ESPACES HOMOGÈNES DE STEIN DES GROUPES DE LIE COMPLEXES

YOZÔ MATSUSHIMA

Introduction

A. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K respectivement. $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre réelle de l'algèbre complexe $\mathfrak{g}$. Soit $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$ $(i^2 = -1)$. Alors $\tilde{\mathfrak{k}}$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}$. Soit $\tilde{K}$ le sous-groupe de Lie complexe et connexe de G correspondant à $\tilde{\mathfrak{k}}$. Dans cet article nous démontrerons d'abord le théorème suivant qui est un analogue analytique du théorème de Cartan-Malcev-Iwasawa (cf. [8]).

Théorème 1. *La variété d'un groupe de Lie complexe et connexe G est holomorphiquement homéomorphe à la variété $C^l \times \tilde{K}$, C^l désignant l'espace numérique complexe de dimension complexe l.*

Un groupe de Lie complexe G sera dit un *groupe de Stein*, si la variété de G est une variété de Stein. Dans le mémoire [10] nous avons donné une condition algébrique pour qu'un groupe de Lie complexe et connexe soit un groupe de Stein. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G. G est de Stein si et seulement si $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$, $\mathfrak{k}$ désignant la sous-algèbre réelle de l'algèbre de Lie complexe de G correspondant à K (voir [10], Théorème 1). Alors le sous-groupe $\tilde{K}$ de G défini ci-dessus est le complexifié de K. (Nous dirons qu'un groupe de Lie complexe et connexe H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal L de H, si l'on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + i \cdot \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l} \cap i \cdot \mathfrak{l} = (0)$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{l}$ désignant les algèbres de Lie de H et L respectivement.) D'après des résultats de Chevalley, la variété d'un groupe de Lie complexe et connexe qui est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal est une variété algébrique affine complexe (voir [2], Chapitre VI et l'appendice de cet article). Il résulte de là et du théorème 1 le théorème suivant.

Received January 30, 1960.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007662 Published online by Cambridge University Press

Théorème 2. *La variété d'un groupe de Stein connexe est une variété algébrique affine complexe.*

Remarque. Par le raisonnement ci-dessus, on retrouve que si $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$, la variété de G est une variété algébrique affine complexe et donc une variété de Stein. C'est une partie du théorème 1 de [10] (cf. la remarque 2 à la fin de cet article).

B. Dans le mémoire [10] nous avons démontré le théorème suivant: Soit $P(B, G)$ un espace fibré principal holomorphe dont la variété P est une variété de Stein et dont le groupe structural G est connexe et le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de G. Alors la base B est aussi une variété de Stein (voir [10], Théorème 5).

Nous obtenons immédiatement de ce théorème le résultat suivant: *Soit G un groupe de Stein et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G. Si H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H, l'espace quotient G/H est une variété de Stein.*

Dans cet article nous démontrerons que, si G est semi-simple, la réciproque est aussi vraie. Nous démontrerons, en effet, le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G. Si l'espace quotient G/H est une variété de Stein, H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H.*

D'autre part, Iwahori et Sugiura ont démontré récemment le théorème suivant en généralisant les raisonnements de Chevalley dans le chapitre VI de [2]: Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G. Si H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H, l'espace quotient G/H est une variété algébrique affine complexe (voir [7]).

Nous obtenons de ce théorème d'Iwahori-Sugiura et du théorème 3 le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G. Si l'espace quotient G/H est une variété de Stein, c'est une variété algébrique affine complexe.*

A. Structure analytique des variétés des groupes de Lie complexes

1. Pour démontrer le théorème 1, montrons d'abord que $\tilde{K}$ est fermé dans G. Le lemme suivant est dû à Goto [4].

Lemme 1. *Soit G un groupe de Lie connexe et soit H un sous-groupe de Lie connexe de G. Si H n'est pas fermé dans G, il existe un sous-groupe à un paramètre L de H tel que la fermeture $\bar{L}$ de L ne soit pas contenue dans H. De plus, H est un sous-groupe invariant de $\bar{H}$, $\bar{H}$ désignant la fermeture de H.*

Lemme 2. *Soit G un groupe de Lie connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soit H un sous-groupe de Lie connexe de G contenant K. Alors H est fermé dans G.*

Soit $\bar{H}$ la fermeture de H. Supposons $\bar{H} \neq H$. Il existe alors un sous-groupe à un paramètre L de H tel que la fermeture $\bar{L}$ de L ne soit pas contenue dans H (Lemme 1). $\bar{L}$ est un sous-groupe fermé connexe abélien de $\bar{H}$ de dimension >1. L étant partout dense dans $\bar{L}$, $\bar{L}$ doit être compact. K étant un sous-groupe compact maximal de $\bar{H}$, il existe un élément x de $\bar{H}$ tel que $\bar{L} \subset xKx^{-1}$ (cf. [8]). Alors $\bar{L} \subset xKx^{-1} \subset xHx^{-1}$. H étant invariant dans $\bar{H}$ d'après le lemme 1, on a $xHx^{-1} = H$ et par suite $\bar{L} \subset H$. Cette contradiction montre que $\bar{H} = H$ et par suite H est fermé dans G.

Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soit $\tilde{K}$ le sous-groupe de Lie complexe et connexe de G correspondant à la sous-algèbre complexe $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$ de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ de G, $\mathfrak{k}$ désignant la sous-algèbre réelle de $\mathfrak{g}$ correspondant à K.

