FORMULE D'INVERSION DE LAGRANGE ET SON APPLICATION A LA THEORIE DES PERTURBATIONS

Takeshi Inoue
Université-Kyoto-Sangyo, Kamigamo, Kyoto, 603, JAPON.

1. FORMULE DE LAGRANGE

Pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries, Lagrange (1770) établit une méthode fort ingénieuse. Rappelons ici tout brièvement ce qu'il énonce dans ses oeuvres. Considérons une équation d'une seule inconnue y de la forme suivante :

$$\eta-y+\varepsilon\chi(y)=0, \tag{1}$$

où η et ε sont respectivement un paramètre quelconque et une petite quantité et que $\chi(y)$ est une fonction analytique dans un intervalle. Alors on peut développer une des racines de l'équation (1) qui devient égale au paramètre η lorsqu'on met la valeur de la quantité ε nulle :

$$y=\eta+\sum_{1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\{\chi(y)\}^n\right]_{\varepsilon=0}. \tag{2}$$

On peut considérer ladite équation comme une fonction aux deux variables η et y ainsi que l'expression (2) comme une fonction uniforme définie par la fonction implicite (1) (Dieudonné, 1968).

On peut aussi développer une fonction analytique K(y) dont l'argument y est donné par la relation (2) :

$$K(y)=K(\eta)+\sum_{1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left(\frac{dK(y)}{dy}\{\chi(y)\}^n\right)\right]_{\varepsilon=0}. \tag{3}$$

Quoique la formule de Lagrange soit bien efficace quand on veut résoudre l'équation de Képler par exemple, le nombre des inconnues ou des variables est, dans la plupart des calculs perturbateurs, supérieur à un et les formules sus-dénommées ne sont plus convenables sans y rien changer. C'est donc qu'il nous faudrait les étendre afin de les faire devenir applicables au cas où il existerait plusieurs inconnues ou plusieurs variables.

R. L. Duncombe (ed.), Dynamics of the Solar System, 85–89.

2. EXTENSION AU CAS DE PLUSIEURS VARIABLES

Soient f un nombre naturel, ε une petite quantité, $\eta_1,..,\eta_f$ des paramètres et $Y_1,..,Y_f$; $\chi_1,..,\chi_f$ des fonctions analytiques dans un ensemble par rapport aux variables $y_1,..,y_f$ et aux paramètres $\xi_1,..,\xi_f$. Considérons un système de fonctions implicites sous la forme :

$$\eta_j-Y_j(y;\xi)+\varepsilon\chi_j(y;\xi)=0, \qquad (j=1,2,..,f), \tag{4}$$

où nous avons écrit simplement y et ξ au lieu de $y_1,..,y_f$ et de $\xi_1,..,\xi_f$. Supposons ici que nous puissions uniformément résoudre le système (4) dans un ensemble convenable par repport aux variables $y_1,..,y_f$ à condition que la quantité ε soit égale à zéro comme il suit :

$$y_k=\psi_k(\xi;\eta), \qquad (k=1,2,..,f). \tag{5}$$

Dans le cas où la quantité ε n'est plus nulle, nous supposons que le système (4) soit résoluble en séries infinies développées suivant les puissances croissantes de la petite quantité ε :

$$y_k=\tilde{\psi}_k(\xi;\eta;\varepsilon)=\psi_k(\xi;\eta)+\sum_1^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\,\psi_k^{(n)}(\xi;\eta), \qquad (k=1,2,..,f). \tag{6}$$

Nous connaissons nombre de tentatives pour obtenir une formule utile qui nous permette de calculer les fonctions $\psi_k^{(n)}(\xi;\eta)$. Parmi elles, celle de Brown et Shook (1933) serait la première, mais elle n'aboutit à rien. Bien que Mr. Percus (1964) construise une telle formule, elle serait trop compliquée pour être appliquée aux problèmes pratiques. La formule présentée par MM. Feagin et Gottlieb (1970) est bien utilisable. La base sur laquelle ils s'appuient est le théorème de Leibniz et alors on doit obligatoirement commencer le calcul des fonctions $\psi_k^{(n)}(\xi;\eta)$ de l'ordre le plus bas vers l'ordre plus élevé. Nous présenterons ainsi une formule qui nous permet de calculer n'importe quel ordre des fonctions sans savoir d'autres expressions déjà obtenues :

