Canad. Math. Bull. Vol. 13 (4), 1970

ENSEMBLES DE WIENER-HOPF II

PAR
GÉRARD LETAC

Un ensemble de Wiener-Hopf est une partie S de la droite réelle R tel que

(i) S^+ et S^- sont non-vides

(ii) $S^+ + S^- \subset S$

où $S^- \cup S^0 \cup S^+$ est la décomposition de S en parties négative, nulle, et positive.

On remarque que ces ensembles présentent une parenté avec les semi-groupes de R. Ainsi, dans [1], est-il démontré que si S n'est pas concentré sur un multiple des entiers, S est dense dans un intervalle. Cette note poursuit l'analogie avec les semi-groupes par le théorème suivant:

THÉORÈME. *Un ensemble de Wiener-Hopf S, de mesure de Lebesque positive, est un intervalle.*

(Intervalle signifie ici simplement partie connexe de R)

Preuve. Supposons que S^+ soit de mesure positive, et fixons $A \subset S$, borné et de mesure positive, et $x \in S^-$. On définit par induction les ensembles A_n^+ et A_n^- de la manière suivante:

$$A_0^+ = S^+ \cap A, \qquad A_0^- = S^- \cap A,$$

et si n est un entier ≥ 0,

$$A_{n+1}^+ = S^+ \cap (A_n^+ + x), \qquad A_{n+1}^- = S^- \cap (A_n^+ + x).$$

Comme S est un ensemble de Wiener-Hopf on voit immédiatement que $A_n^+ + x \subset S$. Donc:

$$m(A_{n+1}^+) + m(A_{n+1}^-) = m(A_n^+), \quad \forall\, n \geq 0$$

où le nombre $m(B)$ est la mesure d'une partie B de R. $m(A_n^+)$ forme donc une suite non-croissante. L'ensemble A étant borné A_n^+ est vide pour n assez grand, ce qui montre que l'entier $n_0 = \inf\{k : m(A_k^+) < m(A)\}$, est défini. Donc $m(A_{n_0}^-) > 0$ et S^- est de mesure positive, ce qui entraîne que S a un point intérieur.

Supposons ce point intérieur dans S^+. Il existe donc a et b tels que $0 < a < b$ et $(a, b) \subset S$. L'ensemble S n'étant pas concentré sur un multiple des entiers, d'après le théorème de [1], la fermeture de S est un intervalle et il existe un x dans S^- tel que $a < b + x$.

Définissons $n = \sup\{k : a + kx \geq 0, k \text{ entier non-négatif}\}$. Alors, S étant un ensemble de Wiener-Hopf, on a:

$$(a+nx, b+nx) \subset S^+$$

et

$$(a+(n+1)x, b+(n+1)x) \subset S.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1970-100-8 Published online by Cambridge University Press

Si $b+(n+1)x<0$, cela entraîne $a+nx<0$ ce qui est impossible. Donc:

$$(h, 0) = (a+(n+1)x, 0) \subset S^-$$

ce qui montre d'abord que S^- a aussi un point intérieur, ensuite que si $y \in S^+$, alors $(y+h, y) \subset S$. S^+ est donc un intervalle et S^0 n'est pas vide. On termine la preuve en répétant le raisonnement pour S^-.

Reference

1. G. Letac, *A note about Wiener-Hopf sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1969).

Université de Montréal,
Montréal, Québec