve pour d assez grand font l'objet de la troisième partie. La quatrième partie, nettement plus technique, complète la preuve pour les petites valeurs de d.

Je remercie ma directrice de thèse Claire Voisin pour m'avoir proposé ce sujet et pour ses suggestions dans la rédaction de la deuxième partie. Merci aussi à Olivier Debarre et Shuji Saito pour leur relecture attentive et de nombreuses remarques.

2. Traduction en termes d'algèbre commutative

LEMME 1. *$\mathcal{N}^d$ est une réunion dénombrable de fermés analytiques.*

Preuve. Le lieu $\mathcal{N}^d$ est contenu dans le lieu de Noether–Lefschetz $\mathrm{NL}(B^d)$ relativement à la famille de surfaces paramétrée par B^d, et on sait que ce dernier est réunion dénombrable de variétés algébriques. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{N}^d \subset \mathrm{NL}(B^d)$ est un sous-ensemble analytique fermé (i.e. que son intersection avec chaque composante de $\mathrm{NL}(B^d)$ est un sous-ensemble analytique fermé). Introduisons l'ensemble $\widetilde{\mathcal{N}^d}$ des triplets (X, S, Z), où $(X, S) \in B^d$ et où $Z \in \mathrm{Pic}(S)_o$ est non nul, vérifiant $\mathrm{AJ}_X(j_* Z) = 0$. L'application naturelle d'oubli

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{N}^d} &\to \mathcal{N}^d\\ (X, S, Z) &\mapsto (X, S)\end{aligned}$$

est par définition surjective et est localement une immersion.

D'autre part $\widetilde{\mathcal{N}^d}$ est contenu dans l'ensemble $\widetilde{\mathrm{NL}(B^d)}$ qui paramètre les triplets (X, S, Z) tels que $Z \in \mathrm{Pic}(S)_o$. Ce dernier ensemble est aussi une union dénombrable d'ensembles algébriques, et sur chacune de ses composantes connexes $\widetilde{\mathrm{NL}_\alpha(B^d)}$ (essentiellement indexées par les classes algébriques $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z})$ qui par construction sont constantes sur $\widetilde{\mathrm{NL}(B^d)}$), l'application d'oubli $\widetilde{\mathrm{NL}(B^d)} \to \mathrm{NL}(B^d)$ est propre et immersive. (Le second point résulte du fait que $\mathrm{Pic}(S)_o$ est discret, et le premier du fait que la monodromie agit de façon finie sur le groupe de Picard (cf. [G-M-V], p.169.)

Il suffit donc de montrer que $\widetilde{\mathcal{N}^d}_\alpha \subset \widetilde{\mathrm{NL}_\alpha(B^d)}$ est un sous-ensemble analytique fermé. Or si $(X, S, Z) \in \widetilde{\mathrm{NL}_\alpha(B^d)}$, c'est-à-dire si la classe α est la classe du cycle Z sur S, et si $S \overset{j}{\hookrightarrow} X$, on dispose du point $\mathrm{AJ}_{X_b}(j_{b*}(Z)) \in \mathrm{J}_X$, où J_X désigne la jacobienne intermédiaire de X.

On définit ainsi une fonction normale ν_α sur $\widetilde{\mathrm{NL}_\alpha(B^d)}$, qui est une section holomorphe de la famille de jacobiennes intermédiaires $(\mathrm{J}_{X_b})_{b \in \mathrm{NL}(B^d)_\alpha}$. Par définition, le lieu $\widetilde{\mathcal{N}^d}_\alpha \subset \widetilde{\mathrm{NL}_\alpha(B^d)}$ est le lieu d'annulation de ν_α. □

On se donne $b \in B^d$. On note (X_b, S_b) le couple d'hypersurfaces correspondant. L'observation suivante permet de décrire $\mathcal{N}^d$ comme un analogue du lieu de Noether–Lefschetz.

LEMME 2. *(cf [V3] par exemple.) On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Pic}(S_b)_o \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{AJ}_{X_b} \circ j_*) \simeq F^2\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C}) \cap \mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z})_t,$$

où $U_b = X_b - S_b$ et où $\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z})_t$ désigne le quotient de $\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z})$ par sa partie de torsion. En particulier, $b \in \mathcal{N}^d$ si et seulement si

$$F^2\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C}) \cap \mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z})_t \neq 0.$$

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

Preuve. On remarque d'abord que l'application $c_1\colon \mathrm{Pic}(S_b)_o \to F^1\mathrm{H}^2(S_b, \mathbb{C})\cap \mathrm{H}^2(S_b, \mathbb{Z})_o$ est bijective. En effet, $\mathrm{H}^2(S_b, \mathbb{Z})_o$ est sans torsion; par le théorème de Lefschetz sur les classes $(1, 1)$, l'application c_1 est surjective, et par le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes, on a $\mathrm{H}^1(S, \mathbb{Z}) = 0$, et donc l'application c_1 est injective. Donc $b \in \mathcal{N}^d$ si et seulement s'il existe $\alpha_b \in F^1\mathrm{H}^2(S_b, \mathbb{C})\cap \mathrm{H}^2(S_b, \mathbb{Z})_o - \{0\}$, avec $\alpha_b = c_1(Z_b)$ et $\mathrm{AJ}_{X_b}(j_*Z_b) = 0$.

Comme $\mathrm{H}^1(S_b, \mathbb{Z}) = 0$, la suite exacte de Gysin s'écrit:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^3(X_b, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^2(S_b, \mathbb{Z})_o \longrightarrow 0.$$

Lorsqu'on tensorise par $\mathbb{C}$, on obtient une suite exacte de structures de Hodge mixtes, où la filtration de Hodge sur $\mathrm{H}^3(U, \mathbb{C})$ est obtenue à l'aide des isomorphismes

$$\mathrm{H}^\bullet(U_b, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}^\bullet(X_b, \Omega^\bullet(\log S_b))$$

et est induite par la filtration bête sur le complexe $\Omega^\bullet(\log S_b))$ (c.f. [D]). Elle vérifie les relations de compatibilité:

$$F^\bullet\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C}) \cap \mathrm{H}^3(X_b, \mathbb{C}) = F^\bullet\mathrm{H}^3(X_b, \mathbb{C})$$

et

$$\mathrm{Res}(F^\bullet\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C})) = F^{\bullet-1}\mathrm{H}^2(S_b, \mathbb{C})_o.$$

Soient maintenant $\alpha_{b,F}$ un relèvement de α_b dans $F^2\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C})$, et $\alpha_{b,\mathbb{Z}}$ un relèvement de α_b dans $\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z})_t$. Alors $\mathrm{AJ}_{X_b}(j_*Z_b)$ s'identifie à la classe

$$\alpha_{b,F} - \alpha_{b,\mathbb{Z}} \in \frac{\mathrm{H}^3(X_b, \mathbb{C})}{F^2\mathrm{H}^3(X_b, \mathbb{C}) + \mathrm{H}^3(X_b, \mathbb{Z})_t},$$

qui ne dépend pas des choix de $\alpha_{b,F}$ et $\alpha_{b,\mathbb{Z}}$. On a donc $\mathrm{AJ}_{X_b}(j_*Z_b) = 0$ si et seulement si α_b admet un relèvement β_b dans $F^2\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C}) \cap \mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z})_t$. Or un tel relèvement est nécessairement unique car on a

$$F^2\mathrm{H}^3(X_b) \cap \mathrm{H}^3(X_b, \mathbb{Z})_t = \{0\},$$

d'où le lemme 2. □

On peut maintenant décrire localement $\mathcal{N}^d$ de la façon suivante.

