Canad. Math. Bull. Vol. **31** (1), 1988

RECOUVREMENTS PONCTUELLEMENTS DÉNOMBRABLES PAR DES ENSEMBLES NÉGLIGEABLES

PAR
MAXIM R. BURKE

RÉSUMÉ. Nous allons démontrer la consistance avec la théorie des ensembles ZFC de l'existence d'un recouvrement de **R** par une collection d'ensembles négligeables, $\mathscr{A}$, telle que pour tout $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, $\cup\mathscr{B}$ est mesurable.

ZFC est la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix. Nous dénoterons par μ la mesure de Lebesgue sur l'ensemble **R** des réels.

DÉFINITION. Une collection $\{E_i : i \in I\}$ de parties de **R** est *disjointe* (resp. *ponctuellement finie* (pf), *ponctuellement dénombrable* (pd)) si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Card}(\{i \in I : x \in E_i\}) \leqq 1$ (resp. $<\aleph_0$, $\leqq\aleph_0$).

Soit $\Phi(P)$ l'affirmation suivante à propos d'une propriété P:

$\Phi(P)$: Pour toute collection $\{E_i : i \in I\}$ d'ensembles négligeables (= dont la mesure de Lebesgue est zéro) telle que $\mathbf{R} = \cup\{E_i : i \in I\}$ et qui est "P", il existe un $I' \subset I$ tel que $\cup\{E_i : i \in I'\}$ n'est pas mesurable.

Alors Φ (disjointe) et Φ (pf) sont des théorèmes de ZFC (voir [1], [2]). Dans [4], D. Fremlin démontre que Φ (pd) est consistant avec ZFC (par exemple, Φ (pd) est une conséquence de l'axiome de Martin).

Nous allons établir ici les théorèmes suivants; le théorème 2 résout le problème posé par Fremlin à la fin de [5]:

THÉORÈME 1. *Si* Φ (pd) *est fausse, alors il existe un contrexemple* $\{E_i : i \in I\}$ *où* $\mathrm{Card}(I) < 2^{\aleph_0}$.

DÉFINITION. Une partie L de **R** est un *ensemble de Lusin* si $\mathrm{Card}(L) = 2^{\aleph_0}$ et pour toute partie maigre $E \subset \mathbf{R}$, $L \cap E$ est dénombrable.

THÉORÈME 2. *S'il existe un ensemble de Lusin* $L \subset \mathbf{R}$ *de puissance* $2^{\aleph_1}$, Φ (pd) *est fausse.*

Notons que l'hypothèse du Théorème 2 entraîne l'égalité $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ et est valable par exemple dans tout modèle de ZFC obtenu par l'addition d'au

Reçu par la rédaction le 15 avril 1986 et, sous une forme révisée le 24 novembre 1986.
AMS Subject Classification (1980): 28A05.

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-009-7 Published online by Cambridge University Press

moins $2^{\aleph_1}$ réels de Cohen (voir par exemple [6], Théorème 3.18).

Avant de démontrer ces deux théorèmes, il nous faut le lemme suivant:

LEMME. *S'il existe une collection* pd $\{E_i : i \in I\}$ *de parties négligeables de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\forall I' \subset I$, $\cup\{E_i : i \in I'\}$ *est mesurable et* $\mu(\cup\{E_i : i \in I\}) > 0$, *alors il existe une telle collection satisfaisant* $\cup\{E_i : i \in I\} = \mathbf{R}$, c.-à-d. Φ (pd) *est fausse.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{E_i : i \in I\}$ tel que dans l'hypothèse. Soit $\mathscr{A} = \{E_i + q : i \in I, q \in \mathbf{Q}\}$ ($\mathbf{Q}$ = les rationnels). Alors

(1) $\mathscr{A}$ est pd:

Autrement il existe $x \in \mathbf{R}$ qui appartient à un nombre non-dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$. Par conséquent, il existe un q tel que $\{i \in I : x \in E_i + q\} = \{i \in I : x - q \in E_i\}$ est non-dénombrable.

(2) $\forall \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, $\cup \mathscr{B}$ est mesurable:

Pour chaque $q \in \mathbf{Q}$, soit $I(q) = \{i \in I : E_i + q \in \mathscr{B}\}$. Alors $\cup \mathscr{B} = \cup\{\cup\{E_i + q : i \in I(q)\} : q \in \mathbf{Q}\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles mesurables.

(3) $E = \mathbf{R} \setminus \cup \mathscr{A}$ est négligeable:

Suit immédiatement de $\mu(\cup \mathscr{A}) > 0$, et du fait que $\mathscr{A}$ demeure invariant sous toute translation rationnelle.