Lemme 3. *Le groupe $\tilde{K}$ est fermé dans G et l'espace quotient $G/\tilde{K}$ est simplement connexe.*

$\tilde{K}$ est fermé d'après le lemme 2. On sait que l'espace quotient G/K est homéomorphe à un espace euclidien [8]. G/K est un espace fibré de base $G/\tilde{K}$ et de fibre $\tilde{K}/K$. La fibre $\tilde{K}/K$ étant connexe, la base $G/\tilde{K}$ est simplement connexe.

Lemme 4. *Les notations étant comme ci-dessus, la variété complexe $G/\tilde{K}$ est isomorphe à la variété complexe C^l $(l \geqq 0)$.*

Nous démontrons le lemme 4 par récurrence sur la dimension complexe

https://doi.org/10.1017/S0027763000007662 Published online by Cambridge University Press

de G. Si la dimension complexe de G est égale à 1, le lemme 4 est trivialement vérifié. Supposons donc que le lemme 4 soit démontré pour les groupes de Lie complexes et connexes de dimension complexe plus petite que n. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe de dimension complexe n. Si G est semi-simple, on a $G = \widetilde{K}$ et il ne reste plus à démontrer. Nous supposons donc que G ne soit pas semi-simple. Supposons d'abord que G soit abélien. D'après le lemme 3, le groupe quotient $G/\widetilde{K}$ est simplement connexe. Il en résulte immédiatement que $G/\widetilde{K}$ est isomorphe à C^l. Nous supposons donc que G ne soit pas abélien. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal réel abélien maximal de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{a}$ est un idéal complexe. En effet, soit $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} + i \cdot \mathfrak{a}$. Alors $\tilde{\mathfrak{a}}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ étant un idéal abélien maximal de $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}$, ce qui montre que $\mathfrak{a}$ est un idéal complexe. Soit A le sous-groupe de Lie complexe et connexe de G correspondant à $\mathfrak{a}$. Alors A est fermé dans G. En effet, soit $\bar{A}$ la fermeture de A. Alors $\bar{A}$ est un sous-groupe invariant, abélien, connexe et fermé de G. Alors la sous-algèbre $\bar{\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{g}$ correspondant à $\bar{A}$ est un idéal réel abélien de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$. Par suite on a $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, ce qui entraîne $\bar{A} = A$. A est donc fermé. Puisque G n'est pas semi-simple, la dimension de A est positive et puisque G n'est pas abélien, A est différent de G. Soit $G' = G/A$ et soit π la projection canonique de G sur G'. Alors l'image $\pi(K)$ de K est un sous-groupe compact maximal de G' [8]. Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie de G' et soit π' la projection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$. Alors $\pi'(\mathfrak{k})$ est l'algèbre de $\pi(K)$. On voit alors que l'algèbre de $\pi(\widetilde{K})$ est égale à $\pi'(\mathfrak{k}) + i \cdot \pi'(\mathfrak{k})$. La dimension complexe de G' étant plus petite que n, d'après l'hypothèse de récurrence, $G'/\pi(\widetilde{K})$ est isomorphe à C^s. L'image inverse de $\pi(\widetilde{K})$ dans G étant $A\widetilde{K}$, le sous-groupe $A\widetilde{K}$ est fermé dans G et la variété $G'/\pi(\widetilde{K})$ est isomorphe à la variété $G/A\widetilde{K}$. Par suite, la variété $G/A\widetilde{K}$ est isomorphe à C^s. D'autre part, $G/\widetilde{K}$ est un espace fibré holomorphe de base $G/A\widetilde{K}$ et de fibre $A\widetilde{K}/\widetilde{K}$. La base $G/A\widetilde{K}$ étant isomorphe à C^s, il résulte d'un théorème de Cartan-Grauert (voir [5] et [6]) que cette fibration est holomorphiquement triviale. Par conséquent, $G/\widetilde{K}$ est isomorphe à $C^s \times (A\widetilde{K}/\widetilde{K})$. Supposons d'abord que $G \neq A\widetilde{K}$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que $A\widetilde{K}/\widetilde{K}$ est isomorphe à C^t. Alors $G/\widetilde{K}$ est isomorphe à C^{s+t}. Supposons maintenant que $G = A\widetilde{K}$. Alors A opère holomorphiquement et transitivement sur $G/\widetilde{K}$ et le groupe d'isotropie est égal à $A \cap \widetilde{K}$. Par suite, la variété $G/\widetilde{K}$ est isomorphe à la variété du-

https://doi.org/10.1017/S0027763000007662 Published online by Cambridge University Press

groupe abélien complexe et connexe $A/A \cap \widetilde{K}$. D'après le lemme 3, $G/\widetilde{K}$ est simplement connexe et par suite $A/A \cap \widetilde{K}$ l'est aussi. $A/A \cap \widetilde{K}$ étant un groupe de Lie complexe abélien, il en résulte immédiatement que $A/A \cap \widetilde{K}$ est isomorphe à C^l. Par conséquent, la variété $G/\widetilde{K}$ est isomorphe à C^l et le lemme 4 est établi.

Démonstration du théorème 1. G est un espace fibré principal holomorphe de base $G/\widetilde{K}$ et de groupe structural $\widetilde{K}$. La base $G/\widetilde{K}$ étant isomorphe à C^l (Lemme 4), cette fibration est holomorphiquement triviale d'après un théorème de Cartan-Grauert ([5] et [6]). Par suite, la variété de G est isomorphe au produit $C^l \times \widetilde{K}$. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Le théorème 2 résulte du théorème 1 et de la proposition dans l'appendice de cet article, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction.

2. Concernant la structure du groupe $\widetilde{K}$ nous démontrons ici la proposition suivante. Nous utiliserons les notations introduites au paragraphe 1.

