PART II

LUNAR THEORY AND MINOR PLANET MOTIONS

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PERTURBATIONS PLANETAIRES DE LA LUNE

N. Abu el Ata
Bureau des Longitudes, Paris, France

I. INTRODUCTION

L'étude des perturbations planétaires de la Lune soulève un problème fondamental provenant de la différence de caractère entre la théorie de la Lune et la théorie des planètes. Si, les deux théories sont des cas particuliers du problème de trois corps, la distinction entre elles résulte d'une analyse classique basée sur les résultats de l'observation et de plusieurs études théoriques.

Il est utile de citer quelques aspects de cette distinction:

1. Dans le développement de la fonction perturbatrice en fonction du rapport des rayons vecteurs corps perturbé/corps perturbateur, il apparait, pour atteindre une précision relative analogue, un nombre de termes beaucoup plus grand dans le cas des planètes que celui de la Lune. Il en découle des méthodes de développement de l'inverse de la distance, et de ses puissances, différentes dans les deux cas.
2. Dans la théorie des planètes les perturbations sont proportionnelles aux rapports des masses des planètes au Soleil et les théories les plus élaborées négligent les puissances quatrièmes de ce rapport. Dans la théorie de la Lune, le petit paramètre est le rapport n'/n des moyens mouvements du Soleil à celui de la Lune, et les développements dans ce paramètre doivent être poussés très loins pour obtenir en valeur relative une précision analogue à celle d'un cas planétaire.
3. Les mouvements séculaires des nœuds et des périhélies ne sont pas comparables, car dans le cas des planètes les périodes sont très grandes (Kovalevsky, 1967) et l'étude du mouvement de la Lune par suite d'une période de révolution très courte, nécessite une durée de validité de la théorie sur un intervalle de temps très long comparativement à sa révolution mensuelle.

Ces différences citées, parmi les plus fondamentales, montrent que les deux théories doivent être traitées différemment.

Paradoxalement, le "mélange" des deux théories, sous leurs formes

V. Szebehely (ed.), Dynamics of Planets and Satellites and Theories of Their Motion, 113-124.

les plus élaborées, est indispensable pour étudier les perturbations planétaires de la Lune. Il est donc avantageux de conserver une séparation entre planètes et Lune jusqu'à l'étape la plus avancée dans la construction analytique de la solution.

D'après Kovalevsky (1976), la plus grande amélioration à apporter à la théorie de Brown, qui sert actuellement de base pour la construction des éphémerides conventionelles, avec quelques corrections minimes, porte sur la partie concernant le calcul des perturbations planétaires. Aussi la conservation par Brown d'un trop petit nombre d'inégalités a restreint la généralité de ses résultats. Pour Henrard (1973) l'imprécision du travail de Brown concernant les corrections qu'il a apportées au problème central (perturbations planétaires et autres perturbations) est due aux erreurs de troncature (précision de l'ordre $0''.01$) et d'autre part à l'utilisation d'une solution du problème central où n'/n a pris une valeur numérique, fixée une fois pour toutes, empêchant toute généralisation de ses résultats.

Il est nécessaire actuellement de construire une meilleure solution du problème pour aboutir à l'établissement d'éphemerides plus précises en vue des applications aux mesures des distances Laser - Lune et des missions spatiales, afin de rattraper le décalage entre "théorie" et "observation". Il faut, d'autre part, assurer la cohérence entre les différents types de perturbations de la Lune (planétaires,aplatissement, marées,..) avec les précisions obtenues actuellement dans les solutions les plus élaborées pour le problème central.

II. UNE APPROCHE DU PROBLEME

Dans l'élaboration de la solution, nous avons procédé par étapes et considéré qutre niveaux:

1. Construction formelle de la fonction perturbatrice et des équations du mouvement.
2. Séparation des quantités "Lune" et "planète" au sens de Brown.
3. Elaboration d'une technique de tamis pour obtenir les arguments qui donnent des termes sensibles (dits "sensible terms" par Brown).
4. Calcul pratique des inégalités.

La premiére étape du travail a consisté à développer des méthodes de calcul analytique des puissances de l'inverse de la distance D entre deux planètes (D^{-s} $s=1,3,5,..$).

