Canad. Math. Bull. Vol. **42** (1), 1999 pp. 104–117

Instabilité de vecteurs propres d'opérateurs linéaires

Ludmila Nikolskaia

Abstract. We consider some geometric properties of eigenvectors of linear operators on infinite dimensional Hilbert space. It is proved that the property of a family of vectors (x_n) to be eigenvectors $Tx_n = \lambda_n x_n$ ($\lambda_n \neq \lambda_k$ for $n \neq k$) of a bounded operator T (admissibility property) is very instable with respect to additive and linear perturbations. For instance, (1) for the sequence $(x_n + \epsilon_n v_n)_{n \geq k(\epsilon)}$ to be admissible for every admissible (x_n) and for a suitable choice of small numbers $\epsilon_n \neq 0$ it is necessary and sufficient that the perturbation sequence be eventually scalar: there exist $\gamma_n \in \mathbb{C}$ such that $v_n = \gamma_n v_k$ for $n \geq k$ (Theorem 2); (2) for a bounded operator A to transform admissible families (x_n) into admissible families (Ax_n) it is necessary and sufficient that A be left invertible (Theorem 4).

1 Introduction et exemples

Le but de cet article est l'étude de la stabilité ou l'instabilité des vecteurs propres d'opérateurs linéaires dans un espace de Banach ou de Hilbert par rapport à certains types de perturbations. Il s'avère que par rapport aux perturbations additives, les vecteurs propres sont très instables, sauf s'ils forment déjà une famille minimale (voir les théorèmes 2 et 3, paragraphe 3 ci-dessous), et par rapport aux déformations linéaires ils conservent la propriété d'être des vecteurs propres uniquement pour les isomorphismes (opérateurs inversible à gauche, voir le théorème 4, paragraphe 4).

Pour éviter des complications engendrées par la multiplicité du spectre on va considérer dans un espace de Banach les suites de vecteurs $(x_n)_{n\geq 1}$ telles q'il existe un opérateur T linéaire borné défini sur l'enveloppe linéaire fermée

$$\overline{\operatorname{span}}(x_n : n \geq 1)$$

et une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, avec la propriété

$$Tx_n = \lambda_n x_n, n \geq 1; \quad \lambda_n \neq \lambda_k (n \neq k). \tag{1.1}$$

Définition On va appeler une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant (1.1) une *suite admissible*.

Par exemple, toute suite orthogonale dans un espace de Hilbert est admissible. D'autre part, si une suite de vecteurs n'est pas linéairement indépendante alors elle n'est pas admissible. Il est aussi clair que dans le cas élémentaire d'un espace de dimension finie la condition d'indépendance linéaire caractérise les familles admissibles.

Reçu par les éditeurs le 27 juillet, 1996; revisée le 16 juin, 1998.
Classification (AMS) par sujet: 47A10, 46B15.
Mots clés: eigenvectors, minimal families, reproducing kernels.

Les exemples ci-dessous montrent que le problème de caractériser des ensembles de vecteurs propres dans les espaces de dimension infinie est loin d'être trivial.

Exemple 1 Soit dans un espace de Banach X une *suite minimale* (ou bien, *topologiquement libre*) $(x_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire telle que

$$x_k \notin \overline{\mathrm{span}}(x_n : n \neq k)$$

pour tout $k \in \mathrm{N}$. Alors $(x_n)_{n\geq 1}$ est admissible.

En effet, les x_n sont vecteurs propres de tout opérateur T de la forme

$$T = \sum_{n\geq 1} \lambda_n (\cdot\,, f_n) x_n$$

avec

$$\sum_{n\geq 1} |\lambda_n| \cdot \|f_n\| \cdot \|x_n\| < \infty$$

et $\lambda_n \neq \lambda_k (n \neq k)$ où $(f_n)_{n\geq 1}$ est une *suite biorthogonale* à $(x_n)_{n\geq 1}$: $f_n \in X^*$ et $(x_k, f_n) = \delta_{kn}$. ∎

Remarquons que l'opérateur T de cet exemple est évidemment compact. Réciproquement, si un opérateur T est compact alors sa famille (arbitraire) de vecteurs propres $(x_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant (1.1) avec $\lambda_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$ est minimale (c'est une conséquence immédiate de l'existence de projections de Riesz sur les parties isolées du spectre). Par ailleurs, le deuxième exemple (que nous allons aussi exploiter par la suite) montre que la minimalité n'est pas du tout nécessaire pour l'admissibilité.

Exemple 2 Soit $H^2 = H^2(\mathrm{D})$ l'espace de Hardy du disque $\mathrm{D} = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$,

$$H^2(\mathrm{D}) = \Big\{ f : f(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) z^n, \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \Big\},$$

et soit la famille

$$(x_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{1 - \lambda_n z} \right)_{n\geq 1},$$

$$\sup_n |\lambda_n| < 1, \quad \lambda_n \neq \lambda_k (n \neq k).$$

Alors, $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est pas minimale (et aucune partie infinie de cette suite n'est minimale) mais elle est admissible avec l'opérateur

$$T = S^*, (S^* f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad f \in H^2(\mathrm{D}).$$ ∎

Par ailleurs, parfois, on peut dire un peu plus sur les familles admissibles que la simple indépendance linéaire: notamment, sous certaines hypothèses sur les valeurs propres $\Lambda = \{\lambda_n : n \geq 1\}$ on peut garantir ce qu'on appelle "indépendance ω": $\sum_{n\geq 1} a_n x_n = \mathbf{0}$, $\sum_{n\geq 1} |a_n| \, \|x_n\| < \infty$ entraîne $a_n = 0$, $n \geq 1$. En particulier, étant donné $\Lambda = \{\lambda_n : n \geq 1\}$ les assertions suivantes sont équivalentes (voir [N]):

(1) *les équations (1.1) entraînent que* $(x_n)_{n\geq 1}$ *est* ω*-indépendante;*
(2) Λ *ne porte aucune mesure orthogonale aux polynômes: si* ν *une mesure concentrée sur* Λ *et* $\int_\Lambda z^n\, d\nu = 0$, $n \geq 0$ *alors* $\nu \equiv 0$.