Soit $b \in B^d$. Soit $0 \neq \beta_b \in \mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z})_t$. Soit $\pi\colon \mathcal{U} \to B^d$ la famille universelle des ouverts U au-dessus de B^d et soit $\mathcal{H}^3(U, \mathbb{C}) := R^3\pi_*(\mathbb{C}_{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{O}_{B^d}$ le fibré vectoriel plat sur B^d de fibre $\mathrm{H}^3(U, \mathbb{C})$. La classe β_b se prolonge de manière unique sur un voisinage simplement connexe V_b de b dans B^d en une section plate β du système local $\mathrm{H}^3_{\mathbb{Z}} := R^3\pi_*(\mathbb{Z}_{\mathcal{U}})$.

Le lemme 2 montre que β définit alors une composante $(\widetilde{\mathcal{N}^d}_\beta)$ de $\widetilde{\mathcal{N}^d}$ au dessus de $\mathcal{N}^d \cap V_b$ par la condition

$$b' \in \widetilde{\mathcal{N}^d}_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta_{b'} \in F^2\mathcal{H}^3(U, \mathbb{C}).$$

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

Inversement, $\widetilde{\mathcal{N}^d}$ est par le même lemme (et toujours au dessus de V_b) la réunion des ensembles définis de cette manière. Notons que $\widetilde{\mathcal{N}^d}_\beta$ peut être vu localement par l'application immersive $(X, S, \beta) \mapsto (X, S)$ comme un sous-ensemble de B^d. On le notera alors $\mathcal{N}^d_\beta$.

On suppose dorénavant que le point $b \in \mathcal{N}^d{}_\beta$ est fixé, et on étudie localement $\mathcal{N}^d_\beta$ au voisinage de b. Soit ∇ la connection de Gauss-Manin sur $\mathcal{H}^3(U, \mathbb{C})$. Elle induit par transversalité de Griffiths un morphisme

$$\bar{\nabla}\colon\ F^2/F^3\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}(T_b B^d, F^1/F^2\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C})).$$

Exactement comme dans [CGGH], qui énonce le résultat pour le lieu usuel de Noether–Lefschetz, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Soit $b \in \mathcal{N}^d_\beta$, et soit $\overline{\beta}_b$ la projection de $\beta_b \in F^2\mathrm{H}^3(U_b)$ dans $F^2/F^3\mathrm{H}^3(U_b)$. Alors l'espace tangent de Zariski à $\mathcal{N}^d_\beta$ en b, $T_b\mathcal{N}^d_\beta \subset T_{B^d,b}$ est décrit par: $T_b\mathcal{N}^d = \mathrm{Ker}(\bar{\nabla}(\overline{\beta}_b))$.*

Le résultat suivant est dû à Griffiths (voir [Gr], [Ca-G]) dans le cas pur où l'on considère la variation de structure de Hodge d'une hypersurface, et est montré dans [V 2] dans le cas mixte, où l'on considère la variation de structure de Hodge mixte des ouverts complémentaires d'une section plane d'une surface dans $\mathbb{P}^3$:

THÉORÈME 3. *On munit $\mathbb{P}^4$ de coordonnées $(X_0, \cdots, X_4)$, et on suppose que $S_b \subset X_b$ est défini par $X_4 = 0$. Soient F le polynôme définissant X et $\mathcal{J} \subset \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_4]$ l'idéal pseudo-jacobien de F défini par*

$$\mathcal{J} := \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2}, \frac{\partial F}{\partial X_3}, X_4\frac{\partial F}{\partial X_4}\right),$$

et soit $R := S/\mathcal{J}$. On a les identités

$$T_b B^d \simeq R^d; \quad F^2/F^3\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C}) \simeq R^{2d-4}; \quad F^1/F^2\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{C})) \simeq R^{3d-4};$$

et l'application induite par $\bar{\nabla}$:

$$R^{2d-4} \to \mathrm{Hom}(R^d, R^{3d-4})$$

est à un coefficient non nul près induite par la multiplication dans l'anneau R.

Le théorème 3 permet maintenant de montrer comment le théorème 2 entraîne le théorème 1. Soit $\Theta \subset R^d$ le sous-espace vectoriel correspondant à $T_{\mathcal{N}^d_\beta, b}$ et $Q_b \in R^{2d-4} - \{0\}$ le polynôme image de $\overline{\beta}_b$ par les isomorphismes du théorème 3. On note μ_{Q_b} la multiplication par Q_b. On a

$$\Theta = \mathrm{Ker}(\mu_{Q_b}\colon R^d \to R^{3d-4}),$$

et donc:

$$Q_b \in \mathrm{Ker}(R^{2d-4} \to \mathrm{Hom}(\Theta, R^{3d-4})), \tag{1}$$

où la flèche est donnée par la multiplication.

Par [M] on sait que R^{3d-5} est naturellement dual de R^{2d-4}. Soit $\Lambda_b \in (R^{3d-5})^\vee$ l'image de Q_b par cette dualité.

Comme la multiplication est sa propre transposée, (1) devient:

$$\mathrm{Im}(\Theta \otimes R^{2d-5} \to R^{3d-5}) \subset \mathrm{Ker}(\Lambda_b), \tag{2}$$

où la flèche est la multiplication. Comme $\Lambda_b \neq 0$, l'application $\Theta \otimes R^{2d-5} \to R^{3d-5}$ n'est pas surjective, et donc par le théorème 2 appliqué à l'idéal gradué $I \doteqdot (\mathcal{J}, \Theta)$, on a

$$\mathrm{codim}(\Theta, R^d) \geqslant \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7.$$

Cela montre la première partie du théorème 1 puisque

$$\mathrm{codim}\, \mathcal{N}^d_\beta \geqslant \mathrm{codim}\, T_{\mathcal{N}^d_\beta, b} = \mathrm{codim}\, \Theta.$$

Pour conclure la preuve du théorème 1, on suppose dorénavant

$$\mathrm{codim}\, \mathcal{N}^d_\beta = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7,$$

de sorte qu'on a

$$\mathrm{codim}(\Theta, R^d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7.$$

Le théorème 2 montre alors que l'idéal I coïncide en degré supérieur ou égal à d avec un idéal intersection complète $\mathcal{I}$ de multidegré $(1, 1, d-1, d-1, d)$, et que $\Theta = I^d$.