$$\psi_k^{(n)}(\xi;\eta)=\left[\frac{\partial^n\tilde{\psi}_k}{\partial\varepsilon^n}\right]_{\varepsilon=0}=\tilde{D}_{k_2}^{n-1}\left[\frac{\partial\psi_k}{\partial\eta_{k_1}}\,\tilde{\chi}^{*n}_{k_1}\right], \qquad (k=1,2,..,f;\ n=1,2,..), \tag{7}$$

où l'on effectue les calculs comme suit :

$$\tilde{D}_{k_{m+1}}^{n-m}\left[\frac{\partial\psi_k^{(n;m-1)}}{\partial\eta_{k_m}}\,\tilde{\chi}^{*n-m-1}_{k_m}\right]=\tilde{D}_{k_{m+2}}^{n-m-1}\left[\frac{\partial\psi_k^{(n;m)}}{\partial\eta_{k_{m+1}}}\,\tilde{\chi}^{*n-m}_{k_{m+1}}\right]=$$

$$=\tilde{D}_{k_{m+2}}^{n-m-1}\left[\left\{\frac{\partial^2\psi_k^{(n;m-1)}}{\partial\eta_{k_{m+1}}\partial\eta_{k_m}}\,\chi^*_{k_m}+(n-m+1)\frac{\partial\psi_k^{(n;m-1)}}{\partial\eta_{k_m}}\,\frac{\partial\chi^*_{k_m}}{\partial\eta_{k_{m+1}}}\right\}\tilde{\chi}^{*n-m}_{k_{m+1}}\right]; \tag{8}$$

$$\tilde{D}^{1}_{k_n} \equiv D_{k_n}, \quad \tilde{D}^{0}_{k_{n+1}} \equiv 1; \quad \tilde{\chi}^{*1}_{k_n} \equiv \chi^{*}_{k_n}; \quad \frac{\partial \psi_k^{(n;0)}}{\partial \eta_{k_1}} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_{k_1}}; \qquad (m=1,2,\ldots,n-1).$$

Nous avons introduit des indices muets dans ces expressions.

3. INTRODUCTION DES OPERATEURS

Lagrange a écrit l'expression (3) sous une forme fermée à l'aide d'un opérateur différentiel. Mais, il n'y avait toujours qu'une seule inconnue dans son cas. Nous remarquons ici que même le cas où figurent plusieurs variables dans les fonctions dont il s'agit, il y a des cas qui nous laissent la possibilité de réduire le problème de l'inversion à plusieurs variables au cas d'une seule en introduisant des opérateurs convenables. Nous pouvons y profiter de la formule classique de Lagrange sans qu'on l'étende aux cas spéciaux.

Dans le but de rendre plus clairement ce que nous énonçons ici, nous appliquerons notre résultat à la théorie du mouvement d'un satellite artificiel due à la méthode de von Zeipel-Brouwer (1959). Considérons une transformation canonique d'un système hamiltonien $F(x_1,x_2;y_1,y_2;\varepsilon)$ à un autre système hamiltonien $\Phi(\xi_1,\xi_2;-,\eta_2;\varepsilon)$ engendrée par une fonction génératrice :

$$\eta_j = \frac{\partial S}{\partial \xi_j} = y_j + \frac{\partial \varepsilon S_1}{\partial \xi_j} + \ldots, \qquad (j=1,2), \tag{9}$$

$$x_j = \frac{\partial S}{\partial y_j} = \xi_j + \frac{\partial \varepsilon S_1}{\partial y_j} + \ldots; \qquad (j=1,2), \tag{10}$$

$$S = S(y;\xi;\varepsilon) = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \varepsilon S_1(y;\xi) + \varepsilon^2 S_2(y;\xi) + \ldots. \tag{11}$$