PROPOSITION. *Il existe des sous-groupes de Lie complexes, connexes, fermés et invariants* $\widetilde{S}$ *et* $\widetilde{Z}$ *de* $\widetilde{K}$ *satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) $\widetilde{K} = \widetilde{S} \cdot \widetilde{Z}$ *et* $\widetilde{S} \cap \widetilde{Z}$ *est un groupe fini;*

2) $\widetilde{S}$ *est semi-simple;*

3) $\widetilde{Z}$ *est le centre connexe de* $\widetilde{K}$ *et isomorphe à un groupe quotient de* C^{*m} *par un sous-groupe fermé isomorphe à* C^s, C^{*m} *désignant le produit des* m *groupes isomorphes au groupe multiplicatif* C^* *des nombres complexes* $\neq 0$*;*

4) *on a* $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$, *si et seulement si* $\widetilde{Z} \cong C^{*m}$.

$\mathfrak{k}$ étant l'algèbre de Lie du groupe compact K, $\mathfrak{k}$ se décompose $\mathfrak{k} = \mathfrak{s} + \mathfrak{z}$ (somme directe), où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{s} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ est l'idéal semi-simple de $\mathfrak{k}$. Soient $\tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s} + i \cdot \mathfrak{s}$ et $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} + i \cdot \mathfrak{z}$. On voit facilement que $\tilde{\mathfrak{s}}$ est un idéal semi-simple de $\tilde{\mathfrak{k}}$ et $\tilde{\mathfrak{z}}$ est dans le centre de $\tilde{\mathfrak{k}}$. On a $\tilde{\mathfrak{s}} \cap \tilde{\mathfrak{z}} = (0)$, car $\tilde{\mathfrak{s}} \cap \tilde{\mathfrak{z}}$ est dans le centre de $\tilde{\mathfrak{s}}$ et car $\tilde{\mathfrak{s}}$ est semi-simple. Alors $\tilde{\mathfrak{k}} = \tilde{\mathfrak{s}} + \tilde{\mathfrak{z}}$ (somme directe) et $\tilde{\mathfrak{z}}$ est le centre de $\tilde{\mathfrak{k}}$. On va montrer que $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{z} \cap i \cdot \mathfrak{z}$. Soit φ la représentation adjointe de $\tilde{\mathfrak{k}}$ et soit n la dimension complexe de $\tilde{\mathfrak{k}}$. Alors $\varphi(\tilde{\mathfrak{k}}) \subset \mathfrak{gl}(n, C)$, $\mathfrak{gl}(n, C)$ désignant l'algèbre de Lie des matrices de degré n à coefficients complexes. K étant compact, on peut supposer que $\varphi(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$ désignant l'algèbre de Lie du groupe unitaire $U(n)$. Alors $\varphi(\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k}) \subset \mathfrak{u}(n) \cap i \cdot \mathfrak{u}(n)$. On voit facilement que $\mathfrak{u}(n) \cap i \cdot \mathfrak{u}(n) = (0)$. Alors $\varphi(\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k}) = 0$, ce qui

https://doi.org/10.1017/S0027763000007662 Published online by Cambridge University Press