Soit P_b le plan défini par $\mathcal{I}^1$. On a $\dim(\mathcal{I}^{d-1}_{|P_b}) \leqslant 2$, et comme $\mathcal{J} \subset I \subset \mathcal{I}$, on a $\dim(\mathcal{J}^{d-1}_{|P_b}) \leqslant 2$ et donc

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial X_4}\right)_{|P_b}\right) \leqslant 3.$$

Or on a

PROPOSITION 2. *Soit $V^d \subset \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(d))$ la variété des hypersurfaces lisses d'équation F telles qu'il existe un plan projectif $P_F \subset \mathbb{P}^4$ vérifiant*

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial X_4}\right)_{|P_F}\right) \leqslant 3,$$

Soit W^d une composante irréductible de V^d. Alors

– *soit*

$$\operatorname{codim} W^d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7$$

et pour $F \in W^d$ *générique,* P_F *est osculateur à l'ordre* d *à l'hypersurface d'équation* $F = 0$;

– *soit* codim $W^d \geqslant d(d+1) - 11$.

Preuve. C'est une adaptation des arguments de [V 1] et [G 1].

Comme pour $F \in W^d$ générique il existe un seul plan P_F vérifiant l'hypothèse de la proposition 2, il existe un morphisme rationnel

$$\begin{aligned} \phi\colon W^d &\to \mathrm{Gr}(3,5) \\ F &\mapsto P_F. \end{aligned}$$

Comme W^d est invariant sous $\mathbb{P}Gl_5$, ϕ est surjectif.

On fixe maintenant $P \subset \mathbb{P}^4$. Soit $W_P^d := \phi^{-1}(P)$. On a

$$\operatorname{codim} W^d = \operatorname{codim} W_P^d - \dim(\mathrm{Gr}(3,5)) = \operatorname{codim} W_P^d - 6.$$

Soit $F \in W_P^d$ un point générique, de sorte que W_P^d est lisse en P. On peut supposer que P est défini par les équations $X_0 = 0$ et $X_1 = 0$. On définit les polynômes F_0, F_1 et F_∞ par:

$$F = F_\infty(X_2, X_3, X_4) + X_0F_0(X_2, X_3, X_4) + X_1F_1(X_2, X_3, X_4) + R,$$

où R est de degré $\geqslant 2$ en X_0 et X_1. En notant de la même façon les polynômes sur $\mathbb{P}^4$ et leurs restrictions à P, on a, sur P, les identités $F = F_\infty$ et:

$$\frac{\partial F}{\partial X_0} = F_0; \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = F_1; \quad \frac{\partial F}{\partial X_2} = \frac{\partial F_\infty}{\partial X_2}; \quad \frac{\partial F}{\partial X_3} = \frac{\partial F_\infty}{\partial X_3}; \quad \frac{\partial F}{\partial X_4} = \frac{\partial F_\infty}{\partial X_4}.$$

On pose

$$l := \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial F_\infty}{\partial X_2}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_3}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_4}\right)\right).$$

Si $l \leqslant 1$, on a $F_\infty = Y^d$, où Y est une combinaison linéaire de X_2, X_3 et X_4, et la première alternative est vraie.

Si $l = 2$, d'une part il existe une combinaison linéaire non nulle Y de X_2, X_3 et X_4 telle que $\partial F_\infty/\partial Y = 0$; comme le polynôme $\partial F_\infty/\partial Y$ dépend de $(d(d+1))/2$ modules, et que $Y \in \mathbb{P}(X_2, X_3, X_4)$ dépend de 2 modules, cette contrainte impose localement $d(d+1)/2 - 2$ conditions sur W_P^d; d'autre part, quitte à permuter X_0 et X_1 (ce qui préserve le plan P), on peut supposer

$$F_0 \in \mathrm{Vect}\left(F_1, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_2}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_3}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_4}\right);$$

cette contrainte impose localement $(d(d+1)/2) - 3$ conditions sur W_P^d; enfin, comme

$$\left(\frac{d(d+1)}{2}-2\right)+\left(\frac{d(d+1)}{2}-3\right)-6=d(d+1)-11,$$

la seconde alternative est vraie.

Si $l=3$, les contraintes

$$F_0 \in \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial F_\infty}{\partial X_2}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_3}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_4}\right) \quad \text{et} \quad F_1 \in \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial F_\infty}{\partial X_2}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_3}, \frac{\partial F_\infty}{\partial X_4}\right),$$

imposent à chaque fois $(d(d+1)/2)-3$ conditions sur W_P^d; la seconde alternative est encore vraie. $\square$

Pour $d \geqslant 5$, on a

$$d(d+1)-11 > \frac{(d+1)(d+2)}{2}-7,$$

et donc la proposition 2 montre que P_b est osculateur à l'ordre d à X_b. En particulier, on a

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial X_4}\right)_{|P_b}\right)=1$$

Or, comme $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ et que $\mathcal{I}$ est une intersection complète, le polynôme $X_4(\partial F/\partial X_4)$ est en intersection complète avec $\partial F/\partial X_2$ et $\partial F/\partial X_3$. On en déduit facilement $F_{|P_b}=X_4^d$.

La proposition 2 montre que si $d \geqslant 5$ et

$$\mathrm{codim}(\mathcal{N}_\beta^d, B^d)=\frac{(d+1)(d+2)}{2}-7,$$

l'image de $\mathcal{N}_\beta^d$ dans B^d s'identifie à l'ensemble des paires (S, X) satisfaisant les conclusions du théorème 1. Pour conclure, il suffit de montrer que la classe non nulle $\beta \in F^2H^3(U_b) \cap H^3(U_b, \mathbb{Z})$ est unique à un multiple près (et donc est en fait la classe correspondant à

$$d\Delta - h_X \in \mathrm{Pic}(S)_o \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{AJ}_X \circ j_*)$$

par le lemme 2), au point b générique dans l'image de $\mathcal{N}_\beta^d$ dans B^d. Cela résulte du fait que I étant une intersection complète de degré-socle $3d-5$, on a $\mathrm{codim}(I^{3d-5}, S^{3d-5})=1$. On en déduit

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Im}\,(\Theta \otimes R^{2d-5} \to R^{3d-5}), R^{3d-5})=1.$$

Or d'après l'identité (2), Λ_b doit être orthogonal à $\mathrm{Im}\,(\Theta \otimes R^{2d-5} \to R^{3d-5})$. Cela implique que Λ_b et, par suite, Q_b est unique à un scalaire complexe près. Or il est facile de voir, en utilisant le fait que $\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{R}) \cap F^3\mathrm{H}^3(U_b)=\{0\}$, que l'on a une inclusion

$$(\mathrm{H}^3(U_b, \mathbb{Z}) \cap F^2\mathrm{H}^3(U_b)) \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow F^2/F^3\mathrm{H}^3(U_b).$$

Donc la classe β est également unique à un coefficient entier près.

