The preface underlines the fact that Gentzen's methods lead "naturally" to intuitionistic, and not to classical, logic. This fact will seem less significant if Gentzen's original intention was to reproduce intuitionistic logic. Kneale has recently pointed out (*The province of logic*, ***Contemporary British philosophy, Third series***) that "Gentzen's success in making intuitionistic logic look like something simpler and more basic than classical logic depends, as he himself admits, on the special forms of the rules he uses," and that certain rules yield the classical logic more "naturally" than the intuitionistic. JOHN VAN HEIJENOORT

GAISI TAKEUTI. *On a generalized logic calculus.* ***Japanese journal of mathematics***, Bd. 23 (1953), S. 39–96. *Errata*, ebd., Bd. 24 (1954), S. 149–156.

Nach Art des logistischen klassischen Kalküls *LK* von Gentzen (4422) wird ein Kalkül *GLK* für eine *unverzweigte Typenlogik* entwickelt. Der Kalkül enthält freie, gebundene und spezielle Variablen und Funktionen beliebiger mehrstelliger Typen $(n_1, \ldots, n_i)$ mit natürlichen Zahlen $n_1, \ldots, n_i$, wobei für die Argumente nur einstellige Typen zugelassen sind. Alle Funktionswerte gehören zum Grundtyp (0). Zur Bildung von *Formeln* hat man neben den aussagenlogischen Verknüpfungszeichen die Quantoren für alle Variablen- und Funktionstypen. *Mannigfaltigkeiten* beliebiger Typen entstehen aus Formeln, indem freie Variablen einstelliger Typen gebunden werden. *Herleitungen* werden wie bei Gentzen aus Sequenzen aufgebaut, und zwar mit den entsprechenden Grundsequenzen und Schlußregeln wie im Kalkül *LK*, wobei die Quantorenschlußregeln auf die verschiedenen Typen auszudehnen sind. Für den Kalkül *GLK* (der noch kein Unendlichkeitsaxiom enthält) hat man einen ähnlichen Widerspruchsfreiheitsbeweis, wie ihn Gentzen für die Stufenlogik angegeben hat (I 119). In *GLK* lassen sich mathematische Theorien darstellen, indem gewisse geschlossene Formeln (die keine freien Variablen und keine freien Funktionen enthalten) als *Axiome* hinzugenommen werden.

Metamathematische Untersuchungen: 1. Ein *Beschränkungssystem* wird als ein Formelsystem erklärt, das zu jedem Variablentyp und zu jedem Funktionstyp höchstens eine Formel $F(\alpha)$ enthält. In dieser soll außer der freien Variablen bzw. freien Funktion α des betreffenden Typs keine freie Variable oder Funktion vorkommen. Durch ein solches System wird der Variabilitätsbereich beschränkt, indem die Formeln und Formelbestandteile der Gestalt $\forall\varphi A(\varphi)$ bzw. $\exists\varphi A(\varphi)$ durch $\forall\varphi(\neg F(\varphi) \vee A(\varphi))$ bzw. $\exists\varphi(F(\varphi) \wedge A(\varphi))$ ersetzt werden, wobei $F(\varphi)$ entsprechend dem Typ von φ zu wählen ist. Für verschiedene Beschränkungssysteme, insbesondere für die durch Gleichheits- und Extensionalitätsaxiome $F(\alpha)$ gegebenen Beschränkungen, werden relative Widerspruchsfreiheitsbeweise geführt, die sich auf allgemeine Axiomensysteme und die hieraus durch Beschränkung entstandenen Systeme beziehen. 2. Es werden verschiedene Prozesse der *Typenerhöhung* erklärt und hierfür relative Widerspruchsfreiheitsbeweise geführt. 3. Die Prozesse der Beschränkung und der Typenerhöhung werden benutzt, um die widerspruchsfreie Einführung von *Mengen* und ʌon *Funktionen* in widerspruchsfreien Theorien nachzuweisen. Als Anwendungen ergeben sich für die Begründung der Mathematik die Sätze: (a) Sind die elementaren Gleichheits- und Nachfolgeraxiome in *GLK* widerspruchsfrei, so ist auch die Theorie der natürlichen Zahlen (mit der vollständigen Induktion) in *GLK* widerspruchsfrei. (b) Sind die elementaren Axione der Gleichheit, Anordnung, Addition und Multiplikation in *GLK* widerspruchsfrie so ist auch die Theorie der reellen Zahlen (als Mengen natürlicher Zahlen) in *GLK* widerspruchsfrei.

Ref. ist der Meinung, daß sich diese Ergebnisse grundsätzlich nicht zu Sätzen über absolute Widerspruchsfreiheit verschärfen lassen. Die Voraussetzungen der Sätze (a) und (b) beziehen sich nämlich auf formale Systeme mit unendlich vielen Grundelementen, dem vollen Tertium non datur und mit imprädikativen Begriffsbildungen Hierfür dürfte ein Widerpr uchsfreiheitsbeweis undurchführbar sein.

Das sieben Seiten lange Errata-Verzeichnis enthält noch nicht alle Druckfehler.

KURT SCHÜTTE

GAISI TAKEUTI. *Construction of ramified real numbers.* ***Annals of the Japan Association for Philosophy of Science,*** Bd. 1 Heft 1 (1956), S. 41–61.