entraine que $\mathfrak{k}\cap i\cdot\mathfrak{k}\subset\tilde{\mathfrak{z}}$. Alors $\mathfrak{k}\cap i\cdot\mathfrak{k}=(\mathfrak{k}\cap\tilde{\mathfrak{z}})\cap i\cdot(\mathfrak{k}\cap\tilde{\mathfrak{z}})$. Soit $X\in\mathfrak{k}\cap\tilde{\mathfrak{z}}$ et soit $X=Y+Z$, $Y\in\mathfrak{s}$, $Z\in\mathfrak{z}$. Puisque $X\in\tilde{\mathfrak{z}}$, X s'écrit $X=X_1+i\cdot X_2$, X_1, $X_2\in\mathfrak{z}$. Alors $Y=(X_1-Z)+i\cdot X_2\in\tilde{\mathfrak{s}}\cap\tilde{\mathfrak{z}}$. Puisque $\tilde{\mathfrak{s}}\cap\tilde{\mathfrak{z}}=(0)$, on a $Y=0$ et par suite $X\in\mathfrak{z}$. On a donc $\mathfrak{k}\cap\tilde{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z}$ et par suite $\mathfrak{k}\cap i\cdot\mathfrak{k}=\mathfrak{z}\cap i\cdot\mathfrak{z}$. Il en résulte que $\mathfrak{s}\cap i\cdot\mathfrak{s}=(0)$. Soient $\tilde{S}$ et $\tilde{Z}$ les sous-groupes de Lie connexes de $\tilde{K}$ correspondant aux idéaux $\tilde{\mathfrak{s}}$ et $\tilde{\mathfrak{z}}$ de $\tilde{\mathfrak{k}}$ respectivement. Puisque $\tilde{\mathfrak{k}}=\tilde{\mathfrak{s}}+\tilde{\mathfrak{z}}$, on a $\tilde{K}=\tilde{S}\cdot\tilde{Z}$. Le groupe $\tilde{S}\cap\tilde{Z}$ étant dans le centre de $\tilde{S}$ et le centre d'un groupe complexe semi-simple connexe étant fini, $\tilde{S}\cap\tilde{Z}$ est un groupe fini. On va montrer que $\tilde{S}$ et $\tilde{Z}$ sont fermés dans $\tilde{K}$. Pour cela, soit $\hat{K}=\tilde{S}\times\tilde{Z}$ et soit α l'homomorphisme de $\hat{K}$ sur $\tilde{K}$ défini par $\alpha(x, y)=x\cdot y(x\in\tilde{S}, y\in\tilde{Z})$. $\tilde{S}\cap\tilde{Z}$ étant fini, le noyau de α est fini. Il en résulte que l'image par α d'un sous-ensemble fermé de $\hat{K}$ est fermée dans $\tilde{K}$. En particulier, $\tilde{S}$ et $\tilde{Z}$ sont fermés dans $\tilde{K}$. Soit Z le sous-groupe de Lie connexe de $\tilde{Z}$ correspondant à $\mathfrak{z}$. Alors Z est le sous-groupe compact maximal de $\tilde{Z}$, car $\mathfrak{z}=\mathfrak{k}\cap\tilde{\mathfrak{z}}$. Soit m la dimension réelle de $\mathfrak{z}$ et soit s la dimension complexe de $\mathfrak{k}\cap i\cdot\mathfrak{k}=\mathfrak{z}\cap i\cdot\mathfrak{z}$. Nous allons montrer que $\tilde{Z}$ est isomorphe à un groupe quotient de C^{*m} par un sous-groupe fermé isomorphe à C^s. Soit t la dimension complexe de $\tilde{Z}$ et soit $\tilde{Z}=A/D$, A désignant un espace vectoriel complexe de dimension complexe t et D désignant un sous-groupe discret de A. On voit facilement que $t=m-s$. La dimension réelle du groupe compact maximal Z de $\tilde{Z}$ étant égale à m, D est un groupe abélien libre à m générateurs libres. Soient $d_1, \ldots, d_m$ des générateurs libres de D. Alors $d_1, \ldots, d_m$ sont linéairement indépendants sur les nombres réels. Soit B le sous-espace vectoriel réel de A engendré par $d_1, \ldots, d_m$. Alors $D\subset B$ et l'image de B dans $\tilde{Z}$ est égale à Z. Puisque $\tilde{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z}+i\cdot\mathfrak{z}$, on a $A=B+i\cdot B$. Soit B^C la complexification de l'espace vectoriel réel B. Alors B^C est un espace vectoriel complexe de dimension complexe m et on peut identifier B avec un sous-espace vectoriel réel de B^C. Alors $d_1, \ldots, d_m$ constitue une base complexe de B^C et D est un sous-groupe discret de B^C. Puisque $A=B+i\cdot B$, il existe l'application linéaire complexe canonique θ de B^C sur A telle que $\theta(x)=x$ pour tout $x\in B$. Alors θ induit l'homomorphisme η de $\tilde{L}=B^C/D$ sur $\tilde{Z}=A/D$. Le sous-groupe compact maximal L de $\tilde{L}$ étant B/D, L est appliqué par η isomorphiquement sur Z. Soit N le noyau de η et soit N_0 la composante connexe de l'élément neutre de N. Alors $L\cap N=(e)$. Il en résulte que N_0 est simplement connexe et donc isomorphe à C^l. Nous allons montrer que

$N=N_0$. Soit ψ l'homomorphisme canonique de $\tilde{L}/N_0$ sur $\tilde{Z}$. LN_0/N_0 est le sous-groupe compact maximal de $\tilde{L}/N_0$ et ce groupe est appliqué par ψ isomorphiquement sur Z. N/N_0 est un sous-groupe discret de $\tilde{L}/N_0$ et égal au noyau de ψ. N/N_0 est fini, sinon la dimension du groupe compact maximal Z de $\tilde{Z}$ serait plus grande que celle de LN_0/N_0. Il en résulte que $N/N_0 \subset LN_0/N_0$ et par suite $N \subset LN_0$. Soit $x \in N$ et soit $x=y \cdot z$, $y \in L$, $z \in N_0$. Alors $z^{-1} \cdot x = y \in N \cap L$. Puisque $N \cap L = (e)$, on a $y=e$ et par suite $x=z \in N_0$. On a donc démontré que $N=N_0$ et $N \cong C^l$. La dimension complexe de $\tilde{L}/N$ (resp. de $\tilde{Z}$) étant égale à $m-l$ (resp. $m-s$) et $\tilde{L}/N \cong \tilde{Z}$, on a $l=s$. s étant la dimension complexe de $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k}$, on a $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$, si et seulement si $\tilde{L} \cong \tilde{Z}$. On va montrer maintenant que $\tilde{L} \cong C^{*m}$. $d_1, \ldots, d_m$ étant une base complexe de B^C, tout élément x de B^C s'écrit $x = z_1 \cdot d_1 + \cdots + z_m \cdot d_m$ $(z_i \in C)$. Soit φ l'homomorphisme de B^C sur C^{*m} défini par $\varphi(x) = (\exp 2\pi i \cdot z_1, \ldots, \exp 2\pi i \cdot z_m)$. Alors le noyau de φ est égal à D. Par conséquent, φ définit un isomorphisme de $\tilde{L} = B^C/D$ sur C^{*m}. La proposition est ainsi démontrée.

B. Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes semi-simples

1. Soit V une variété complexe et soit $\mathbf{A}^p$ l'espace vectoriel complexe des p-formes différentielles holomorphes sur V et soit $\mathbf{Z}^p$ le sous-espace de $\mathbf{A}^p$ des p-formes fermées. Soit $H^p(V, \mathbf{A}) = \mathbf{Z}^p/d\mathbf{A}^{p-1}$ $(p=0, 1, 2, \ldots)$.