(Ou bien, de façon équivalente, que l'intersection $\Lambda \cap \Omega$ n'est jamais une partie déterminante pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$; [S, Corollary 2, p. 13].)

L'exemple suivant est inspiré de ce résultat.

Exemple 3 Dans $H^2(\mathbb{D})$ considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ où

$$x_n = \frac{1}{1-\mu_n z}, \quad n \geq 1,$$
$$\lim_n \mu_n = \mu_0; \quad \mu_n \in \mathbb{D}, \quad n \geq 0,$$

et posons

$$x_0 = \sum_{n\geq 1} a_n x_n; \quad a_n \neq 0, n \geq 1; \quad \sum_{n\geq 1} |a_n| \cdot \|x_n\| < \infty.$$

Montrons que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'est pas admissible.

Soit T un opérateur borné dans $H^2(\mathbb{D}) = \overline{\operatorname{span}}(x_n : n \geq 0)$ tel que $Tx_n = \lambda_n x_n$, $\lambda_n \neq \lambda_k$. Alors

$$\mathbf{0} = Tx_0 - \lambda_0 x_0 = \sum_{n\geq 1} a_n(\lambda_n - \lambda_0)x_n$$

et donc pour tout $k \geq 0$

$$\mathbf{0} = S^{*k}(Tx_0 - \lambda_0 x_n) = \sum_{n\geq 1} a_n(\lambda_n - \lambda_0)\mu_n^k x_n$$

et

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \cdot |\lambda_n - \lambda_0|\, \|x_n\| < \infty.$$

En multipliant scalairement ces équations par une fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$ on obtient pour tout $k \geq 0$

$$0 = \sum_{n\geq 1} a_n(\lambda_n - \lambda_0)(x_n, f)\mu_n^k.$$

Puisque l'ensemble $\mathcal{M} = (\mu_n)_{n\geq 1}$ a un seul point d'accumulation des polynômes complexes sont denses dans l'espace $C(\overline{\mathcal{M}})$, et donc une mesure complexe portée par $\mathcal{M}$et orthogonale aux polynômes est une mesure nulle. On en déduit que pour tout $n \geq 1$ et toute f on a $a_n(\lambda_n - \lambda_0)(x_n, f) = 0$. Ce qui entraîne $\lambda_n = \lambda_0$ pour tout n. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'est pas donc admissible. ■

En fait, on peut développer cet exemple jusqu'une construction d'une suite linéairement indépendante dont toute partie infinie est inadmissible, voir [N].

Dans la suite, nous considérons toujours les espaces de dimension infinie.

L'article est organisé de façon suivante. Dans le paragraphe 2, nous amenons un simple critère d'admissibilité en fonction de matrices de Gram et le comparons avec le critère

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press

d'interpolation de Nevanlinna-Pick. Le paragraphe 3 est consacré à des perturbations additives des familles admissibles, et le paragraphe 4 à des "perturbations linéaires", notamment à l'instabilité de familles admissibles par rapport aux transformations linéaires $(x_n)_{n\geq 1} \longmapsto (Ax_n)_{n\geq 1}$ qui ne sont pas déjà des isomorphismes.

En conclusion, l'auteur tient à remercier M. B. Chevreau de sa lecture du manuscrit de cet article et le reféree des remarques utiles.

2 Critère de la matrice de Gram

Dans ce paragraphe X est un espace hilbertien et $(\cdot\,,\cdot)$ est le produit scalaire dans X. Comme il est bien connu, une famille de vecteurs $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ est uniquement déterminée (à l'équivalence unitaire près) par sa matrice de Gram $G = \{(x_n, x_k)\}_{n,k}$, et donc il est naturel de réécrire la condition d'admissibilité en fonction de matrices de Gram.

Théorème 1 *Soit X un espace de Hilbert. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est admissible si et seulement si il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, $\lambda_n \in \mathrm{C}$, $\lambda_n \neq \lambda_k$ telle que la matrice*

$$\{(x_n, x_k)(1 - \lambda_n \overline{\lambda}_k)\}_{n,k}$$

est définie positive.

Preuve Si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est admissible alors sans diminuer la généralité $\|T\| \leq 1$, où T est un opérateur satisfaisant (1.1). Pour cette raison quels que soient les $a_k \in \mathrm{C}$ on aura pour toute somme finie

$$\Big\|T\Big(\sum_k a_k x_k\Big)\Big\|^2 \leq \Big\|\sum_k a_k x_k\Big\|^2 = \sum_{k,n} a_k \overline{a}_n (x_k, x_n).$$

D'autre part,

$$\Big\|T\Big(\sum_k a_k x_k\Big)\Big\|^2 = \Big\|\sum_k a_k \lambda_k x_k\Big\|^2 = \sum_{k,n} a_k \overline{a}_n \lambda_k \overline{\lambda}_n (x_k, x_n).$$

Donc, quels que soient les $a_k \in \mathrm{C}$ on a

$$\sum_{k,n} (1 - \lambda_k \overline{\lambda}_n) a_k \overline{a}_n (x_k, x_n) \geq 0,$$

c'est-à-dire la matrice $\{(1 - \lambda_k \overline{\lambda}_n) a_k \overline{a}_n (x_k, x_n)\}_{n,k}$ est définie positive.