Si l'on met dans les relations (9) :

$$Y_j(y;\xi) = y_j, \quad \varepsilon\chi_j(y;\xi) = -\frac{\partial \varepsilon S_1}{\partial \xi_j}; \qquad (j=1,2), \tag{12}$$

$$\varepsilon^m S_m(y;\xi) \equiv 0, \qquad (2 \leqq m), \tag{13}$$

ce n'est pas autre chose qu'un système de fonctions implicites à plusieurs variables, identique avec le système (4). On peut donc résoudre immédiatement le système (9) par rapport aux variables y à l'aide de notre formule (7). En substituant ce résultat au deuxième membre du système (10), on obtiendra la transformation canonique sous une forme explicite. Si l'on modifie légèrement la formule (7), on peut également résoudre le système (9) dans le cas où les fonctions $\varepsilon^m S_m(y;\xi)$ ne sont plus nulles.

Puisque la fonction génératrice S ne contient pas la variable indépendante, nous aurons une équation qui exprime la conservation de la

https://doi.org/10.1017/S0074180900012560 Published online by Cambridge University Press

valeur des hamiltoniens :

$$F(x_1,x_2;y_1,y_2;\varepsilon)-\Phi(\xi_1,\xi_2;-,\eta_2;\varepsilon)=0. \tag{14}$$

Supposons maintenant que les relations suivantes soient remplies presque partout dans l'ensemble des variables :

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_2}\right| \simeq \left|\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_2}\right| \simeq \left|\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|, \tag{15}$$

et que les hamiltoniens y soient analytiques. Sous ces conditions, on peut développer le premier membre de l'équation (14) suivant les puissances de la quantité ε à proximité du point $(y_1,y_2;\xi_1,\xi_2)$:

$$\begin{aligned}&\{F(\xi;y)-\Phi(\xi;y)\}+(F_{x_1}+F_{x_2}p-\Phi_{\eta_2}P^*)z+\tfrac{1}{2}F_{x_1x_1}z^2+F_{x_1x_2}zpz+\tfrac{1}{2}F_{x_2x_2}(pz)^2+\\&+\ldots-\tfrac{1}{2}\Phi_{\eta_2\eta_2}(P^*z)^2-\ldots=0,\end{aligned} \tag{16}$$

où nous avons introduit une abréviation et des opérateurs donnés comme il suit :

$$z=\frac{\partial\varepsilon S_1}{\partial y_1}\ ;\quad p=\frac{\partial}{\partial y_2}\int dy_1,\quad P^*=\frac{\partial}{\partial\xi_2}\int dy_1. \tag{17}$$

Cela montre que nous avons pu réduire le problème au cas d'une seule variable z et nous pourrons ainsi résoudre l'équation (16) par la formule (2) en y substituant les relations suivantes :

$$\eta\ :\ (1+{}^{F}x_2/{}^{F}x_1\ p-{}^{\Phi}\eta_2/{}^{F}x_1P^*)^{-1}\{\Phi(\xi;y)-F(\xi;y)\}/{}^{F}x_1, \tag{18}$$

$$\varepsilon\chi(y)\ :\ (\text{comme ci-dessus})^{-1}\{-\tfrac{1}{2}F_{x_1x_1}z^2-F_{x_1x_2}zpz-\ldots\}/F_{x_1}. \tag{19}$$

On trouvera ailleurs les démonstrations générales pour les formules que nous venons de traiter.

ABSTRACT: The article studies the application of the Lagrange series inversion formula to perturbation theories. One of the main problems is to generalize the Lagrange formula to several variables. The article also shows the need for introducing some operators to simplify the notation. To terminate, an application to the Von Zeipel-Brouwer satellite theory is given.

REFERENCES

1. Lagrange,J.L.: 1869, Oeuvres III (Gauthier-Villars, Paris), p.5.
2. Dieudonné,J.: 1968, Calcul infinitésimal (Hermann, Paris), p.250.
3. Brown,E.W. et Shook,C.A.: 1964, Planetary Theory (Dover, New York), p.40.
4. Percus,J.K.: 1964, Communications on Pure and Applied Mathematics, 17, 137.
5. Feagin,T. et Gottlieb,R.G.: 1970, Celestial Mechanics, 3, 227.
6. Brouwer,D.: 1959, Astronomical Journal, 64, 378.