Hill (1879) s'était borné pour le calcul de ces quantités à $s \leqslant 5$. Nous nous sommes efforcés (Abu el Ata, Chapront 1975) d'effectuer un calcul précis des fonctions de $\alpha = a/a'$, rapport des demi - grands axes des deux planètes, dans ces développements, afin de réaliser une amélioration par rapport aux résultats de Le Verrier utilisés par Brown (1908), qui sont, en partie, la cause d'une imprécision dans son travail. Si ces méthodes apportent une grande précision interne, elles ne permettent pas d'atteindre des arguments avec des multiples très élevés (fréquences)pour les longitudes moyennes, par suite du volume considérable des calculs que cela entrainerait, sous une forme analytique, pour construire de tels arguments. Ici D^{-s} est représentée par une formule du type:

$$D^{-s} = \sum_{j,n_k} A_{j,n_1,\ldots,n_8}(\alpha)\, x'^{n_1} \bar{x}'^{n_2} x_p^{n_3} \bar{x}_p^{n_4} y'^{n_5} \bar{y}'^{n_6} y_p^{n_7} \bar{y}_p^{n_8} \exp\sqrt{-1}\, j\,(T - P) \tag{1}$$

où, avec des notations classiques, $x' = e' \exp\sqrt{-1}\, l$; $y' = \gamma' \exp\sqrt{-1}(1+\tilde{\omega})$ $\alpha = a/a'$ et $\gamma = \sin i/2$, $\bar{x}$ désigne la quantité conjugée de x, les variables primées sont relatives à la Terre et les variables d'indice p sont relatives à la planète. Les angles T et P sont respectivement les longitudes moyennes de la Terre et de la planète.

On a pu obtenir les multiples élevés qui sont indispensables au calcul des termes "sensibles" en utilisant les résultats des calculs de P. Bretagnon (1976): D^{-s} est construit avec une manipulation de séries de Fourier à coefficients semi-numériques à partir de la valeur du D^{-2}.

D^{-s} est alors écrit sous la forme:

$$D^{-s} = \sum_{p,q} C_{p,q}^{(s)} \cos(pT + qP) + S_{p,q}^{(s)} \sin(pT + qP) \tag{2}$$

où $C_{p,q}^{(s)}$ et $S_{p,q}^{(s)}$ sont deux coefficients numériques.

Dans une étape suivante nous avons défini le sens donné aux perturbations "directes" et "indirectes" de la Lune (Chapront, Abu el Ata 1977). On rappelle ici les formules :

- Perturbations planétaires directes (d pour directe):

$$m_p \frac{d\vec{\sigma}^{(d)}}{dt} = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \vec{X}^{(c)}}{\partial \sigma_j}\left(\sigma_k^{(c)}, \sigma_k^{(0)}\right) \cdot m_p\, \sigma_j^{(d)} + m_p\, \vec{X}^{(d)}\left(\sigma_k^{(c)}, \sigma_k'^{(0)}, \sigma_p^{(0)}\right) \tag{3}$$

- Perturbations planétaires indirectes (i pour indirecte) :

$$m_p \frac{d\vec{\sigma}^{(i)}}{dt} = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \vec{X}^{(c)}}{\partial \sigma_j}\left(\sigma_k^{(c)}, \sigma_k'^{(0)}\right) \cdot m_p\, \sigma_j^{(i)} \sum_{j=1} \frac{\partial \vec{X}^{(c)}}{\partial \sigma_j'^{(0)}} \cdot m_p\, \sigma_j'^{(1)} \tag{4}$$

σ , σ', σ_p sont les vecteurs respectifs de la Lune, la Terre et de la planète , $\sigma^{(c)}$ est la solution du problème central. L'indice (0) indique qu'il s'agit d'un mouvement képlerien, $\sigma'^{(1)}$ représente les perturbations du premier ordre de la Terre.

Nous nous sommes efforcé d' assurer à nos développements:
- Une grande généralité (validité pour un choix de paramètres quelconques, et sur une échelle de temps longue).
- Une forme aussi fermée que possible afin d'éviter les problèmes de troncature.
- La maniabilité dans le cadre de la solution du problème central dont nous disposons (choix des variables, calculs analogues,...etc).

Nous avons procédé ensuite à la mise en équations du problème, en exprimant les dérivés de la fonction perturbatrice en polynômes de Legendre, et en utilisant un système d'équations de Lagrange avec les variables $\vec{\sigma} = (a, \lambda, z, \zeta)$ où a et λ sont respectivement le demi - grand axe de la Lune, et sa longitude moyenne, $z = e \exp\sqrt{-1}\,\tilde{\omega}$ et $\zeta = \gamma \exp\sqrt{-1}\,\Omega$ ($\gamma = \sin i/2$).

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons les notations de l'article (Chapront, Abu el Ata, 1977) et nous rappellerons la numérotation des formules avec le symbole "n", où n est le numéro de la formule.