La réciproque est tout aussi évidente. ■

Corollaire *Si la matrice de Gram G de $(x_n)_{n\geq 1}$, en tant qu'un opérateur de l^2 dans l^2, est bornée et strictement positive alors $(x_n)_{n\geq 1}$ est admissible.*

En effet, dans ce cas il existe un $\epsilon > 0$ pour lequel $G \geq \epsilon I$ et si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$, $\lambda_n \in \mathrm{C}$ est tel que $\|G\| \cdot \sup_k |\lambda_k|^2 \leq \epsilon$ on aura

$$|\big(G(\Lambda a), \Lambda a\big)| \leq \|G(\Lambda a)\|_{l^2} \cdot \|\Lambda a\|_{l^2} \leq \|G\| \cdot \sup_k |\lambda_k|^2 \cdot \|a\|_{l^2}^2 \leq \epsilon \|a\|_{l^2}^2 \leq (Ga, a),$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{n,k} \lambda_k \overline{\lambda}_n a_k \overline{a}_n (x_k, x_n) \leq \sum_{n,k} a_k \overline{a}_n (x_k, x_n)$$

et donc au critère du théorème 1. ■

Remarques Il est bien connu que la matrice de Gram d'une famille linéairement indépendante est définie positive (mais peut-être pas strictement positive). Le théorème 1 montre qu'un ensemble de vecteurs est admissible si et seulement si il existe une perturbation d'une forme speciale de sa matrice de Gram qui la garde définie positive. Ce fait nous inspire de poser quelques d'autres problèmes de perturbations, notamment ceux de perturbations additives des suites admissibles, voir le paragraphe 3 ci-dessous.

A titre d'illustration considérons le critère du théorème 1 dans le cas particulier des noyaux reproduisants de l'espace H^2

$$X = H^2(\mathrm{D}), x_k(z) = \frac{1}{1 - \overline{z}_k z}; \quad |z_k| < 1, \quad k \geq 1.$$

Alors $(x_n, x_k) = \frac{1}{1-\overline{z}_n z_k}$ et la condition du théorème 1

$$\left\{ \frac{1 - \lambda_n \overline{\lambda}_k}{1 - \overline{z}_n z_k} \right\}_{n,k} \geq \mathrm{O}$$

coïncide avec la condition classique de Nevanlinna-Pick d'existence d'une fonction φ, $\varphi \in H^\infty(\mathrm{D})$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, telle que $\varphi(z_k) = \overline{\lambda}_k$ (voir [G, Ch. 1, théorème 2.2]; $H^\infty(\mathrm{D})$ est l'espace des fonctions holomorphes et bornées dans D). Dans ce cas l'opérateur T satisfaisant (1.1) n'est rien d'autre que

$$T\left(\frac{1}{1 - \overline{z}_k z}\right) = \frac{\overline{\varphi(z_k)}}{1 - \overline{z}_k z} = P_+\left(\overline{\varphi} \cdot \frac{1}{1 - \overline{z}_k z}\right)$$

où P_+ est la projection orthogonale de $L^2(0, 2\pi)$ sur $H^2(\mathrm{D})$ (la projection de Riesz).

3 Perturbations additives

Les deux définitions suivantes introduisent différents concepts de stabilité de vecteurs propres d'un opérateur linéaire.

Définition 1 Soit $V = (v_n)_{n\geq 1}$ une famille bornée de vecteurs dans un espace de Banach X. Appelons une famille admissible normée $(x_n)_{n\geq 1}$ V-*stable* (respectivement, *étroitement*

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press

V-*stable*), si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite de scalaires $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ (respectivement, une suite éventuellement constante) et un entier $k \in \mathbb{N}$ assez grand tels que $0 < |\epsilon_n| \leq \epsilon$ et la suite $(x_n + \epsilon_n v_n)_{n\geq k}$ est admissible.

Définition 2 Soit $\epsilon = (\epsilon_n)_{n\geq 1}$, $\epsilon_n > 0$. Disons qu'une suite admissible $(x_n)_{n\geq 1}$ est ϵ-*symétriquement stable* si la famille $(x_n + v_n)_{n\geq k}$ est admissible (avec un $k = k(v)$ convenable) quel que soit $v = (v_n)_{n\geq 1} \subset X$ vérifiant $\|v_n\| \leq \epsilon_n$, $n \geq 1$

Le théorème 2 ci-dessous montre que, à l'exception des perturbations éventuellement constantes, il n'existe pas de perturbation universelle $(v_n)_{n\geq 1}$, bonne pour *toute* suite admissible dans le sens de la définition de V-stabilité. Il est curieux que si on durcit V-stabilité jusqu'à V-stabilité étroite (voir la définition 1), il ne reste que des suites éventuellement nulles parmi telles perturbations universelles (le théorème $2'$ ci-dessous). En revanche, la stabilité symétrique de la définition 2 est bien possible mais uniquement pour les suites essentiellement minimales (le théorème 3).

Théorème 2 *Soient X l'espace de Hilbert, $V = (v_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Toute suite admissible normée est V-stable.
(ii) La suite V est essentiellement constante, c'est-à-dire, il existe $v \in X$ et une suite de scalaires $\gamma_n \in \mathbb{C}$ tels que $v_n = \gamma_n v$ pour tout n à partir d'un certain rang $k \in \mathbb{N}$.