3. Preuve du théorème 2 pour d assez grand

La preuve du théorème 2 est organisée comme suit. On se ramène au cas où I est Gorenstein (lemme 3); l'idéal I contient alors une intersection complète sans points base de plus petit multidegré $(l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)$. Le lemme 4 minore $l_0 + l_2 + l_3 + l_4$. Les inégalités (4) majorent l_3 et l_4 ; les lemmes 5, 6 et 7 majorent l_0. On en déduit une minoration de l_2, et on conclut par une étude asymptotique pour $d \gg 0$ du lieu-base de I^{l_2-1}, dont on majore le degré grâce aux lemmes 5, 6 et 7.

On remarque que le théorème 2 est facile si l'on suppose que I est une intersection complète, la fonction de Hilbert des intersections complètes étant bien connue.

On dira par abus qu'un idéal J est Gorenstein si son quotient S/J est une S-algèbre graduée Gorenstein de dimension 0. Ainsi, un idéal J est Gorenstein de degré n s'il est homogène et s'il existe une forme linéaire $\Lambda \in (S^n)^\vee$ non nulle telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $J^k = \{P \in S^k | \forall Q \in S^{n-k},\ \Lambda(PQ) = 0\}$. Un idéal Gorenstein vérifie en particulier $S^k/J^k \simeq (S^{n-k}/J^{n-k})^\vee$ (la dualité étant induite par la forme Λ) et sa résolution par syzygies est symétrique: pour tout $i \in \{0, \cdots, 5\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{Tor}_{5-i}(S/J, S/\mathcal{M})_k = \mathrm{Tor}_i(S/J, S/\mathcal{M})_{n-k},$$

où $\mathcal{M}$ désigne l'idéal maximal $S^{>0}$ de S.

Si J et J' sont deux idéaux Gorenstein associés aux formes linéaires $\Lambda \in (S^n)^\vee$ et $\Lambda' \in (S^{n'})^\vee$, tels que $J \subset J'$ (si bien que $n \geqslant n'$), l'image de Λ' dans $(S^{n'}/J^{n'})^\vee$ s'identifie via l'isomorphisme induit par Λ à un polynôme $\bar{F} \in S^{n-n'}/J^{n-n'}$. Pour tout polynôme $Q \in S^{n'}$, on a $\Lambda'(Q) = \Lambda(QF)$, où $F \in S^{n-n'}$ est un relevé de $\bar{F}$. En particulier, on a donc $J' = \{Q \in S \mid QF \in J\}$.

LEMME 3. *Il suffit de montrer le théorème* 2 *pour un idéal I Gorenstein de degré* $3d - 5$.

Preuve. Par l'hypothèse 2 du théorème 2, il existe une forme linéaire $\Lambda \in (S^{3d-5})^\vee$ telle que $I^{3d-5} \subset \mathrm{Ker}\,\Lambda$. L'idéal associé à Λ contient I et vérifie les hypothèses du théorème 2. □

On se donne désormais un idéal I Gorenstein de degré $3d - 5$ vérifiant l'hypothèse 1 du théorème 2. On supposera de plus

$$\dim(S^d/I^d) \leqslant \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7. \tag{3}$$

On doit montrer $\dim(S^d/I^d) = (d+1)(d+2)/2 - 7$, et que I est une intersection complète de multidegré $(1, 1, d-1, d-1, d)$.

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

Soit $G_0, \cdots, G_4$ une suite de polynômes de degrés croissants $l_0, \cdots, l_4$ tels que pour tout $i \in \{0, \cdots 4\}$, G_i est un polynôme de plus petit degré tel que $G_i \in I$ et que G_i est en intersection complète avec $G_0, \cdots, G_{i-1}$. Par l'hypothèse 1 du théorème 2, I^{d-1} a un lieu-base vide ou de dimension 0 et I^d est sans point base. On en déduit:

$$l_0 \leqslant d-1; \quad l_1 \leqslant d-1; \quad l_2 \leqslant d-1; \quad l_3 \leqslant d-1; \quad l_4 \leqslant d. \tag{4}$$

Comme I est Gorenstein de degré $3d-5$, on obtient:

$$l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \geqslant 3d. \tag{5}$$

On peut améliorer l'inégalité 5:

LEMME 4. *On a:*

– *soit*

$$\dim(S^d/I^d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7$$

et I est une intersection complète de multidegré $(1, 1, d-1, d-1, d)$,

– *soit* $l_0 + l_2 + l_3 + l_4 \geqslant 3d$.

Preuve. Soit $s := l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 - 3d$; l'idéal $J := (G_0, \cdots, G_4)$ est intersection complète donc Gorenstein, de degré $3d - 5 + s$.

Si $s = 0$, alors $I = J$ est une intersection complète. L'hypothèse (3) implique que I est de multidegré $(1, 1, d-1, d-1, d)$.

Si $s > 0$, J est strictement inclus dans I et il existe un polynôme $F \in S^s$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $I^k = \{Q \in S^k | QF \in J^{k+s}\}$. On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow S^d/I^d \xrightarrow{\cdot F} S^{d+s}/J^{d+s} \longrightarrow S^{d+s}/(J, F)^{d+s} \longrightarrow 0,$$

et donc

$$\dim(S^d/I^d) = \dim(S^{d+s}/J^{d+s}) - \dim(S^{d+s}/(J, F)^{d+s}).$$

On doit montrer $s \geqslant l_1$. Supposons par l'absurde $s < l_1$. Si F n'est pas premier à G_0, soit $A = \operatorname{pgcd}(F, G_0) \in S^{>0}$, et soient B et C les polynômes définis par $AB = F$ et $AC = G_0$. On a $CF = BG_0 \in J$, donc $C \in I$, contredisant la minimalité de G_0. Si F est premier à G_0, soit $i > 0$ le plus petit entier tel que G_i n'est pas en intersection complète avec $(F, G_0 \cdots G_{i-1})$. Quitte à modifier les G_j, $j > i$ en leur ajoutant un multiple de G_i, on peut supposer que $J' \coloneqq (F, G_0 \cdots \hat{G}_i \cdots G_4)$ est une intersection complète. Si $J' = (J, F)$, on a $G_i \in J'$ donc quitte à modifier G_i par une combinaison linéaire des multiples des G_j, $j \neq i$, on peut supposer qu'il existe $D \in S^{l_i - s}$ tel que $G_i = FD$. Mais alors $D \in I$, et comme $(G_0 \cdots G_i)$ est une intersection complète, il en est de même de $(G_0 \cdots D)$, ce qui contredit la minimalité de G_i. Donc (J, F) contient strictement J'; comme (J, F) est engendré en degré inférieur ou égal à $d + s$, et que J' est une intersection complète, donc Gorenstein, ceci implique

que $(J,F)^{d+s}$ contient strictement J'^{d+s}. On a donc

$$\dim(S^d/I^d) > \dim(S^{d+s}/J^{d+s}) - \dim(S^{d+s}/J'^{d+s}).$$

Dans cette inégalité, le terme de droite est égal à la dimension en degré d de l'anneau d'une intersection complète de multidegré $(l_0 \cdots l_i - s \cdots l_4)$. Cela implique

$$\dim(S^d/I^d) > \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7,$$

contradiction. $\square$

Soit $H \in S^1$ un hyperplan générique. On note $S_H := S/(H)$ la restriction de S à H et $I_H := (I+H)/(H) \subset S_H$ la restriction de I à H (on identifiera abusivement l'hyperplan H et la forme linéaire associée). Le lemme suivant servira dans la preuve du lemme 6.