LEMME 5. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe de dimension complexe n. Alors $H^n(G, \mathbf{A}) \neq (0)$.*

Soit K un sous-groupe compact maximal de G. On sait que G est le complexifié de K. Désignons par L_a la translation à gauche de G par un élément a de G. Soit dg la mesure de Haar sur le groupe compact K dont la mesure totale est égale à 1. Pour toute p-forme holomorphe ω sur G, soit

$$I(\omega) = \int_K L_g^* \cdot \omega \, dg.$$

Alors $I(\omega)$ est une p-forme holomorphe et $dI(\omega) = I(d\omega)$ et $L_g^* \cdot I(\omega) = I(\omega)$ pour tout $g \in K$. Nous allons montrer que $L_a^* \cdot I(\omega) = I(\omega)$ pour tout $a \in G$. On peut choisir un voisinage ouvert U de l'élément neutre e de G satisfaisant aux conditions suivantes: Il existe un système de coordonnées locales $(z_1,$

https://doi.org/10.1017/S0027763000007662 Published online by Cambridge University Press

$\ldots, z_n)$ de G dans U tel que le sous-ensemble des points x de U ayant les coordonnées $z_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ toutes réelles soit égal à $U\cap K$. Soit V un voisinage ouvert de e tel que $V^2\subset U$. Soit $I(\omega)=\eta$. Si $a, z\in V$, $L_a^*\cdot\eta$ s'ecrit

$$L_a^*\cdot\eta=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\eta_{i_1\cdots i_p}(a, z)\,dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p},$$

où $\eta_{i_1\cdots i_p}(a, z)$ sont des fonctions holomorphes sur $V\times V$. Fixons le point $z\in V$. Si $a\in V\cap K$, on a $L_a^*\cdot\eta=\eta$ et par suite $\eta_{i_1\cdots i_p}(a, z)=\eta_{i_1\cdots i_p}(e, z)$ pour tout $a\in V\cap K$. Les fonctions $\eta_{i_1\cdots i_p}(a, z)$ étant des fonctions holomorphes de $a\in V$ et $V\cap K$ étant l'ensemble des points de V dont les coordonnées sont toutes réelles, il résulte de ce que nous avons montré que $\eta_{i_1\cdots i_p}(a, z)=\eta_{i_1\cdots i_p}(e, z)$ pour tout $a\in V$. Par conséquent, on a $L_a^*\cdot\eta=\eta$ *dans* V pour tout $a\in V$. Les p-formes $L_a^*\cdot\eta$ et η étant holomorphes, on a $L_a^*\cdot\eta=\eta$ dans G tout entier pour tout $a\in V$. D'autre part, G étant connexe, tout élément a de G s'ecrit $a=a_1\cdots a_k$ avec $a_i\in V$. Par suite, on a $L_a^*\cdot\eta=\eta$ pour tout $a\in G$.

Soit maintenant $\mathbf{I}^p$ l'espace vectoriel complexe des p-formes holomorphes sur G invariantes à gauche et soit $\mathbf{K}^p$ le sous-espace de $\mathbf{I}^p$ des p-formes fermées. Soit

$$H^p(G, \mathbf{I})=\mathbf{K}^p/d\mathbf{I}^{p-1}.$$

On a $H^n(G, \mathbf{I})=C$, car $H^n(G, \mathbf{I})$ est isomorphe à l'espace de cohomologie de dimension n de l'algèbre de Lie de G (voir [9]). L'application identique j de $\mathbf{I}^p$ dans $\mathbf{A}^p$ induit un homomorphisme $j^*: H^p(G, \mathbf{I})\to H^p(G, \mathbf{A})$. L'homomorphisme j^* est injectif. En effet, soit $\omega\in\mathbf{K}^p$ et soit $\omega=d\eta$, $\eta\in\mathbf{A}^{p-1}$. Alors $\omega=I(\omega)=I(d\eta)=dI(\eta)$ et $I(\eta)\in\mathbf{I}^{p-1}$, ce qui montre que j^* est injectif. Alors $j^*\cdot H^n(G, \mathbf{I})\cong C$ et $j^*\cdot H^n(G, \mathbf{I})\subset H^n(G, \mathbf{A})$ et par suite $H^n(G, \mathbf{A})\neq(0)$.

LEMME 6. *Soit V_1 une variété complexe isomorphe à C^1 et soit V_2 une variété complexe de dimension complexe m. On a alors $H^{m+1}(V_1\times V_2, \mathbf{A})=(0)$.*

Soit $\{U_i, i\in I\}$ un recouvrement ouvert de V_2 tel que dans chaque U_i, il existe un système de coordonnées locales de V_2. Soit θ une $(m+1)$-forme holomorphe sur $V_1\times V_2$. Soit w une coordonnée globale de $V_1(\cong C^1)$. Soit $(z_1, \ldots, z_m)$ un système de coordonnées locales dans U_i. Alors θ s'ecrit dans $V_1\times U_i$ sous la forme $\theta=f_i(w, z_1, \ldots, z_m)\,dw\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_m$, où $f_i(w, z)$ est une fonction holomorphe dans $V_1\times U_i$. Soit $g_i(w, z)=\int_0^w f_i(\zeta, z)\,d\zeta$ et soit $\eta_i=g_i(w, z)\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_m$. Alors η_i est une m-forme holomorphe définie dans

https://doi.org/10.1017/S0027763000007662 Published online by Cambridge University Press

$V_1 \times U_i$ $(i \in I)$ et on a $d\eta_i = \theta$ dans $V_1 \times U_i$. On voit facilement que $\eta_i = \eta_j$ dans $V_1 \times (U_i \cap U_j)$ $(i, j \in I)$. Il existe alors une m-forme holomorphe η sur $V_1 \times V_2$ telle que $\eta = \eta_i$ dans $V_1 \times U_i$ pour tout $i \in I$. Alors $\theta = d\eta$, ce qui montre que $H^{m+1}(V_1 \times V_2, \mathbf{A}) = (0)$.