Il est utile de remarquer que, comme il est clair d'après la démonstration ci-dessous, l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) du théorème 2 reste correcte pour tout espace de Banach X.

Théorème 2′ *Sous les hypothèses du théorème 2, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Toute suite admissible normée est étroitement V-stable.
(ii) La suite V est éventuellement nulle, c'est-à-dire, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = 0$ pour tout $n \geq k$.

Théorème 3 *Soit X un espace de Banach. Pour que la suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ soit ϵ-symétriquement stable pour un certain $\epsilon = (\epsilon_n)_{n\geq 1}$, $\epsilon_n > 0$ il faut et il suffit qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que le reste $(x_n)_{n\geq k}$ soit une suite minimale.*

Démonstration du théorème 2 Démontrons d'abord que (i) $\Rightarrow$ (ii) en commençant par certaines observations générales.

(1) Les hypothèses du théorème sont stables par rapport aux transformations linéaires inversibles: si $J \colon X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme linéaire, alors les suites $V = (v_n)_{n\geq 1}$ et $JV = (Jv_n)_{n\geq 1}$ satisfont, ou pas, les hypothèses simultanement.

(2) D'après (1), nous pouvons remplacer l'espace de Hilbert X par un autre, en particulier par l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. L'avantage de cette opération est qu'on peut travailler avec la structure de noyaux reproduisants de $H^2(\mathbb{D})$ déjà utilisée dans les exemples 2 et 3.

(3) En supposant $X = H^2(\mathbb{D})$ nous distinguons deux possibilités suivantes.

(A) Il existe une sous-suite $(v_{n_i})_{i\geq 1}$ faiblement convergente vers une limite f non-nulle. Il est clair d'après (1) qu'on peut supposer $f = \lambda\mathbf{1}$, $\lambda \neq 0$ (car il existe une isometrie J de $H^2(\mathbb{D})$ telle que $J\left(\frac{f}{\|f\|}\right) = \mathbf{1}$).

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press

(B) $\lim_n v_n = 0$ (faiblement).

Considérons d'abord le cas (A). Soit $\lim_i v_{n_i} = \lambda \mathbf{1}$ (faiblement) où $\lambda \neq 0$. Choisissons une suite de vecteurs propres du shift adjoint $S^* x_n = \lambda_n x_n$ où $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$,

$$x_n = \left(\frac{(1 - |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda_n z} \right)_{n \geq 1},$$

de sorte que l'ensemble $\{\lambda_{n_i} : i \geq 1\}$ soit dense dans $\mathbb{D}$, et supposons que la famille

$$(y_n)_{n \geq k(\epsilon)} = (x_n + \epsilon_n v_n)_{n \geq k}$$

est admissible avec une suite convenable de scalaires, $0 < |\epsilon_n| \leq \epsilon$ où $\epsilon > 0$ est suffisamment petit. Soit T un opérateur correspondant:

$$T(x_n + \epsilon_n v_n) = \mu_n (x_n + \epsilon_n v_n); \quad \mu_n \neq \mu_m, \ n, m \geq k. \tag{3.1}$$

Alors quel que soit $\alpha \in \mathbb{D}$

$$T \left(\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} + \epsilon(\alpha) \lambda \mathbf{1} \right) = \mu(\alpha) \left[\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} + \epsilon(\alpha) \lambda \mathbf{1} \right]$$

où $\mu(\alpha) = \lim_k \mu_{n_{i(k)}}$ et $\epsilon(\alpha) = \lim_k \epsilon_{n_{i(k)}}$ pour une suite $(n_{i(k)})_{k \geq 1}$ proprement choisie. En particulier, si $\alpha = 0$ on aura

$$T\big(\mathbf{1} + \epsilon(0)\lambda \mathbf{1}\big) = \mu(0)\big(\mathbf{1} + \epsilon(0)\lambda \mathbf{1}\big)$$

où $|\epsilon(0)\lambda| < 1$, ce qui entraîne $T\mathbf{1} = \mu(0)\mathbf{1}$. Nous sommes ainsi amenés à

$$\begin{aligned} T \left(\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} + \epsilon(\alpha) \lambda \mathbf{1} \right) &= T \left(\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} \right) + \epsilon(\alpha) \lambda \mu(0) \mathbf{1} \\ &= \mu(\alpha) \frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} + \mu(\alpha) \epsilon(\alpha) \lambda \mathbf{1}, \end{aligned}$$

ou bien à

$$T \left(\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} \right) = \mu(\alpha) \frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} + \epsilon(\alpha) \lambda \big(\mu(\alpha) - \mu(0)\big) \mathbf{1}.$$

En appliquant l'opérateur du shift adjoint S^* on aura pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$

$$S^* T \left(\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z} \right) = \alpha \mu(\alpha) \frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z}.$$

Or, l'opérateur S^*T étant commutant avec le shift adjoint S^* est (comme il est bien connu) l'adjoint $P_+\overline{F} \mid H^2$ d'un opérateur de multiplication $f \longmapsto F \cdot f$ par une fonction $F \in H^\infty(\mathbb{D})$. On obtient donc d'après (3.1)

$$\epsilon_n(S^*T - \mu_n S^*)v_n = (\mu_n S^* - S^*T)x_n = a_n x_n$$

où $a_n = \mu_n \lambda_n - \overline{F}(\overline{\lambda}_n)$. En multipliant par $S^* - \lambda_n I$, on arrive finalement à

$$(S^* - \lambda_n I)(S^*T - \mu_n S^*)v_n = 0$$

ou bien à

$$P_+\overline{\varphi}_n v_n = 0 \tag{3.2}$$

pour tout $n \geq k$, où $\varphi_n = (F - \overline{\mu}_n)(z - \overline{\lambda}_n)$. En souvenant que μ_n sont deux à deux différents, nous obtenons $\varphi_n \not\equiv 0$ pour tout $n \geq k$.