LEMME 5. *On a* $\dim(S_H^k/I_H^k) = 0$ *pour* $k \geqslant 2d-3$ *et* $\dim(S_H^{2d-4}/I_H^{2d-4}) \leqslant 1$.

Preuve. La d-décomposition de $(d+1)(d+2)/2 - 7$ est:

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7 = \binom{d+1}{d} + \cdots + \binom{5}{4} + \binom{3}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1}.$$

Ceci entraîne

$$\left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7\right)_{\langle d\rangle} = \binom{d}{d} + \cdots + \binom{4}{4} = d-3.$$

La fonction $k \mapsto k_{\langle d\rangle}$ étant décroissante, par le théorème 1 de [G 2] cela implique $\dim(S_H^d/I_H^d) \leqslant d-3$. Comme I^d est sans point base, par le théorème de Gotzmann ([Go]), cela implique $\dim(S_H^{d+i}/I_H^{d+i}) \leqslant \max\{0, d-3-i\}$ pour tout $i \geqslant 0$. $\square$

LEMME 6. *On a:*

- *soit*

$$\dim(S^d/I^d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7$$

et I *est une intersection complète de multidegré* $(1,1,d-1,d-1,d)$*;*

- *soit*

$$\dim(S^l/I^l) = \sum_{k=0}^{l} \dim(S_H^k/I_H^k) \quad \textit{pour } l \leqslant d.$$

Preuve. On a la suite exacte, où μ_H désigne la multiplication par H:

$$S^{k-1}/I^{k-1} \xrightarrow{\mu_H} S^k/I^k \longrightarrow S_H^k/I_H^k \longrightarrow 0. \tag{6}$$

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

Par le lemme 5, pour $k \geqslant 2d-3$, μ_H est surjective, et, pour $k = 2d-4$ de conoyau de dimension au plus 1. Par dualité, cela implique que pour $k \leqslant d-1$ l'application $\mu_H\colon S^{k-1}/I^{k-1} \to S^k/I^k$ est injective, et pour $k = d$ est de noyau de dimension au plus 1 (la multiplication par H étant sa propre transposée).

Si l'application $\mu_H\colon S^{d-1}/I^{d-1} \to S^d/I^d$ n'est pas injective, on a

$$\dim(S_H^{2d-4}/I_H^{2d-4}) = 1.$$

Par le théorème de Gotzmann ([Go]), cela implique $\dim(S_H^{d+i}/I_H^{d+i}) = d-3-i$ pour tout $i \in \{0, \cdots, d-3\}$. En particulier, on a $\dim(S_H^{2d-4}/I_H^{2d-4}) = 1$. Soit $\Lambda \in S_H^{2d-4\vee}$ une forme linéaire non nulle s'annulant sur I_H^{2d-4}. L'idéal Gorenstein I' associé à Λ est de degré $2d-4$ et contient I_H; de plus, par dualité on a pour tout $i \in \{0, \cdots, d-3\}$:

$$\dim(S_H^i/I'^i) = \dim(S_H^{2d-4-i}/I'^{2d-4-i}) \leqslant i+1.$$

En particulier, I' contient l'idéal d'une droite Δ et la restriction de I' à Δ est un anneau Gorenstein à 2 variables. Or, en utilisant la symmétrie de la résolution par syzygies d'un idéal Gorenstein on montre qu'un tel idéal est forcément intersection complète. Soient a et b les degrés des générateurs de I'. Comme I' est de degré $2d-4$, on a $a+b = 2d-2$. Or I_H et donc I' est sans point base en degré $d-1$, donc $a = b = d-1$: I' est une intersection complète de multidegré $(1, 1, d-1, d-1)$. On a

$$\begin{aligned}\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 6 &= \sum_{k=0}^{d} \dim(S_H^k/I'^k)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{d} \dim(S_H^k/I_H^k)\\ &= \dim(S^d/I^d) + 1\\ &\leqslant \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 6,\end{aligned}$$

où la première inégalité s'obtient par un calcul direct, la seconde résulte de ce que $I_H \subset I'$, la troisième s'obtient grâce à (6) et la quatrième grâce à (3). Ces inégalités sont donc des égalités ; en particulier, on a ${I_H}^1 = {I'}^1 = 2$. Grâce à (6), on a $\dim(S^1/I^1) = \dim(S_H^0/I_H^0) + \dim(S_H^1/I_H^1) = 3$. Donc I contient l'idéal d'un plan, et $l_0 = l_1 = 1$. Par (4) et (5) cela implique $l_2 = d-1$, $l_3 = d-1$, $l_4 = d$, et I est intersection complète; la première alternative est vraie.

Si $\mu_H\colon S^{k-1}/I^{k-1} \to S^k/I^k$ est injective pour $k \leqslant d$, grâce à (6), on a pour $l \leqslant d$

$$\dim(S^l/I^l) = \sum_{k=0}^{l} \dim(S_H^k/I_H^k)$$

et la seconde alternative est vraie. □

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

On déduit immédiatement du lemme 6 que pour $k \in \{1, \cdots, d\}$ on a

$$\dim(S^k/I^k) \leqslant \dim(S^d/I^d). \tag{7}$$

Le lemme suivant sera l'outil essentiel de la suite de la démonstration.

LEMME 7. *Soit $W \subset S^k$ un sous-espace vectoriel dont le lieu-base est de dimension l et de degré p. On a*

$$\dim(S^k/W) \geqslant \binom{k+l+1}{l+1} - \binom{k-p+l+1}{l+1}.$$

Preuve. Soient Z le lieu-base de W et I_Z l'idéal associé. On a $W \subset I_Z^k$, donc S^k/I_Z^k est un quotient de S^k/W, et par suite $\dim(S^k/W) \geqslant \dim(S^k/I_Z^k)$.

On va montrer le résultat pour $\dim(S^k/I_Z^k)$ par récurrence sur k et l.

Pour $k = 0$ l'énoncé est clair.