LEMME 7. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit A un sous-groupe fermé complexe de G isomorphe à C^l $(l \geqq 1)$. Alors l'espace quotient G/A n'est pas une variété de Stein.*

Supposons que G/A soit une variété de Stein et nous en déduirons une contradiction. G est un espace fibré principal holomorphe de base G/A et de groupe structural A. Soit $\mathbf{F}$ le faisceau sur G/A des germes d'applications holomorphes de G/A dans A. A étant isomorphe à C^l, le faisceau $\mathbf{F}$ est analytique cohérent. Puisque nous avons supposé que G/A soit de Stein, on a $H^1(G/A, \mathbf{F}) = (0)$ d'après le "Théorème B" de H. Cartan [1], ce qui montre que tout espace fibré principal holomorphe de base G/A et de groupe structural A est holomorphiquement trivial. En particulier, la variété complexe G est isomorphe à la variété complexe $A \times (G/A)$. A étant isomorphe à C^l, il résulte de là et du lemme 6 que $H^n(G, \mathbf{A}) = (0)$, n étant la dimension complexe de G. D'autre part, on a $H^n(G, \mathbf{A}) \neq (0)$ d'après le lemme 5. Cette contradiction montre que G/A n'est pas une variété de Stein.

2. LEMME 8. *Soit G un groupe de Lie complexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G. Soit R le radical de H. Alors pour que l'espace quotient G/H soit une variété de Stein, il faut et il suffit que l'espace quotient G/R est une variété de Stein.*

L'espace quotient G/R est un espace fibré principal holomorphe de base G/H et de groupe structural H/R. Le groupe H/R étant semi-simple, H/R est une variété de Stein (cf. [10]). Si G/H est une variété de Stein, G/R l'est aussi d'après [10], Théorème 4. Si G/R est une variété de Stein, G/H l'est aussi d'après [10], Théorème 5, car tout groupe complexe semi-simple connexe est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal. Le lemme 8 est ainsi établi.

LEMME 9. *Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe et soit R un sous-groupe résoluble, fermé, complexe et connexe de G. Soit $[R, R]$ le groupe dérivé de R. Alors $[R, R]$ est fermé dans G et simplement connexe. De plus,* *le groupe quotient $R/[R, R]$ est un groupe de Stein.*

On sait que G est isomorphe à un sous-groupe fermé complexe de $GL(n, C)$ pour certain n (cf. [10], Proposition 1 et l'appendice de cet article). On peut donc supposer que R soit un sous-groupe résoluble, fermé, complexe et connexe de $GL(n, C)$. Soit $\varDelta(n, C)$ le sous-groupe de $GL(n, C)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

et soit $N(n, C)$ le sous-groupe de $GL(n, C)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Lie, on peut supposer que $R \subset \varDelta(n, C)$. Alors $[R, R] \subset N(n, C)$. $N(n, C)$ étant nilpotent et simplement connexe, tout sous-groupe de Lie connexe de $N(n, C)$ est simplement connexe et fermé [3]. En particulier, $[R, R]$ est simplement connexe et fermé dans $N(n, C)$ et par suite fermé dans G. On va montrer que $R/[R, R]$ est un groupe de Stein. Le sous-groupe L de $\varDelta(n, C)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp i\theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp i\theta_n \end{pmatrix} \qquad (\theta_i \text{ étant réels})$$

est un sous-groupe compact maximal de $\varDelta(n, C)$. En prenant un groupe conjugué de R dans $\varDelta(n, C)$ au besoin, on peut supposer qu'un sous-groupe compact maximal K de R soit contenu dans L. On a alors $K = R \cap L$. Soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de R et K respectivement. Alors l'algèbre dérivée $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ est l'algèbre de $[R, R]$. On a $(\mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}) \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = (0)$, car les matrices dans $\mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$ sont toutes semi-simples et les matrices dans $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ sont toutes nilpotentes. Soit π la projection canonique de R sur $R/[R, R]$ et soit π' la projection canonique de $\mathfrak{r}$ sur $\mathfrak{r}/[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$. $[R, R]$ étant connexe, l'image $\pi(K)$ de K est un sous-groupe compact maximal de $R/[R, R]$ et $\pi'(\mathfrak{k})$ est son algèbre de Lie. Il résulte immédiatement de la relation $(\mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}) \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = (0)$ que $\pi'(\mathfrak{k})$

$\cap i \cdot \pi'(\mathfrak{k}) = (0)$. Alors $R/[R, R]$ est un groupe de Stein (voir la remarque dans l'introduction et [10], Théorème 1). Le lemme 9 est ainsi établi.

LEMME 10. *Les notations étant celles du lemme* 9, *supposons que l'espace quotient G/R soit une variété de Stein. Alors $G/[R, R]$ est aussi une variété de Stein.*

En effet, $G/[R, R]$ est un espace fibré principal holomorphe de base G/R et de groupe structural $R/[R, R]$. D'après le lemme 9, $R/[R, R]$ est un groupe de Stein. Donc, si la base G/R est une variété de Stein, $G/[R, R]$ l'est aussi ([10], Théorème 4). Le lemme 10 est ainsi démontré.