Conclusion: quelque soit une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de $H^2(\mathbb{D})$ satisfaisant l'assertion (i) du théorème et l'hypothèse (A) ci-dessus, elle vérifie les équations du type (3.2) avec $\varphi_n \not\equiv 0$. Montrons que cela entraîne $v_n = \gamma_n \cdot 1$ pour tout n à partir d'un certain rang, où $\gamma_n \in \mathbb{C}$.

Pour ce but, utilisons certaines propriétés connues des solutions $f \in H^2(\mathbb{D})$ des équations $P_+\overline{\varphi} f = 0$ où $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Pour ces propriétés nous renvoyons à [DSS] et à [Ni, Ch. 2 Sect. 1]. Notamment, l'équation $P_+\overline{\varphi} f = 0$ où $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ est équivalent au fait que la fonction f *n'est pas cyclique* pour l'opérateur S^*, c'est-à-dire

$$\overline{\operatorname{span}}(S^{*n} f : n \geq 0) \neq H^2(\mathbb{D}).$$

Les fonctions cycliques, donc telles que $\overline{\operatorname{span}}(S^{*n} f : n \geq 0) = H^2(\mathbb{D})$, possèdent deux propriétés suivantes (parmi beaucoup d'autres, voir [DSS] et [Ni, Ch. 2 Sect. 1]):

a) *si une fonction f est cyclique et g est non-cyclique alors $f + g$ est cyclique;*
b) *si f est holomorphe dans un voisinage de $\mathbb{D}$ alors soit f est cyclique soit rationnelle.*

Alors, d'après (3.2), toute fonction v_n, $n \geq k$ est non-cyclique. Pour achever la preuve dans le cas (A) il suffit de montrer un isomorphisme $J\colon H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ vérifiant les propriétés suivantes: (a) Jv est cyclique pout toute $v \not\equiv$ const non-cyclique; (b) $J1 = 1$. En effet, s'il y a un tel J, nous remplaçons $(v_n)_{n\geq 1}$ par $(Jv_n)_{n\geq 1}$ et appliquons le raisonnement ci-dessus. Cela entraîne $v_n = \text{const} = \gamma_n \cdot 1$ à partir d'un certain rang.

Pour construire un isomorphisme nécessaire J, considérons les fonctions

$$E_n(z) = \exp\left(\frac{1}{z - n - 2}\right), \quad n \geq 1.$$

(Dans un sens, E_n sont des "fonctions cycliques modèles", voir [DSS] et [Ni, Ch. 2 Sect. 1].) Posons

$$Jv = v + \sum_{n\geq 1} \hat{v}(n) a_n E_n$$

pour toute $v = \sum_{n\geq 0} \hat{v}(n)z^n \in H^2(\mathbb{D})$ où les nombres a_n sont choisis de sorte que $a_n \neq 0$ pour tout n et

$$q^2 = \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 \|E_n\|^2_{n+3/2} < 1, \quad \|E_n\|_{n+3/2} = \sup_{|z|\leq n+3/2} |E_n(z)|.$$

Il est bien évident que $\|E_n\|_{H^2} \leq \|E_n\|_{n+3/2}$, et donc $\|(J - I)v\| \leq q\|v\|_{H^2}$ pour toute $v \in H^2(\mathbb{D})$. Par conséquent, J est un isomorphisme de $H^2(\mathbb{D})$ tel que $J1 = 1$. D'autre part, si v est une fonction non-cyclique non-constante alors $v = \hat{v}(0) + \hat{v}(k)z^k + \sum_{n>k} \hat{v}(n)$ où $\hat{v}(k) \neq 0$, $k \geq 1$. Donc,

$$Jv = v + \hat{v}(k)a_kE_k + \sum_{n>k} \hat{v}(n)a_nE_n = v + \hat{v}(k)a_kE_k + g.$$

La fonction $\hat{v}(k)a_kE_k + g$ est cyclique d'après b) ci-dessus: g est holomorphe dans $|z| < k+3$ et donc $\hat{v}(k)a_kE_k + g$ est holomorphe dans $|z| < k + 2$ et n'est pas une fonction rationnelle. Finalement, Jv est cyclique d'après a) ci-dessus. La preuve dans le cas (A) est achevée.

Passons au cas (B). Puisque $\lambda = 0$, on obtient de même façon une relation plus simple, notamment

$$T\left(\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z}\right) = \mu(\alpha)\frac{(1 - |\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha z}$$

pour tout α, $|\alpha| < 1$ où $\mu(\alpha) = \lim_k \mu_{n_{i(k)}}$ pour une sous-suite convenable. Comme avant, ceci entraîne que l'opérateur T^* est l'opérateur de multiplication par une fonction F holomorphe et bornée dans $\mathbb{D}$, et donc d'après (3.1)

$$y_n \in \operatorname{Ker}(P_+\overline{F} - \mu_n I)$$

pour tout $n \geq k$. Par conséquent, les fonctions $y_n = x_n + \epsilon_n v_n$, $n \geq k$, et donc v_n ne sont pas cycliques, et nous terminons la preuve comme avant à l'aide du même opérateur J.