Pour $l = 0$ et $k > 0$ il faut montrer $\dim(S^k/I_Z^k) \geqslant \min(p, k+1)$. Or, pour $r \gg 0$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{I}_Z(r)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(r)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_Z(r)) \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse, le schéma Z est de longueur p; on a donc $\dim(S^r/I_Z^r) = \mathrm{h}^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(r))/\mathrm{h}^0(\mathcal{I}_Z(r)) = \mathrm{h}^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_Z(r)) = p$. Supposons $\dim(S^k/I_Z^k) \leqslant k$. Par le théorème de Macaulay, cela implique $\dim(S^{k+r}/I_Z^{k+r}) \leqslant k$ pour tout $r > 0$; en particulier, $\dim(S^r/I_Z^r) \leqslant k$, donc $p \leqslant k$.

Supposons l'énoncé vrai pour $k-1$, et pour k et $l-1$. Soit $H \in S^1$ un hyperplan générique. Par le théorème de Bertini (*cf.* [Bou 8]), pour $l > 0$ la multiplication par H: $S^{k-1}/I_Z^{k-1} \to S^k/I_Z^k$ est injective. On considère la suite exacte définissant K:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\cdot H} S^k/I_Z^k \longrightarrow S_H^k/I_{Z\cap H}^k \longrightarrow 0.$$

Il est clair que K contient S^{k-1}/I_Z^{k-1}. Or, par hypothèse de récurrence, on a

$$\dim(S^{k-1}/I_Z^{k-1}) \geqslant \binom{k+l}{l+1} - \binom{k-p+l}{l+1}$$

et

$$\dim(S_H^k/I_{Z\cap H}^k) \geqslant \binom{k+l}{l} - \binom{k-p+l}{l}.$$

On obtient le résultat cherché en regroupant 2 à 2 les termes des inégalités ci-dessus. $\square$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2. On suppose par l'absurde que la conclusion du théorème 2 est fausse, c'est-à-dire que

$$\dim(S^d/I^d) < \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7. \tag{8}$$

Par le lemme 4, on a alors $l_0 + l_2 + l_3 + l_4 \geqslant 3d$ et par (4), cela implique

$$l_0 + l_2 \geqslant d + 1. \tag{9}$$

Comme $\dim(S^{l_0-1}/I^{l_0-1}) = \dim(S^{l_0-1}) = \binom{l_0+3}{4}$, l'inégalité (7) implique d'une part:

$$\binom{l_0+3}{4} < \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7. \tag{10}$$

Soit Z le lieu-base de I^{d-l_0}. L'inégalité (9) implique $l_2 < d - l_0$, donc le schéma Z est de dimension au moins 2. Quitte à le remplacer par un sous-schéma, on peut le supposer de dimension 2. Soit m son degré. Le lemme 7 et l'inégalité (7) appliqués à $\dim(S^{d-l_0}/I^{d-l_0})$ impliquent donc:

$$\binom{d-l_0+3}{3} - \binom{d-l_0+3-m}{3} < \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7. \tag{11}$$

Maintenant (10) implique que pour d assez grand on a $l_0 \leqslant d/10$, et on déduit de (11) que pour d assez grand on a nécessairement $m = 1$. Il existe donc une forme linéaire $L \in S^1$ s'annulant sur Z. Mais (9) et (4) impliquent $l_0 > 1$, donc $L \notin I$. On conclut par le lemme ci-dessous, qui pour d assez grand contredit les inégalités

$$\dim\, S^{d-l_0}/I^{d-l_0} \leqslant \dim\, S^d/I^d \leqslant \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 7$$

et $l_0 < d/10$.

LEMME 8. *On suppose qu'il existe une forme linéaire $L \in S^1 - I^1$ s'annulant sur le lieu base Z de I^{d-l_0}. Alors on a:*

$$\dim(S^{d-l_0}/I^{d-l_0}) \geqslant \binom{d-l_0+2}{2} + \binom{d-l_0+1}{2}.$$

Preuve. Ce lemme est une conséquence du lemme 4 et du lemme 7.

On pose $(I\colon L) = \{Q \in S | QL \in I\}$. C'est un idéal Gorenstein de degré $3d-6$ contenant I, et s'insérant dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow S^{d-l_0+1}/(I\colon L)^{d-l_0+1} \xrightarrow{\mu_L} S^{d-l_0}/I^{d-l_0} \longrightarrow S_L^{d-l_0}/I_L^{d-l_0} \longrightarrow 0.$$

On en déduit:

$$\dim(S^{d-l_0}/I^{d-l_0}) = \dim(S^{d-l_0-1}/(I : L)^{d-l_0-1}) + \dim(S_L^{d-l_0}/I_L^{d-l_0}).$$

D'une part, le lieu-base de $(I+L)^{d-l_0}$ est Z, et comme $\dim Z \leqslant 2$, d'après le lemme 7

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

on a

$$\dim(S_L^{d-l_0}/I_L^{d-l_0}) \geqslant \binom{d-l_0+2}{2}.$$

Il suffit donc de montrer:

$$\dim(S^{d-l_0-1}/(I\colon L)^{d-l_0-1}) \geqslant \binom{d-l_0+1}{2}. \tag{12}$$

On raisonne maintenant comme dans le lemme 4. Pour cela, on définit les entiers l_i', $i \in \{0\cdots 4\}$ pour $(I\colon L)$ comme les entiers l_i définis pour I. On a les inégalités:

$$l_i' \leqslant l_i,\ i \in \{0\cdots 4\} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{4} l_i' \geqslant 3d-1$$

(la première résulte de ce que $I \subset (I\colon L)$; la seconde de ce que $(I\colon L)$ est Gorenstein de degré $3d-6$).

On pose $s' := \sum_{i=0}^{4} l_i' - 3d - 1$.

Si $s' = 0$ alors $(I\colon L)$ est une intersection complète, et $\dim(S^{d-l_0-1}/(I\colon L)^{d-l_0-1})$ est majoré par la dimension en degré $d-l_0-1$ de l'anneau d'une intersection complète de multidegré $(1, 1, d-2, d-1, d)$. Comme $l_0 \geqslant 2$ cet anneau coïncide en degré $d-l_0-1$ avec l'anneau du plan défini par les deux générateurs de degré 1 de $(I\colon L)$, ce qui implique (12).

Si $s' > 0$, la démonstration du lemme 4 montre que

– soit $\dim(S^{d-l_0-1}/(I\colon L)^{d-l_0-1})$ est supérieur à la dimension en degré $d-l_0-1$ de l'anneau d'une intersection complète de multidegré $(l_0', \cdots, l_i' - s, \cdots l_4')$ et (12) est vrai ;

– soit $s' > l_1'$. Alors $l_0' + l_2' \geqslant d$, donc $l_2' > d - l_0' - 1 \geqslant d - l_0 - 1$. Cela montre que le lieu-base Z' de $(I\colon L)^{d-l_0-1}$ est de dimension $\geqslant 2$, et donc d'après le lemme 7, (12) est encore vrai. □

4. Preuve du théorème 2 pour les petites valeurs de *d*

La preuve du théorème 2 pour les petites valeurs de d s'obtient en affinant la preuve exposée dans la section précédente. L'élément essentiel en est le lemme 9, dont l'énoncé est intéressant en soi. Ce dernier permet d'améliorer l'inégalité (7); on obtient ainsi les inégalités (13) et (14). La fin de la preuve consiste en une confrontation des idées de la section précédente avec un calcul explicite des inégalités obtenues.