LEMME 11. *Les notations étant celles du lemme* 9, *supposons que l'espace quotient G/R soit une variété de Stein. Alors R est isomorphe au groupe C^{*m} pour certain entier $m \geqq 0$.*

Montrons d'abord que R est abélien. Supposons $[R, R] \neq (e)$ et nous en déduirons une contradiction. Définissons par récurrence $R_1 = [R, R]$, $R_2 = [R_1, R_1]$, $\ldots$, $R_i = [R_{i-1}, R_{i-1}]$. D'après le lemme 5, les sous-groupes R_i de G sont tous fermés dans G et simplement connexes. Utilisant le lemme 10 plusieurs fois, on voit que G/R_i $(i = 1, 2, \ldots)$ est une variété de Stein. R étant résoluble, il existe un entier $k \geqq 1$ tel que $R_k \neq (e)$ et $R_{k+1} = (e)$. Alors R_k est abélien et simplement connexe et par suite isomorphe à C^l $(l \geqq 1)$. Comme G/R_k est une variété de Stein, c'est une contradiction d'après le lemme 7. On a donc démontré que R est abélien. R étant fermé dans G et G étant une variété de Stein, R est aussi une variété de Stein. Alors R est isomorphe au groupe $C^n \times C^{*m}$ pour certains entiers $n, m \geqq 0$ ([10], Proposition 4). Soit $R = R_1 \times R_2$, où $R_1 \cong C^n$ et $R_2 \cong C^{*m}$. Alors G/R_1 est un espace fibré principal holomorphe de base G/R et de groupe R/R_1 $(\cong C^{*m})$. D'après le théorème 4 de [10], G/R_1 est une variété de Stain. D'après le lemme 7, on a alors $R_1 = (e)$ et par suite $R = R_2 \cong C^{*m}$. Le lemme 11 est donc établi.

LEMME 12. *Soit H un groupe de Lie complexe et connexe et soit R le radical de H. Si R est isomorphe au groupe C^{*m} $(m \geqq 0)$, R est le centre connexe de H.*

Soit K un sous-groupe compact maximal de R. R étant isomorphe à C^{*m}, R est abélien et le complexifié de K. Soient $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de H, R et K respectivement. Soient ψ et ψ' les représentations adjointes de H et de

$\mathfrak{h}$ respectivement. Le groupe K étant compact, il existe un sous-espace vectoriel complexe $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{h}=\mathfrak{m}+\mathfrak{r}$ (somme directe) et que $\psi(g)\cdot\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$ pour tout $g\in K$. Soit $X\in\mathfrak{k}$. Alors $\psi'(X)\cdot\mathfrak{m}=[X,\ \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$. D'autre part, $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}$ étant un idéal de $\mathfrak{h}$, on a $[X,\ \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{r}$ et part suite $[X,\ \mathfrak{m}]=(0)$. Puisque $\mathfrak{r}=\mathfrak{k}+i\cdot\mathfrak{k}$, on a $[Y,\ \mathfrak{m}]=(0)$ pour tout $Y\in\mathfrak{r}$. D'autre part, $\mathfrak{r}$ étant abélien, $[Y,\ \mathfrak{r}]=(0)$ pour tout $Y\in\mathfrak{r}$. Il en résulte que $\mathfrak{r}$ est contenu dans le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{h}$, car $\mathfrak{h}=\mathfrak{m}+\mathfrak{r}$. $\mathfrak{r}$ étant le radical de $\mathfrak{h}$, il est clair que $\mathfrak{r}\supset\mathfrak{z}$ et par suite $\mathfrak{r}=\mathfrak{z}$. R est donc le centre connexe de H.

Démonstration du théorème 3. Soit G un groupe de Lie complexe semisimple connexe et soit H un sous-groupe fermé, complexe et connexe de G. Supposons que l'espace quotient G/H soit une variété de Stein et soit R le radical de H. D'après le lemme 8, G/R est aussi une variété de Stein. Alors, d'après les lemmes 11 et 12, R est isomorphe au group C^{*m} et coïncide avec le centre connexe de H. Il en résulte immédiatement que H est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de H. Le théorème 3 est ainsi démontré.

Remarque 1. Les notations étant celles du théorème 3, soient K et L des sous-groupes compacts maximaux de G et H respectivement tels que $K\supset L$. On peut montrer facilement que l'espace quotient G/H est différentiablement homéomorphe au produit $(K/L)\times R^s$, R^s désignant l'espace numérique réel de dimension s ($s=n-m$, n et m étant les dimensions complexes de G et de H respectivement).

Remarque 2. Des propriétés de G que nous avons utilisé essentiellement dans la démonstration du théorème 3 sont les deux suivantes; a) G est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de G; b) G est isomorphe à un sous-groupe fermé de $GL(n,\ C)$ pour certain n. Mais on peut montrer que a) implique b) (cf. [2], Chapitre VI et l'appendice de cet article). Par conséquent, on peut démontrer le théorème 3 sous la condition un peu moins restrictive que G est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de G.

En particulier, le lemme 7 est valable pour les groupes isomorphes à C^{*m}. Alors le sous-groupe fermé $\tilde{Z}$ de $\tilde{K}$ dans la proposition de A, 2 est de Stein si et seulement si $\tilde{Z}$ est isomorphe à C^{*m}. Il résulte alors de la même proposition que, si G est de Stein, on a $\mathfrak{k}\cap i\cdot\mathfrak{k}=(0)$. Mais la démonstration originale de ce fait donnée dans [10] est plus simple et plus directe.

Appendice

Soit K un groupe de Lie compact. D'après Chevalley, nous pouvons associer à K un groupe de Lie complexe $M(K)$ satisfaisant aux conditions suivantes: 1) La variété de $M(K)$ est une variété algébrique affine complexe; 2) $M(K)$ est un groupe algébrique complexe; 3) il existe l'isomorphisme canonique de K sur un sous-groupe compact K' de $M(K)$; 4) si l'on désigne par K'_0 (resp. $M_0(K)$) la composante connexe de l'élément neutre de K' (resp. de $M(K)$), K'_0 est un sous-groupe compact maximal de $M_0(K)$ et $M_0(K)$ est le complexifié de K'_0 (voir [2], Chapitre VI).