Remarque Dans le cas (B), où $\lim_n v_n = 0$ (faiblement), on n'a donc plus besoin de la propriété $J1 = 1$. C'est pourquoi on peut modifier la définition de J, en posant $Jv = v + \sum_{n\geq 0} \hat{v}(n)a_nE_n$ avec $q^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2\|E_n\|^2_{n+3/2} < 1$. On en déduit donc que $v_n = 0$, $n \geq k$.

Démontrons maintenant que (ii) $\Rightarrow$ (i). Il s'agit donc de montrer que, quelque soient $v \in X$ et une suite admissible $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite $(y_n = x_n + \epsilon_n v)_{n\geq 1}$ est aussi admissible avec $\epsilon_n \neq 0$ convenables. Soient T_0 et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ un opérateur et une suite d'après la définition de l'admissibilité:

$$T_0x_n = \lambda_n x_n; \quad \lambda_n \neq \lambda_k.$$

Trouvons un opérateur $T = T_0 + T_1$ et une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ tels que $Ty_n = \lambda_n y_n$, $n \geq 1$. Dans ce but, choisissons un élément $\psi \in X$ tel que

$$(x_n, \psi) \neq 0, \quad \forall n; \quad |(v, \psi)| < 1.$$

(On peut le prendre sous la forme $\psi = \sum_{n\geq 1} a_n x_n$ avec une suite $|a_n|$ décroissante assez rapidement.) Posons

$$T_1 = (\cdot\,,\varphi)v + (\cdot\,,\psi)T_0 v$$

où $\varphi \in X$ est un vecteur qui nous precisons plus tard. Alors, les équations $Ty_n = \lambda_n y_n$ sont équivalentes à

$$T_0 x_n + \epsilon_n T_0 v + T_1 x_n + \epsilon_n T_1 v = \lambda_n x_n + \lambda_n \epsilon_n v,$$

ou bien

$$T_1 x_n = \epsilon_n\big(\lambda_n v - (T_0 v + T_1 v)\big) = \epsilon_n\big(\lambda_n - (v,\varphi)\big)v - \epsilon_n\big(1 + (v,\psi)\big)T_0 v.$$

Il est clair d'après la forme particulière de T_1 que pour cette dernière relation il suffit de choisir φ et ϵ_n vérifiant les équations suivantes:

(a) $(x_n,\psi) = -\epsilon_n\big(1 + (v,\psi)\big)$;
(b) $(x_n,\varphi) = \epsilon_n\big(\lambda_n - (v,\varphi)\big)$.

Pour satisfaire (a) nous définissons ϵ_n par cette équation tout simplement, en posant

$$\epsilon_n = -\frac{(x_n,\psi)}{1 + (v,\psi)} = (x_n,\psi_*),$$

où

$$\psi_* = -\psi\frac{1}{1 + (\psi,v)}.$$

(Et donc $|\epsilon_n| \leq \|x_n\|\cdot\|\psi\|/(1 - \|v\|\cdot\|\psi\|)$ ce qui est arbitrarement petit avec $\|\psi\|$.)

L'équation (b) est équivalente à $(x_n,\varphi) = (x_n,\psi_*)\big(\lambda_n - (v,\varphi)\big) = (T_0 x_n,\psi_*) - \big(x_n,\psi_*(\varphi,v)\big)$, et il suffit donc d'avoir $\varphi = T_0^*\psi_* - (\varphi,v)\psi_*$. Mais car $|(\psi,v)| < 1$ et donc $1 + (\psi_*,v) \neq 0$, l'opérateur $I + (\cdot\,,v)\psi_*$ est inversible, et on peut définir φ par

$$\varphi = \big[I + (\cdot\,,v)\psi_*\big]^{-1} T_0^*\psi_*.$$

Cela achève la démonstration. ∎

Démonstration du théorème 2′ En reprenant la preuve du théorème 2, nous obtenons

$$T\left(\frac{(1-|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha z} + \epsilon\lambda\mathbf{1}\right) = \mu(\alpha)\left[\frac{(1-|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha z} + \epsilon\lambda\mathbf{1}\right]$$

où, cette fois, ϵ de dépend pas de $\alpha \in \mathrm{D}$. On peut conclure comme avant que

$$S^* T\left(\frac{(1-|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha z}\right) = \alpha\mu(\alpha)\frac{(1-|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha z}$$

pour tout α, et donc la fonction $\alpha \longmapsto \alpha\mu(\alpha)$ est holomorphe dans D. Cela entraîne que la fonction $\alpha \longmapsto \mu(\alpha)$ est holomorphe dans $\mathrm{D}\backslash\{0\}$ et, car elle est bornée, dans D.

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press

Dans le cas où $\lambda \neq 0$ (le cas (A) de la preuve du théorème 2) nous obtiendrons une contradiction en considérant l'opérateur T sur les noyaux reproduisants (voir les formules précédentes):

$$\left(\frac{1}{1-\alpha z}, T^*\mathbf{1}\right) = \left(T\left(\frac{1}{1-\alpha z}\right)\right)(0) = \mu(\alpha) + \epsilon\lambda\big(\mu(\alpha) - \mu(0)\big)(1-|\alpha|^2)^{-1/2}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$, ce qui est possible uniquement dans le cas où $\mu(\alpha) \equiv \mu(0)$ puisque tous les termes de cette équation, sauf $1-|\alpha|^2$, sont holomorphes.

Ainsi $T = \mu(0)I$. Contradiction.

Dans le cas où $\lambda = 0$ (le cas (B)) tout est déjà démontré, voir Remarque après la preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème 2. ∎

Remarque Bien sûr, certains détails de nos démonstrations de théorèmes 2 et 2′ sont optionnels mais l'usage des familles holomorphes de vecteurs propres paraît essentiel.