Les équations de Lagrange pour la variable σ_k ($\vec{\sigma} = (\sigma_k)$) ont la forme:

$$\frac{d\sigma_k}{dt} = \frac{1}{n a^2} D_{\sigma_k} \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}\, R^{(c)} \qquad (5) \quad "19"$$

ou bien une formule analogue pour $R^{(d)}$ pour les perturbations directes. Par simplicité d'écriture, nous travaillerons ici avec $R^{(c)}$ seulement. Alors:

$$\vec{\text{grad}}\, R^{(c)} = k\, m' \left(R_1^{(c)} \vec{V} + R_2^{(c)} \vec{V}' \right) \qquad (6)$$

et

$$R_k^{(c)} = \frac{1}{r'^3} \sum_{j=1} C_{j-1}^{k} \left(\frac{r}{r'} \right)^{j-1} \frac{\partial P_j}{\partial \Theta} \quad (k=1,2) \qquad (7)$$

Les $C_{j-1}^{(k)}$ sont des fonctions du rapport des masses Terre - Lune, et les P_j les polynômes de Legendre avec:

$$\Theta = \frac{1}{r\, r'} \vec{V} \cdot \vec{V}'$$

Ecrivons (7) sous une forme générale, en explicitant les polynômes de Legendre, on trouve:

$$R_k^{(c)} = \sum_{j-1} \sum_{n=0}^{m} P_n^j \cdot \alpha_{j-1}^{(k)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \left(\frac{a'}{r'}\right)^{2j-2n+1} \Theta^{j-2n+1} \qquad (8)$$

où $m = E\left(\frac{2j-1}{2}\right) + \text{Mod}\,(j,2)$

$$P_n^j = (-1)^n \frac{(2j-2n)!}{2^j\, n!\,(j-n)!\,(j-2n-1)!}$$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062187 Published online by Cambridge University Press

$\alpha_{j-1}^{(k)}$ est une fonction des $C_{j-1}^{(k)}$ et de $\alpha = a/a'$. Dans le cas de $R^{(d)}$, il faudra remplacer r' par D et Θ par Θ_p , où:

$$\Theta_p = \frac{1}{r.D} \vec{V} . (\vec{V}' + \vec{V}_p)$$

$\vec{V}_p$ est le vecteur de position de P dans un repère héliocentrique. Nous avons realisé la transformation de l'équation (5) sous la forme:

$$\frac{d\sigma_k}{dt} = m X_{\sigma_k} = m \sum_i L_i^{(k)} P_i^{(k)} \tag{9}$$

m représente soit m' soit m_p . Les $L_i^{(k)}$ ne dépendent que des élements de la Lune et s'expriment à l'aide des crochets de la forme:

$$\{m , n\} = (\frac{r}{a})^m \exp n \sqrt{-1} (w - \lambda) \tag{10}$$

w est la longitude vraie . Les $P_i^{(k)}$ sont des fonctions des planètes et de la Terre, où seule l'inclinaison de la Lune apparait à travers son carré. Elles sont exprimées à l'aide d'un jeu de notations q_k, k =0,1, 2,3,.. définies par "42" pour les termes principaux (indépendants de i'inclinaison) et i_m, m = 0,2 en "50" pour les termes en inclinaisons.

Dans une première approche du problème afin d'étudier quelques aspects et difficultés numériques nous avons exprimé les seconds membres sous la forme:

$$X_\sigma = \sum_k \sum_{l_1,l_2} a_{l_1,l_2,k}^{(\sigma)} x^{l_1} \bar{x}^{l_2} \exp - k\sqrt{-1} \lambda . q_k \tag{11}$$

les x ont la signification donnée en (1). Les $a_{l_1,l_2,k}$ sont des coefficients numériques dont l'ordre en α est lié à l_1, l_2, l'indice k.

III. FORMULAIRE DU PROBLEME (suite)

a. Développements fermés des seconds membres

Dans les équations "41" nous nous sommes limités aux termes parallactiques en α_1 , où:

$$\alpha_1 = \frac{m_T - m_L}{m_T + m_L} . \frac{a}{a'}$$

dans les dérivées de la fonction perturbatrice dont la forme générale est donnée par (8). Nous pousserons maintenant les développements jusqu' aux termes de l'ordre $(a/a')^2$.

D^{-s} apparait avec des puissances $s \leqslant 9$. On peut alors étudier l'effet de la troncature en a/a' sur les développements.