Soit G un groupe de Lie complexe et connexe qui est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal K. Soit $M(K)$ le groupe de Lie complexe associé à K. K étant connexe, $M(K)$ l'est aussi. Il existe l'isomorphisme canonique φ de K sur un sous-groupe compact maximal K' de $M(K)$ et $M(K)$ est le complexifié de K'. Nous allons voir que l'isomorphisme φ peut être prolonger en un isomorphisme de G sur $M(K)$. Pour cela, il suffit de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION. *Soient G et G' des groupes de Lie complexes et connexes. Soient K et K' des sous-groupes compacts maximaux de G et G' respectivement. Supposons que G (resp. G') soit le complexifié de K (resp. de K'). Supposons, de plus, qu'il existe un isomorphisme φ de K sur K'. Alors nous pouvons prolonger φ en un isomorphisme de G sur G'.*

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de G et G'. Soient $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}'$ celles de K et K'. On a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} \cap i \cdot \mathfrak{k} = (0)$ et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + i \cdot \mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}' \cap i \cdot \mathfrak{k}' = (0)$. L'isomorphisme φ de K sur K' définit un isomorphisme φ' de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{k}'$. Soit $\hat{\varphi}'$ l'application de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$ définie par $\hat{\varphi}'(X + i \cdot Y) = \varphi'(X) + i \cdot \varphi'(Y)$. On voit facilement que $\hat{\varphi}'$ est un isomorphisme de l'algèbre complexe $\mathfrak{g}$ sur l'algèbre complexe $\mathfrak{g}'$. Soient $\hat{G}$ et $\hat{G}'$ les revêtements universels de G et G'. Alors $\hat{\varphi}'$ définit un isomorphisme $\hat{\varphi}$ de $\hat{G}$ sur $\hat{G}'$. Soit π (resp. π') la projection canonique de $\hat{G}$ sur G (resp. de $\hat{G}'$ sur G'). Soit D (resp. D') le noyau de π (resp. de π'). Nous allons montrer que $\hat{\varphi}(D) = D'$. Pour cela, soit $\hat{K}$ l'image inverse de K dans $\hat{G}$. On sait que l'espace quotient G/K est isomorphe à un espace euclidien [8] et par suite G est rétractile sur K. En particulier, tout chemin dans G joignant l'élément neutre et un point de K est homotope à un chemin dans K

https://doi.org/10.1017/S0027763000007662 Published online by Cambridge University Press

joignant les mêmes points. Il en résulte les faits suivants: $\hat{K}$ est connexe et le revêtement universel de K et $\hat{K}$ contient le noyau D de π. Soit maintenant $\hat{K}'$ l'image inverse de K' dans $\hat{G}'$. Par un raisonnement analogue, on voit que $\hat{K}'$ est connexe et le revêtement universel de K' et que $\hat{K}'$ contient D'. On voit facilement que $\hat{\varphi}(\hat{K}) = \hat{K}'$ et que $\pi'(\hat{\varphi}(x)) = \varphi(\pi(x))$ pour tout $x \in \hat{K}$. Soit $x \in D$. Alors $x \in \hat{K}$ et par suite $\pi'(\hat{\varphi}(x)) = \varphi(\pi(x)) = \varphi(e) = e$, ce qui montre que $\hat{\varphi}(x) \in D'$. Soit, réciproquement, $y \in D'$. Puisque $D' \subset \hat{K}'$ et puisque $\hat{\varphi}(\hat{K}) = \hat{K}'$, il existe un élément $x \in \hat{K}$ tel que $\hat{\varphi}(x) = y$. Alors $\varphi(\pi(x)) = \pi'(\hat{\varphi}(x)) = \pi'(y) = e$. φ étant un isomorphisme, on a $\pi(x) = e$ et par suite $x \in D$ et $y = \hat{\varphi}(x) \in \hat{\varphi}(D)$. On a donc démontré que $\hat{\varphi}(D) = D'$. L'isomorphisme $\hat{\varphi}$ de $\hat{G}$ sur $\hat{G}'$ définit alors un isomorphisme ψ de $G = \hat{G}/D$ sur $G' = \hat{G}'/D'$. Il est facile de voir que ψ est le prolongement de φ. La proposition est ainsi démontrée.

Il résulte de ce que nous avons montré les faits suivants: *Soit G un groupe de Lie complexe et connexe qui est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal. Alors la variété de G est une variété algébrique affine complexe et G est isomorphe à un groupe algébrique complexe.*

Bibliographie

[1] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes, C.B.R.M. (1953).

[2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press (1946).

[3] C. Chevalley, On the topological structure of solvable groups, Ann, of Math., **42** (1941).

[4] M. Goto, Faithful representations of Lie groups I, Math. Japonica, **1** (1948).

[5] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann., **134** (1958).

[6] H. Grauert, Analytic fibre bundles over holomorphically complete spaces, Seminars on analytic functions, Inst. Adv. Stud., (1958).

[7] N. Iwahori and M. Sugiura, On the complexification and the duality theorem for homogeneous manifolds, à paraître au Journ. Math. Soc. of Japan.

[8] K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math., **50** (1949).

[9] J. L. Koszul, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. de France, **78** (1950).

[10] Y. Matsushima et A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, à paraître au Bull. Soc. Math. de France.

Institut de Mathématiques,
Université de Nagoya