Eine *geschichtete Analysis* läßt sich bekanntlich im Rahmen einer *verzweigten Typenlogik* entwickeln, und zwar unter Beschränkung auf einstellige Prädikatenvariablen beliebiger endlicher Schichten. Verf. legt einen solchen Logikkalkül zugrunde, der nach Art des Kalküls *LK* von Gentzen (442**2**) auf Sequenzen aufgebaut ist. Die Widerspruchsfreiheit ergibt sich wie bei Gentzen durch Schnittelimination, und zwar mit einer transfiniten Induktion bis ω^ω. Um die geschichtete Analysis in diesem Kalkül zu entwickeln, sind mathematische Grundsequenzen und die Schlußregel der vollständigen Induktion hinzuzunehmen. Die Widerspruchsfreiheit wird mit entsprechenden Reduktionen bewiesen, wie sie Gentzen zum Widerspruchsfreiheitsbeweis der reinen Zahlentheorie (IV 31) benutzt hat. Für die dabei anzuwendende transfinite Induktion wird das von Ackermann angegebene konstruktive System eines Abschnitts der zweiten Zahlenklasse (XVII 152) benutzt. Die reellen Zahlen, ihre Addition, Multiplikation, Anordnung und die obere Grenze einer beschränkten Menge reeller Zahlen lassen sich nun in bekannter Weise so definieren, daß die entsprechenden Grundgesetze ableitbar werden. Auf Grund relativer Widerspruchsfreiheitsbeweise, wie sie vom Verf. für seinen Kalkül *GLK* in Bezug auf Beschränkungsprozesse angegeben sind (vgl. vorstehendes Referat) ergibt sich nun die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems der Analysis, in dem die reellen Zahlen den Variabilitätsbereich bilden. Durch diesen letzten Schritt wird für die als widerspruchsfrei bekannte Analysis ein verhältnismäßig einfaches formales System gewonnen.

Die vorher durchgeführten Widerspruchsfreiheitsbeweise für die geschichtete Analysis bzw. für umfassendere Systeme (vgl. Lorenzen XVI 269, XVIII 261, Ref. XVIII 76, Ackermann XIX 295) sind nicht zitiert.

Errata. S. 49, Z. 4 links: Δ_1 statt Δ. S. 51, Z. 13: $x \cdot y^{-1}$ statt $x \cdot y$. S. 52, Z. 5: $\tilde{\Gamma}_\sigma \rightarrow$ statt $\Gamma_\sigma \rightarrow$. Z. 16: $\tilde{T}_1 \cong \tilde{T}_2$ statt $T_1 \cong T_2$. Z. 29: $\alpha^i \gtrsim \tilde{x}$ statt $\alpha^i \gtrsim x$. Z. 30: $\tilde{x} \gtrsim \alpha^i$ statt $x \gtrsim \alpha^i$. S. 53, Z. 7: $\tilde{T}_1 \mathbin{\tilde{+}} \tilde{T}_2$ statt $\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$. Z. 10: $\simeq \alpha^i$ statt $\approx \alpha^i$. Z. 11: $\tilde{0}$ statt 0. Z. 23: $0 < T_1$, $0 < T_2$ statt $\tilde{0} < T_1$, $\tilde{0} < T_2$. S. 55 Z. 13: $\tilde{u} \gtrsim \beta^j \vee \tilde{u} \cong \beta^j$ statt $u \gtrsim \beta^j \vee u \cong \beta^j$. S. 58, Z. 1: $(\forall x^1 A(x^1))\sim$ statt $(\forall x^i A(x^i))$. Z. 32: $x^i = z^k)$ statt $x^i = z^k$. S. 59, Z. 23: $0 < y^j$ statt $0 y^j$. Z.25: $x^i \times z^k$ statt $x^i + z^k$. S. 60, Z. 1: $\forall x^i$ statt $A x^i$.

KURT SCHÜTTE

ZYOITI SUETUNA. *Über den Begriff der Totalität in der Mathematik.* Ebd., S. 33–40.

Grundsätzliche Betrachtungen zur Begründung der klassischen Mathematik mit folgenden Grundgedanken: Die Totalität der *natürlichen Zahlen* entsteht, indem wir den Erzeugungsprozeß der fortgesetzten Addition von 1, der ohne Ende weitergeht, in seiner Gesamtheit überschauen. Das aus den rationalen Zahlen erzeugte *lineare Kontinuum,* mit dem die reellen Zahlen eingeführt werden, ist ein mathematischer Gegenstand, der aus der durch unsere eigene Bewegung bewirkten Anschauung entsteht. (Ref.: An dieser Stelle wird keine logisch-konstruktive Begründung gegeben, sondern eine Intuition zugrundegelegt.) Allgemein wird eine Totalität dann als eine *Menge* bezeichnet, wenn wir uns der Tat, die die Totalität bewerkstelligt, klar sind und die Totalität durch unsere Anschauung, die durch die Tat bewirkt wird, begreifen können. Eine solche Totalität ist bezüglich der sie bewerkstelligenden Tat *zeitlich werdend* und bezüglich der durch die Tat bewirkten Anschauung *räumlich seiend.* Hierbei liegt eine *kontradiktorische Selbst-Identität* im Sinne Nishidas vor. Die natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen aus einem Intervall sind als Mengen in diesem Sinn aufzufassen. Erst dadurch, daß eine Menge als seiend und nicht nur als werdend gedacht wird, ist das Tertium non datur sinnvoll anwendbar.