De (1), (2), et (3) il suit que la collection $\mathscr{A} \cup \{E\}$ possède toutes les propriétés désirées.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Cette preuve généralise celle dans [3] que tout sous-espace topologique de $\mathbf{R}$, dont toute partie est une intersection dénombrable d'ouverts (dans le sous-espace), est négligeable (cf. également [7]).

Supposons que Φ (pd) soit fausse, et soit λ la plus petite puissance pour laquelle il existe une collection pd$\{E_\alpha : \alpha < \lambda\}$ d'ensembles négligeables telle que $\forall A \subset \lambda$, $\cup\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ est mesurable, et $E = \cup\{E_\alpha : \alpha < \lambda\}$ n'est pas négligeable.

Nous montrerons que $\lambda < 2^{\aleph_0}$.

Sinon $\lambda = 2^{\aleph_0}$. ($\lambda \leqq 2^{\aleph_0}$ puisque $\{E_\alpha : \alpha < \lambda\}$ est pd.) Soit $\{K_\gamma : \gamma < \lambda\}$ une énumération des compacts de mesure positive qui sont inclus dans E. Supposons que $\{U_{n\alpha} : n \in \omega\}$ sont des ouverts vérifiant (**):

$$\cap\{U_{n\alpha} : n \in \omega\} \text{ est négligeable et contient } \cup_{\beta<\alpha} E_\beta \qquad (**).$$

(Bien sûr il est toujours possible de trouver de tels ouverts. Nous imposerons plus loin des conditions supplémentaires sur les $U_{n\alpha}$.)

Alors $C = [\cap_n \cup \{E_\alpha \times U_{n\alpha} : \alpha < \lambda\}] \cap E \times E$ est une partie mesurable du plan. (Démonstration: Pour tout n, $\cup\{E_\alpha \times U_{n\alpha} : \alpha < \lambda\} = \cup_i \cup\{E_\alpha : B_i \subset U_{n\alpha}\} \times B_i$ où $\{B_i : i \in \omega\}$ est une base pour la topologie de $\mathbf{R}$.) C a la propriété que la mesure de toutes ses sections horizontales est μE, car si $y \in E$ alors pour

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-009-7 Published online by Cambridge University Press

un certain α_0, $y \in E_{\alpha_0}$, d'où $\forall n\ \forall \alpha > \alpha_0\ y \in U_{n\alpha}$, d'où $(x, y) \in C$ lorsque $x \in \cup\{E_\alpha : \alpha > \alpha_0\}$, et la mesure de ce dernier est μE.

Par le théorème de Fubini, presque toutes les sections verticales $C^x = \{y \in E:(x, y) \in C\}$ de C ont mesure μE également. Pour chaque $x \in E$, $I(x) = \{\alpha < \lambda : x \in E_\alpha\}$ est dénombrable et $C^x \subset \cup\{U_{0\alpha} : \alpha \in I(x)\}$. Ainsi il suffira, pour compléter la démonstration, de montrer qu'il est possible de choisir les $U_{n\alpha}$ dans (**) de telle sorte que l'ensemble des x pour lesquels

$$\mu(\cup\{U_{0\alpha} : \alpha \in I(x)\}) < \mu E \tag{***}$$

soit non-négligeable.

À cette fin, on définit par récurrence des points $x_\gamma \in E$ et des ensembles d'ouverts $\{U_{0\alpha} : \alpha \in I(x_\gamma)\}$ pour $\gamma < \lambda$ comme suit:

À l'étape γ, on prend pour x_γ un point quelconque de

$$K_\gamma \setminus \cup\{E_\alpha : \exists \gamma' < \gamma(\alpha \in I(x_{\gamma'}))\};$$

il existe un tel point car Card $\cup\{I(x_{\gamma'}):\gamma' < \gamma\} \leqq \mathrm{Card}(\gamma) \cdot \aleph_0 < \lambda$ donc $\cup\{E_\alpha : \exists \gamma' < \gamma\ \alpha \in I(x_{\gamma'})\}$ est négligeable. Par le choix de x_γ, aucun des $U_{0\alpha}$, $\alpha \in I(x_\gamma)$ n'a encore été défini. On prend pour $U_{0\alpha}$, $\alpha \in I(x_\gamma)$ des ouverts satisfaisant

$$\bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta \subset U_{0\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha \in I(x_\gamma)} \mu U_{0\alpha} < \mu E.$$

Les $U_{n\alpha}$ pour $n > 0$ sont définis de façon arbitraire (pourvu que (**) soit vérifié).

Alors $\mu^*\{x_\gamma : \gamma < \lambda\} = \mu E$, et (***) est vérifié par chaque x_γ. Ceci complète la démonstration du théorème 1.