Démonstration du théorème 3 La suffisance résulte du fait connu (voir [Si] ou bien [KMR] pour la référence originelle), que pour toute famille minimale $(x_n)_{n\geq 1}$ il existe les nombres $\epsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tels que la famille $(x_n+v_n)_{n\geq 1}$, est aussi minimale quels que soient v_n satisfaisant $\|v_n\| < \epsilon_n$, $n \geq 1$. Pour faciliter la tâche du lecteur donnons la démonstration. Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$, $\epsilon_n > 0$, est telle que

$$\epsilon = \sum_{n\geq 1} \|P_n\|\epsilon_n/\|x_n\| < 1$$

où P_n sont les projections composantes $P_n(\sum a_k x_k) = a_n x_n$ (continues d'après la minimalité de $(x_n)_{n\geq 1}$). Considérons l'opérateur V,

$$Vx = V\left(\sum a_n x_n\right) = \sum a_n v_n$$

qui est bien défini sur les combinaisons linéaires finies. Si $\|v_n\| \leq \epsilon_n$, $n \geq 1$, alors

$$\|Vx\| \leq \sum \|a_n x_n\| \frac{\|v_n\|}{\|x_n\|} = \sum \|P_n x\| \frac{\|v_n\|}{\|x_n\|} \leq \sum \|P_n\|\,\|x\| \frac{\|v_n\|}{\|x_n\|} \leq \epsilon\|x\|.$$

C'est-à-dire, l'opérateur V est strictement contractant et $I + V$ est donc un isomorphisme. D'où le résultat.

Nécessité Supposons que pour tout $i \in \mathbb{N}$ la suite $(x_n)_{n\geq i}$ n'est pas minimale et soit $\epsilon = (\epsilon_n)_{n\geq 1}$, $\epsilon_n > 0$. Considérons alors les entiers $k(i) \geq i \geq 1$ de sorte que

$$d\Big(x_{k(i)}, \overline{\operatorname{span}}\big(x_j : j \geq i, j \neq k(i)\big)\Big) = 0.$$

Il existe un entier $m_2 > k(1)$ et des coefficients $c_{j,1}$ pour lesquels

$$\Big\| x_{k(1)} - \sum_{1\leq j<m_2, j\neq k(1)} c_{j,1} x_j \Big\| < \epsilon_{k(1)}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press

Si les nombres $1 = m_1, m_2, \dots, m_{p+1}$ sont déjà construits de sorte que

$$\Big\| x_{k(m_i)} - \sum_{m_i \le j < m_{i+1}, j \ne k(m_i)} c_{j,i} x_j \Big\| < \epsilon_{k(m_i)}, \quad i = 1, \dots, p$$

choisissons alors un $m_{p+2} > k(m_{p+1})$ de façon que

$$\Big\| x_{k(m_{p+1})} - \sum_{m_{p+1} \le j < m_{p+2}, j \ne k(m_{p+1})} c_{j,p+1} x_j \Big\| < \epsilon_{k(m_{p+1})}.$$

Posons maintenant $v_n = \mathbf{0}$ si $n \ne k(m_p)$, $p \ge 1$ et

$$v_{k(m_p)} = -x_{k(m_p)} + \sum_j c_{j,p} x_j.$$

Alors $\|v_n\| < \epsilon_n$, $n \ge 1$ mais en posant $y_n = x_n + v_n$ on s'assure que la suite $(y_n)_{n \ge k}$ n'est pas admissible quel que soit $k \ge 1$ puisque toute section $\{y_j : m_p \le j < m_{p+1}\}$ s'avère linéairement dépendante. Le théorème est démontré. ■

4 Déformations linéaires

Théorème 4 *Soient X un espace de Hilbert, A un opérateur linéaire borné dans X. Pour que A transforme toute suite admissible en une suite admissible il faut et il suffit que A soit un isomorphisme sur son image (soit inversible à gauche).*

Preuve La partie suffisance est évidente.

Nécessité Observons que si l'on cherche à décrire les opérateurs transformant des familles admissibles en familles admissibles alors le cadre naturel pour une telle étude est la classe des injections linéaires; sinon on peut perdre même l'indépendance linéaire de l'ensemble d'arrivé. Nous supposons désormais l'injectivité de A.

Considérons d'abord le cas où A est borné et auto-adjoint. Si A^{-1} n'est pas borné alors $0 \in \sigma(A)$, $0 \notin \sigma_p(A)$. Dans ce cas le théorème spectral nous ramène à l'existence d'une suite orthonormale $(f_i)_{i \ge 1}$ avec les propriétés

$$(Af_i, Af_k) = 0, \quad i \ne k; \quad \lim_i \|Af_i\| = 0.$$

Considérons une suite libre et inadmissible $(x_n)_{n \ge 1}$ dans X et la base orthonormale $(\varphi_i)_{i \ge 1}$ du $\overline{\operatorname{span}}(x_n : n \ge 1)$ construite par l'orthogonalisation de $(x_n)_{n \ge 1}$. On aura pour tout $n \in \mathrm{N}$

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n} \varphi_i, \quad c_{i,n} = (x_n, \varphi_i), \quad c_{n,n} \ne 0.$$

Extrayons par récurrence une sous-suite $(f_{i_n})_{n \ge 1}$ de façon que

$$\frac{\|Af_{i_n}\|^2}{|c_{n,n}|^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|c_{j,n}|^2}{\|Af_{i_j}\|^2} < \frac{1}{2^{n+2}}, \quad f_{i_1} = f_1$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press

et posons

$$g_n = \frac{\|Af_{i_n}\|}{c_{n,n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{j,n}}{\|Af_{i_j}\|} f_{i_j}, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Montrons que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz (dans son enveloppe $\overline{\mathrm{span}}\{g_n : n \geq 1\}$), c'est-à-dire qu'elle est l'image isomorphe d'une base orthogonale. Pour cela nous adaptons à notre situation le raisonnement classique de Wiener-Bari (voir [Si], [GK], par exemple). Il suffit de vérifier l'encadrement

$$c \sum |a_n|^2 \|g_n\|^2 \leq \Big\| \sum a_n g_n \Big\|^2 \leq C \sum |a_n|^2 \|g_n\|^2$$

avec des constantes $c, C > 0$ convenables et pour toute combinaison linéaire.

