Canad. Math. Bull. Vol. **27** (4), 1984

APPROXIMATION PAR DES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES ET CRITERE DE CONVERGENCE ETROITE D'UNE SUITE DE PROBABILITES

PAR

I. RIHAOUI

ABSTRACT. In this paper, we prove that a real valued bounded function, defined on a metric space and uniformly continuous is the uniform limit of a sequence of Lipschitzian bounded functions.

As a consequence, a new criterion for the weak convergence of probabilities is given.

Le résultat principal de cet article est un théorème d'approximation uniforme des fonctions uniformément continues et bornées par des fonctions lipschitziennes et bornées. On en déduit un nouveau critère de convergence étroite d'une suite de probabilités.

Notations et définition. Dans ce qui suit, (E, d) désigne un espace métrique. On note $\delta(E) = \sup_{(x,y)\in E^2} d(x, y)$ et, pour $x \in E$ et $\rho > 0$, $B(x, \rho) = \{y \in E : d(x, y) < \rho\}$. Une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne de rapport k si l'on a, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, $|g(x) - g(y)| \leq kd(x, y)$.

Le résultat annoncé repose sur les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors, pour tout $\rho > 0$ tel que $\rho < \delta(E)$, il existe une partie $D \subset E$ vérifiant les deux propriétés suivantes*:

1. *$d(x, y) \geq \rho$ pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de D.*
2. *$E = \bigcup_{x\in D} B(x, \rho)$.*

Preuve. Soit $\mathscr{D} = \{A \subset E$ telle que A vérifie la propriété 1$\}$. Il est évident que la famille $\mathscr{D}$ n'est pas vide et qu'elle est inductive quand elle est ordonnée par inclusion. D'après le lemme de Zorn ([2]), elle admet un élément maximal D qui vérifie bien sûr la propriété 1. En vertu de sa maximalité, D possède aussi la propriété 2. $\square$

LEMME 2. *Soit (E, d) un espace métrique et $D \subset E$. Si $g : D \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne de rapport k, il existe un prolongement $\bar{g}$ de g à E, lipschitzien de même rapport.*

Preuve. Pour tout $y \in D$, soit $g_y : E \to \mathbb{R}$ telle que $g_y(x) = g(y) + kd(x, y)$. On

Reçu par la redaction le 29 novembre 1983.

AMS Subject Classification Numbers: 54C30 Real valued functions on a metric space; 28A32 Weak convergence of measures.

pose $\bar{g}=\inf_{y\in D} g_y$. Si y, $z\in D$, on a

$$g_y(x)-g_z(x)=g(y)-g(z)+kd(x, y)-kd(x, z)\geq -2kd(x, z).$$

D'où, pour tout $z\in D$ et tout $x\in E$, $\bar{g}(x)\geq g_z(x)-2kd(x, z)$. En particulier, si $x=z\in D$, $g(x)=g_x(x)\geq \bar{g}(x)\geq g_x(x)-2kd(x, x)=g(x)$. $\bar{g}$ est donc un prolongement de g. D'autre part, pour tous x, $z\in E$ et $y\in D$, on a

$$g_y(x)-g_y(z)=kd(x, y)-kd(z, y)\leq kd(x, z).$$

D'où $\bar{g}(x)-\bar{g}(z)\leq kd(x, z)$ et, par symétrie, $|\bar{g}(x)-\bar{g}(z)|\leq kd(x, z)$. □

THEOREME 3. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors, toute fonction f bornée et uniformément continue sur E est limite uniforme d'une suite de fonctions lipschitziennes sur E.*

Preuve. Posons $M=\sup_{x\in E}|f(x)|$ et soit $\varepsilon>0$. Il existe $\delta>0$ tel que $d(x, y)\leq\delta$ implique $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon/2$. Soit $0<\rho<\inf\{\delta, \varepsilon\delta/4M, \delta(E)\}$, D une partie de E associée à ρ comme dans le lemme 1 et $g=f\mid D$.

Montrons que $g: D\to\mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport $k=\max\{2M/\delta, \varepsilon/2\rho\}$.

Soit x, $y\in D$ tels que $x\neq y$. On sait que $d(x, y)\geq\rho$.

Si $d(x, y)\leq\delta$, alors $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon/2=\varepsilon/2\rho\ \rho\leq kd(x, y)$.

Si $d(x, y)>\delta$, alors $|f(x)-f(y)|\leq 2M=2M/\delta\ \delta\leq kd(x, y)$.

Considérons maintenant le prolongement $\bar{g}$ associé à g comme dans le lemme 2.

$\bar{g}$ est lipschitzienne de rapport k et coïncide avec f sur D. Remarquons que $k\rho\leq\varepsilon/2$.

Soit maintenant $x\in E$. Il existe $y\in D$ tel que $d(x, y)\leq\rho\leq\delta$. Alors

$$\begin{aligned}|\bar{g}(x)-f(x)|&\leq|\bar{g}(x)-\bar{g}(y)|+|\bar{g}(y)-f(x)|=|\bar{g}(x)-\bar{g}(y)|+|f(y)-f(x)|\\&\leq kd(x, y)+\frac{\varepsilon}{2}\leq k\rho+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi $\sup_{x\in E}|\bar{g}(x)-f(x)|\leq\varepsilon$. □

COROLLAIRE 4. *Soit (E, d) un espace métrique, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de E, P_n et P des probabilités sur $(E, \mathcal{B})$. Pour que la suite (P_n) converge étroitement vers P il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int f\,dP=\lim_{n\to\infty}\int f\,dP_n$$

pour toute fonction f bornée et lipschitzienne sur E.

Preuve. Cela découle immédiatement du théorème 3 et du théorème 2.1 de [1]. □

https://doi.org/10.4153/CMB-1984-082-3 Published online by Cambridge University Press

References

1. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, 1968.
2. E. Hewitt et K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, 1969.

Département de Mathématiques
Universite Claude Bernard-Lyon 1
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex
France

https://doi.org/10.4153/CMB-1984-082-3 Published online by Cambridge University Press