Démonstration du Théorème 2. Soit H un partie négligeable de $\mathbf{R}$ dont le complément est maigre. Soit L un ensemble de Lusin de puissance $2^{\aleph_1}$. Soit $\kappa = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. Et soient $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ une énumération de $\{H + \ell : \ell \in L\}$ et $\{L_\alpha : \alpha < \kappa\}$ une énumération de $\{J \subset \omega_1 : \mathrm{Card}(J) = \aleph_1\}$. Nous allons définir une collection pd $\mathcal{N} = \{N_\eta : \eta < \omega_1\}$ telle que $\forall \eta < \omega_1\ N_\eta \subset E_\eta$ et qui sera un contrexemple à Φ (pd).

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $A(x) = \{\alpha < \kappa : x \notin E_\alpha\} \cup \{\emptyset\}$ est dénombrable (dém. [cf 8]: Si $x \notin \cup\{E_\alpha : \alpha \in S\}$ et $\mathrm{Card}(S) = \aleph_1$, soient $\ell_\alpha \in L$ tels que $E_\alpha = H + \ell_\alpha$. Alors $\forall \alpha \in S\ x \notin H + \ell_\alpha$ d'où $\{\ell_\alpha : \alpha \in S\} \subset \mathbf{R}\setminus(x - H)$ est maigre, ce qui n'est pas possible puisque L est un ensemble de Lusin.) Maintenant pour chaque $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $\alpha \in A(x)$, choisissons un $\eta = \eta(x, \alpha) \in L_\alpha$ tel que $x \in E_\eta$. Ceci est possible puisque $\{\eta \in L_\alpha : x \notin E_\eta\} \subset A(x)$ est dénombrable et L_α est non-dénombrable.

Prenons $N_\eta = \{x \in \mathbf{R} : \exists \alpha \in A(x), \eta = \eta(x, \alpha)\}$.

Alors:

(1) $N_\eta \subset E_\eta$: Par le choix des $\eta(x, \alpha)$.

(2) $\{N_\eta : \eta < \omega_1\}$ est pd: Fixons un $x \in \mathbf{R}$. Alors $\{\eta < \omega_1 : x \in N_\eta\} = \{\eta < \omega_1 : \exists\alpha \in A(x)\ \eta = \eta(x, \alpha)\}$ est dénombrable puisque $A(x)$ est dénombrable.

(3) $\cup\{N_\eta : \eta \in L_\alpha\} \supset \mathbf{R}\backslash E_\alpha$ (donc est mesurable): Si $x \notin E_\alpha$ alors $\alpha \in A(x)$ et par conséquent $\eta = \eta(x, \alpha) \in L_\alpha$ et $x \in E_\eta$, ce qui entraîne $x \in N_\eta \subset \cup\{N_\eta : \eta \in L_\alpha\}$.

Ainsi $\mathcal{N} = \{N_\eta : \eta < \omega_1\}$ a toutes les propriétés désirées. Ceci complète la démonstration du théorème 2.

REMARQUES.

1. Le Théorème 1 reste valable pour une collection $\{E_i : i \in I\}$ où pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Card}\{i \in I : x \in E_i\} < 2^{\aleph_0}$ (même démonstration).

2. Nous ignorons si Φ (pd) peut être fausse lorsque $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

3. D. Fremlin nous a informé qu'il a démontré indépendamment et précédemment le théorème 2.

RÉFÉRENCES

1. J. Brzuchowski, J. Cichoń, E. Grzegorek and C. Ryll-Nardzewski, *On the existence of non-measurable unions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. **27** (1979), pp. 447-448.

2. L. Bukovský, *Any partition into Lebesgue measure zero sets produces a non-measurable set*, Bull, Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. **6** (1979), pp. 431-435.

3. W. G. Fleissner, *Current research on Q sets*, Colloq. Math. Soc. Jaños Bolyai **23** Topology Vol. I, pp. 413-431.

4. D. H. Fremlin, *Measure-additive coverings and measurable selectors*, to appear.

5. D. H. Fremlin, *Measurable selections and measure-additive coverings*, in Measure Theory (Oberwolfach 1981), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 945, Springer-Verlag, Berlin.

6. K. Kunen, *Random and Cohen reals*, in Handbook of Set-Theoretic Topology, North Holland, 1984.

7. K. Prikry, *On images of the Lebesgue measure*, unpublished manuscript, 1977.

8. F. Rothberger, *Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen*, Fund. Math. **30** (1938), pp. 215-217.

UNIVERSITY OF TORONTO
TORONTO, ONTARIO
M5S 1A1

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-009-7 Published online by Cambridge University Press