Avec l'utilisation de nos variables et de nos notations, en respecttant la séparation symbolisée par (9), on peut réécrire les seconds membres de nos équations de façon à mettre en évidence un grand nombre de quantités semblables dans les trois équations "44". Les calculs sont réduits en exprimant ces quantités sous une forme fermée.

Rappellons que nous avons séparé les seconds membres de nos équations en deux parties:

$$X_\sigma = X_\sigma^1 + X_\sigma^2 \tag{12}$$

L'indice 1 représente la "partie principale". L'indice 2 représente les "termes complémentaires" en inclinaison. Nous nous bornerons à l'évaluation des termes principaux. Aux expressions "42" , qui ne dépendent que des coordonnées de la Terre et de la planète, il faut ajouter:

$$\begin{aligned} q_4 &= \frac{3}{2}\delta^5 - \frac{15}{2} u\bar{u}\delta^7 + \frac{105}{16} u^2\bar{u}^2\delta^9 \\ q_5 &= \left(-\frac{15}{8}u^2\delta^7 + \frac{35}{16}u^3\bar{u}\delta^9\right) . \exp 2\sqrt{-1}\,\lambda \\ q_6 &= \frac{36}{16} u^4\delta^9 \quad \exp 4\sqrt{-1}\,\lambda \end{aligned} \tag{13}$$

$\delta = \frac{a'}{r'}$, dans le cas des perturbations indirectes. $\delta = \frac{a'}{D}$ pour les perturbations directes, la signification de u est donnée en "43", avec les définitions "25" et "26". Notons que q_4, q_5 et q_6 sont multiplies par $(a/a')^2$.

La nouvelle forme des équations "44" peut alors s'écrire:

On pose

$$S_0 = q_0 + \alpha_2 \frac{\rho}{a}\frac{\bar{\rho}}{a} q_4$$

$$S_1 = \alpha_1 \frac{\bar{\rho}}{a} q_1 + \alpha_2 \frac{\bar{\rho}^2}{a^2} q_5$$

$$S_2 = q_2 + \alpha_1 \frac{\rho}{a} q_1 + \alpha_1 \frac{\bar{\rho}}{a} q_3 + \alpha_2 \frac{\rho}{a}\frac{\bar{\rho}}{a} q_5 + \alpha_2 \frac{\bar{\rho}^2}{a^2} q_6$$

on trouve

$$\begin{aligned} X_a^1 &= \frac{n'^2}{n}\beta \frac{2a}{\phi} \operatorname{Im}\left\{ \bar{z}\frac{\rho}{a} S_0 + \left(\bar{z}\frac{\rho}{a} - z\frac{\bar{\rho}}{a}\right) S_1 \right. \\ &\qquad \left. (\bar{z}+\bar{\tau})\frac{\bar{\rho}}{a} S_2 \right\} \\ X_z^1 &= -\sqrt{-1}\,\frac{n'^2}{n}\beta\left\{ \phi\frac{\rho}{a}(S_0 + S_1 + \bar{S}_1) + \phi\frac{\bar{\rho}}{a} S_2 \right\} \\ &\qquad \frac{n'^2}{n}\beta\frac{1}{\phi}(z+\tau)\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{\rho}^2}{a^2} S_2\right) \\ X_\lambda^1 &= -2\frac{n'^2}{n}\beta \operatorname{Re}\left\{ \frac{\rho}{a}\left(\frac{\bar{\rho}}{a} + \frac{1}{2}\psi\phi\bar{z}\right) S_0 + \frac{\bar{\rho}}{a}\left(\frac{\bar{\rho}}{a} + \frac{1}{2}\psi\phi\bar{z} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{\psi}{4\phi}\frac{\bar{\rho}}{a}(\bar{z}\tau - z\bar{\tau})\right) S_2 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\rho}{a}\left(\frac{\bar{\rho}}{a} + \frac{1}{2}\psi\phi\bar{z}\right) S_1\right)\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062187 Published online by Cambridge University Press

où

$$\alpha_2 = \{ (\frac{m_T - m_L}{m_T + m_L}) + \frac{m_T m_L}{(m_T + m_L)^2} \} (\frac{a}{a'})^2 \tag{15}$$

et

$$\rho = r \exp\sqrt{-1}\, w$$

$$\phi = \sqrt{1 - e^2}$$

$$\psi = \frac{1}{1 + \phi}$$

Ces formules sont sans doute plus compactes que "44" et peuvent être généralisées pour des puissances supérieures de a/a' .