LEMME 9. *Soit J un idéal Gorenstein de degré n, tel que $J^{E(\frac{n}{2})}$ est sans point base, et soit $H \in S^1$ un hyperplan générique. On note $J_H := (J+H)/(H) \subset S_H$ la restriction de J à H. On a $S_H^{E(\frac{n}{2})}/J_H^{E(\frac{n}{2})} \neq 0$.*

Preuve. Par l'absurde, on suppose $S_H^{E(\frac{n}{2})}/J_H^{E(\frac{n}{2})} = 0$.

https://doi.org/10.1023/A:1014751331345 Published online by Cambridge University Press

Comme $n - E(\frac{n}{2}) \geqslant E(\frac{n}{2})$, on a aussi $S_H^{n-E(\frac{n}{2})}/J_H^{n-E(\frac{n}{2})} = 0$, donc l'application

$$\mu_H \colon S^{n-E(\frac{n}{2})-1}/J^{n-E(\frac{n}{2})-1} \to S^{n-E(\frac{n}{2})}/J^{n-E(\frac{n}{2})}$$

est surjective, et par suite l'application duale

$$\mu_H \colon S^{E(\frac{n}{2})}/J^{E(\frac{n}{2})} \to S^{E(\frac{n}{2})+1}/J^{E(\frac{n}{2})+1}$$

est injective.

Soit J' l'idéal engendré par $J^{\leqslant E(\frac{n}{2})+1}$. L'idéal J' est sans point base; pour $k \leqslant E(n/2)+1$ on a $J'^k = J^k$ et pour $k \geqslant E(n/2)+1$, J'^k engendre J'^{k+1}. On pose

$$(J' \colon H) = \{P \in S | HP \in J'\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $J'^k \subset (J' \colon H)^k$ avec égalité si et seulement si $\mu_H \colon S^k/J'^k \to S^{k+1}/J'^{k+1}$ est injective. En particulier, on a $(J' \colon H)^{E(\frac{n}{2})} = J'^{E(\frac{n}{2})}$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(J' \colon H)$ s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow S^k/(J' \colon H)^k \xrightarrow{\mu_H} S^{k+1}/J'^{k+1} \longrightarrow S_H^{k+1}/J'^{k+1}_H \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte

$$\mathrm{Tor}_2(S_H/J'_H, S/\mathcal{M})_k \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(S/(J' \colon H), S/\mathcal{M})_{k-1} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(S/J', S/\mathcal{M})_k.$$

Soit maintenant $k \geqslant E(n2)+1$. Comme

$$S_H^{E(\frac{n}{2})}/J_H^{E(\frac{n}{2})} = 0,$$

on a

$$S_H^{E(\frac{n}{2})}/J'^{E(\frac{n}{2})}_H = 0$$

et donc

$$S_H^{k-1}/J'^{k-1}_H = 0.$$

Cela implique $\mathrm{Tor}_2(S_H/J'_H, S/\mathcal{M})_{k+1} = 0$. D'autre part, comme J'^k engendre J'^{k+1}, on a $\mathrm{Tor}_1(S/J', S/\mathcal{M})_{k+1} = 0$. De la suite exacte longue on déduit $\mathrm{Tor}_1(S/(J' \colon H), S/\mathcal{M})_k = 0$. Autrement dit, $(J' \colon H)$ est engendré par $(J' \colon H)^{E(\frac{n}{2})} = J'^{E(\frac{n}{2})}$. Donc $(J' \colon H)^{k-1} = J'^{k-1}$ et $\mu_H \colon S^{k-1}/\,J'^{k-1} \to S^k/J'^k$ est injective. Ainsi pour $k \geqslant E(\frac{n}{2})$ l'application $k \mapsto \dim(S^k/J'^k)$ est croissante, ce qui contredit le fait que J' est sans point base. $\square$

Comme I^d donc aussi $I^{E(\frac{3d-5}{2})}$ est sans point base, le lemme 9 appliqué à I devient:

$$\dim\left(S_H^{E(\frac{3d-5}{2})}/I_H^{E(\frac{3d-5}{2})}\right) > 0.$$

Comme I_H^d et I_H^{d-1} sont sans point base, par le théorème de Gotzmann ([Go]) on en déduit:

$$\dim(S_H^d/I_H^d) \geqslant E\left(\frac{d-3}{2}\right) \quad \text{et} \quad \dim(S_H^{d-1}/I_H^{d-1}) \geqslant E\left(\frac{d-1}{2}\right).$$

Par le théorcème de Macaulay ([M]), cela implique que pour $k \in \{1, \cdots, d-1\}$ on a:

$$\dim(S_H^k/I_H^k) \geqslant \min\left\{k+1, E\left(\frac{d-1}{2}\right)\right\}.$$

Comme dans la section précédente, on suppose maintenant par l'absurde que la conclusion du théorème 2 est fausse, c'est-à-dire qu'on a l'inégalité (8). Grâce au lemme 6, on a pour $k \in \{1, \cdots, d-1\}$:

$$\dim(S^k/I^k) \leqslant \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 6 - \sum_{i=k+1}^{d} \min\left\{i+1, E\left(\frac{d-1}{2}\right)\right\}.$$

En distinguant les cas

$$k \leqslant E\left(\frac{d-3}{2}\right) \quad \text{et} \quad k \geqslant E\left(\frac{d-3}{2}\right),$$

on obtient les inégalités ci-dessous, valables pour tout $k \in \{1, \cdots, d-1\}$:

$$\begin{aligned} &\dim(S^k/I^k) \\ &\quad\leqslant \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{\left(d - E\left(\frac{d-3}{2}\right)\right)\left(d - E\left(\frac{d-3}{2}\right) + 1\right)}{2} - 6 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\dim(S^k/I^k) \leqslant \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 6 - (d-k)E\left(\frac{d-1}{2}\right). \tag{14}$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2. On suppose toujours par l'absurde que la conclusion du théorème 2 est fausse. On a alors en particulier l'inégalité (9): $l_0 + l_2 \geqslant d+1$.