En effet,on a

$$\|g_n - f_{i_n}\|^2 = \Big\| \frac{\|Af_{i_n}\|}{c_{n,n}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_{j,n}}{\|Af_{i_j}\|} f_{i_j} \Big\|^2 = \frac{\|Af_{i_n}\|^2}{|c_{n,n}|^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|c_{j,n}|^2}{\|Af_{i_j}\|^2} < \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Ce qui nous ramène à

$$\sum_{n\geq 1} \|g_n - f_{i_n}\|^2 < \frac{1}{4},$$

et donc à $\| \sum a_n (g_n - f_{i_n})\| \leq \sum |a_n| \, \|g_n - f_{i_n}\| < \frac{1}{2} (\sum |a_n|^2)^{1/2}$. En particulier, $1/2 \leq \|g_n\| \leq 3/2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\Big(\sum |a_n|^2 \|g_n\|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\Big(\sum |a_n|^2\Big)^{1/2} = \frac{1}{2}\Big\|\sum a_n f_{i_n}\Big\| = \Big\|\sum a_n f_{i_n}\Big\| - \frac{1}{2}\Big(\sum |a_n|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad \leq \Big\|\sum a_n f_{i_n}\Big\| - \Big\|\sum a_n (g_n - f_{i_n})\Big\| \leq \Big\|\sum a_n g_n\Big\| \\
&\quad \leq \Big\|\sum a_n f_{i_n}\Big\| + \Big\|\sum a_n (g_n - f_{i_n})\Big\| \leq \Big(\sum |a_n|^2\Big)^{1/2} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(\sum |a_n|^2\Big)^{1/2} = \frac{3}{2}\Big(\sum |a_n|^2\Big)^{1/2} \leq 3\Big(\sum |a_n|^2 \|g_n\|^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Donc, la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ constitue une base de Riesz et comme telle est admissible.

D'autre part,

$$Ag_n = \frac{\|Af_{i_n}\|}{c_{n,n}} \sum_{j=1}^{n} c_{j,n} \frac{Af_{i_j}}{\|Af_{i_j}\|} = \frac{\|Af_{i_n}\|}{c_{n,n}} \sum_{j=1}^{n} c_{j,n} \psi_j$$

où $\psi_j = \frac{Af_{i_j}}{\|Af_{i_j}\|}$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press

Considérons l'isométrie u telle que $u(\varphi_j) = \psi_j$, $j \geq 1$. Alors

$$Ag_n = \frac{\|Af_{i_n}\|}{c_{n,n}} \sum_{j=1}^{n} c_{j,n} u(\varphi_j) = u\left(\frac{\|Af_{i_n}\|}{c_{n,n}} x_n\right).$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ étant supposée inadmissible, la dernière représentation montre que la famille $(Ag_n)_{n\geq 1}$ est non plus admissible.

Ainsi, pour l'opérateur A auto-adjoint positif la nécessité est démontrée.

Pour une injection linéaire arbitraire A la représentation polaire $A = VR$ où R est auto-adjoint positif et V une isométrie partielle avec le même noyau que R (voir [H], par exemple), permet d'achever la démonstration. ■

Remarque La démonstration ci-dessus montre que le théorème 4 peut être paraphrasé de façon suivante.

Théorème 4′ *Soit A un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert. Les assertions suivantes sont equivalentes.*

1. *A transforme toute suite admissible en une suite admissible.*
2. *A transforme toute base de Riesz en une suite admissible.*
3. *A est un isomorphisme sur son image ($=$ A est inversible à gauche).* ■

References

[DSS] R. G. Douglas, H. S. Shapiro and A. L. Shields, *Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator*. Ann. Inst. Fourier (1) **20**(1970), 37–76.

[G] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*. Academic Press, NY, 1981.

[GK] I. Gohberg and M. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. "Nauka", Moscow, 1965; Transl. Math. Monographs **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

[H] P. Halmos, *A Hilbert space problem book*. Graduate Texts in Math. **19**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1982.

[KMR] M. G. Krein, D. P. Milman and M. A. Rutman, *Sur une propriété d'être une base dans l'espace de Banach*. Zapiski Matematicheskogo Obschestva, Kharkov (5) **16**(1940), 106–110 (en russe).

[N] L. N. Nikolskaia, *Propriétés géométriques des systèmes de vecteurs propres et des spectres ponctuels d'opérateurs linéaires*. Thèse, Institut Polytechnique de Léningrade, 1971.

[Ni] N. Nikolski, *Treatise on the shift operator*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.

[S] D. Sarason, *Weak-star density of polynomials*. J. Reine Angew. Math. **252**(1972), 1–15.

[Si] I. Singer, *Bases on Banach spaces*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

UFR de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex
France

https://doi.org/10.4153/CMB-1999-012-0 Published online by Cambridge University Press