D'une part, grâce à (13), on peut améliorer l'inégalité 10:

$$\binom{l_0+3}{4} \leqslant \frac{(l_0+1)(l_0+2)}{2} + \frac{\left(d - E\left(\frac{d-3}{2}\right)\right)\left(d - E\left(\frac{d-3}{2}\right) + 1\right)}{2} - 6 \qquad .$$

Cela implique

$$l_0 \leqslant \frac{d}{3} + 1 \tag{15}$$

(pour $d \gg 0$ c'est clair, et pour les petites valeurs de d on vérifie à la main). Mais d'autre part, grâce à (14), on peut aussi améliorer l'inégalité (11):

$$\begin{aligned}&\binom{d-l_0+3}{3}-\binom{d-l_0+3-m}{3}\\&\quad\leqslant\frac{(d+1)(d+2)}{2}-6-(l_0-1)E\left(\frac{d-1}{2}\right).\end{aligned}\tag{16}$$

Un calcul direct (mais fastidieux!) montre que (15) et (16) impliquent $m \leqslant 2$, et, si $m = 2$, $l_0 \geqslant 3$.

Comme $m \leqslant 2$, il existe une forme linéaire $L \in S^1$ s'annulant sur Z. Comme $l_0 + l_2 \geqslant d + 1$ et que $l_2 \leqslant d - 1$, on a $l_0 \geqslant 2$, donc $L \notin I$. Le lemme 8 montre que l'on a

$$\dim(S^{d-l_0}/I^{d-l_0}) \geqslant \binom{d-l_0+2}{2}+\binom{d-l_0+1}{2}.$$

Grâce à (14), on obtient l'inégalité (16) avec $m = 2$. Cela implique $l_0 \geqslant 3$.

Plus précisément, la preuve du lemme 8 montre que l'on a:

$$\dim(S^{d-l_0}/I^{d-l_0}) \geqslant \binom{d-l_0+2}{2}+\dim(S^{d-l_0-1}/(I:L)^{d-l_0-1}).$$

Pour achever la démonstration du théorème 2, il suffit de montrer que:

$$\dim(S^{d-l_0-1}/(L:I)^{d-l_0-1}) \geqslant \binom{d-l_0+1}{2}+\binom{d-l_0}{2}.$$

En effet, le cas échéant, on aurait

$$\dim(S^{d-l_0}/I^{d-l_0}) \geqslant \binom{d-l_0+2}{2}+\binom{d-l_0+1}{2}+\binom{d-l_0}{2},$$

qui par (14) implique l'inégalité (16) avec $m = 3$, contredisant (15).

Pour montrer (17), on reprend la preuve du lemme 8, en remarquant que $l_0 \geqslant 3$ implique $l'_0 \geqslant 2$ (c'est-à dire $(I:L)^1 = 0$):

– si $s' = 0$ alors $(I:L)$ est une intersection complète, et comme $l'_0 \geqslant 2$, $\dim(S^{d-l_0-1}/(I:L)^{d-l_0-1})$ est majoré par la dimension en degré $d - l_0 - 1$ de l'anneau d'une intersection complète de multidegré $(2, 2, d-4, d-1, d)$, qui vérifie (17).

– si $1 \leqslant s' < l_1$, comme dans le lemme 8, on montre que $\dim(S^{d-l_0-1}/(I:L)^{d-l_0-1})$ est supérieur à la dimension en degré $d - l_0$ de l'anneau d'une intersection complète de multidegré $(l'_0, \cdots, l'_i - s, \cdots l'_4)$. Si $l'_0 \geqslant 2$, ce dernier vérifie (17).

– enfin, si $s' > l'_1$ le lieu-base Z' de $(I:L)^{d-l_0-1}$ est de dimension $\geqslant 2$. Si Z' est de degré $\geqslant 2$, (17) découle du lemme 7; sinon, il existe une forme linéaire $L' \in S^1$ s'annulant sur Z', et, comme $l'_0 \geqslant 2$, $L' \notin (I:L)^1$. Maintenant (17) résulte d'un énoncé exactement analogue à celui du lemme 8, appliqué à l'idéal $(I:L)$, et dont la démonstration est calquée sur celle du lemme 8.

References

[Bl] Bloch, S.: *Lectures on Algebraic Cycles,* Duke Univ. Math. Series 4, Durham, 1980.

[Bou 8] Bourbaki, N: Algèbre commutative, *Éléments de mathématiques, chapitre* 8, Hermann, Paris, 1983.

[Cle] Clemens, H.: Some results on Abel–Jacobi mappings, In: *Topics in Transcendental Algebraic Geometry*, Ann. of Math. Stud. 106, Princeton Univ. Press, 1980, pp. 289–304.

[Ca-G] Carlson, J. and Griffiths, P.: Infinitesimal variation of Hodge structure and the global Torelli problem, In: A. Beauville (ed), *Géométrie algébrique*, Sijthoff–Noordhoff, Angers, 1980, pp. 51–76,

[CGGH] Griffiths, P. and Harris, J.: Infinitesimal variations of Hodge structure II: An infinitesimal invariant of Hodge classes, *Compositio Math.* **50** (1985), 207–265.

[D] Deligne, P.: Théorie de Hodge II, *Publ. Math. IHES* **40** (1971), 5–57.

[E-G-H] Eisenbud, D., Green, M. and Harris, J.: Higher Castelnuovo Theory, *S.M.F, Astérisque* **218** (1993), 187–202.

[Go] Gotzmann, G.: Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes, *Math. Z.* **158** (1978), 61–70.

[G 1] Gree, M.: Components of maximal dimension in the Noether–Lefschetz locus, *J. Differential Geom.* **29** (1989), 295–302.

[G 2] Green, M.: Restrictions of linear series to hyperplanes, and some results of Macaulay and Gotzmann, In: E. Ballico and C. Ciliberto (eds), *Algebraic Curves and Projective Geometry*, Lecture Notes in Math. 1389, Springer, New York, 1989, pp. 77–88.

[G-M-V] Green, M., Murre, J. P. and Voisin, C.: *Algebraic Cycles and Hodge Theory,* Lecture Notes in Math. 1594, Springer, New York, 1993.

[Gr] Griffiths, P. H.: On the periods of rational integrals I, II. *Ann. Math.* **90** (1989), 460–541.

[M] Macaulay. F. S.: Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* **26** (1927), 531–555.

[Mu] Murre, J. P.: Applications of algebraic K-theory to the theory of algebraic cycles. In: *Proc. Conf. Algebraic Geometry* (*Sitjes 1983*), Lecture Notes in Math., Springer, New York, 1985, pp. 216–261.

[No] Nori, M.: Algebraic cycles and Hodge theoretic connectivity, *Invent. Math.* **111**(2) (1993), 349–373.

[S] Saito, S.: Motives and filtrations on Chow groups, *Invent. Math.* **125** (1996), 149–196.

[V 1] Voisin, C.: Une précision concernant le théorème de Noether, *Math. Ann.* **280** (1989), 605–611.

[V 2] Voisin, C.: Variations de structure de Hodge et zéro-cycles sur les surfaces générales, *Math. Ann.* (1994), 77–102.

[V3] Voisin, C.: Sur l'application d'Abel–Jacobi des variétés de Calabi–Yau de dimension 3, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (*4*), **27** (1994), 209–226.