b. Les perturbations indirectes

Nous avons défini en (4) le système d'équations pour les perturbations planétaires indirectes. Ici $\vec{\sigma}'^{(1)}$ traduit les perturbations planétaires du premier ordre des masses du système Terre - Lune par la planète P. Aux termes en inclinaisons près, les variables osculatrices définissant l'orbite lunaire interviennent toujours dans les coefficients des q_k dans les équations (14). Ceux - ci sont calculés une fois pour toute et utilisés pour toutes les perturbations, les longitudes des planètes apparaissent à travers les quantités $\vec{\sigma}'^{(1)}$

Adoptons le symbole $\vec{Y}_{\sigma'}$ pour définir les seconds membres de (4),soit:

$$\vec{Y}_{\sigma'} = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \vec{X}^{(c)}}{\partial \sigma'_j}(0) \cdot \sigma'^{(1)}_j \tag{16}$$

où la partie principale de $\vec{X}^{(c)}$ est donnée en (14) ou "44". Tout en respectant la séparation de Brown on peut exprimer facilement les perturbations planétaires indirectes sous la forme:

$$Y^{(i)}_{\sigma'} = \sum_{j=1}^{6} \sum_{k} A^{(i)}_k (a, \lambda, z, \zeta) \operatorname{gr\vec{a}d}_{\vec{G}}\, q_k \frac{\partial \vec{G}}{\partial \sigma'_j}(0) \cdot \sigma'^{(1)}_j \tag{17}$$

$Y^{(i)}_{\sigma'}$ est une composante du vecteur $\vec{Y}_{\sigma'}$. Les $A_k(a, \lambda, z, \zeta)$ sont les éléments dépendants de la Lune seulement. Le vecteur $\vec{G}$ est un vecteur à trois composantes:

$$\vec{G} = (r', u', u')$$

où ici :

$$u = \frac{\pi'}{a'} \exp - \sqrt{-1}\, \lambda$$

la signification de π' étant donnée par "24".

Nous rassemblons le résultat des calculs des composantes de $\operatorname{gr\vec{a}d}_{\vec{G}}\, q_k$ dans le tableau 1 et celui des $\partial\vec{G} / \partial\sigma'$ dans.le tableau 2, les deux dernières lignes du tableau 1 représentent les dérivées de i_0 et i_2 qui remplacent les q_k dans l'équation en ζ (voir "50" et "51")

IV. APPLICATION DU FORMULAIRE

Nous nous intéressons dans cette partie à la construction pratique des séries formant les seconds membres pour les perturbations planétaires "directes" ou "indirectes", ainsi qu'au problème du tamis des termes sensibles dans un second membre donné. Nous nous proposons d'analyser les résultats de ces calculs dans une prochaine publication.

a. Les étapes du calcul pour la formulation des seconds membres

Il a été construit plusieurs programmes de calcul que nous utilisons basé sur des techniques présentées par ailleurs (Chapront et al. 1974) correspondant aux différents étapes:

- Calcul de D^{-s} ($s \leqslant 9$, ici) sous une forme analytique ou semi-numérique.
- Transformation des crochets $\{m,n\}$ de la formule (10) en séries de puissances des variables x et $\bar{x}$.
- Calcul des séries du type Lune, soient $L_i^{(k)}$ dans la formule (9) en utilisant la solution semi - numérique du problème central construite par M. Chapront- Touzé (1974).
- Calcul des quantités q_k, $k=0,1,2,..$ et i_m, $m=0,2$ du type "planète", avec les séries de P. Bretagnon et J.L. Simon (1975) dans le cas des perturbations "directes".
- Calcul des derivées partielles (tableaux 1 et 2) dans le cas des perturbations "indirectes".
- Calcul du produit des deux séries Lune x (planète et Soleil) de la formule (9).
- Détermination des "termes sensibles" avec une technique qui est discutée plus bas.

b. Tamis des termes sensibles

Les termes sensibles sont ceux qui donnent naissance, après l'intégration à des inégalités dont les coefficients sont plus grands qu'une borne inférieure fixée, à priori, en tenant compte de la précision du calcul et de la nature des théories utilisées. Afin d'éviter une trop grande prolifération d'arguments dans les combinaisons des coordonnées de la Lune avec celles des planètes, nous avons établi une méthode de tamis qui permet à la fois de calculer systématiquement tous les termes sensibles et d'étudier certaines combinaisons qui apportent des arguments des petits diviseurs. Cette idée a été suggérée par Radau (1895) et Brown (1908).

En suivant les idées de Brown, on développe une formule qui permet de calculer la période d'un argument choisi, en variables de Delaunay, et d'autre part une formule qui donne (en considerant les caractéristiques associés aux arguments, d'après la propriété de d'Alembert) un ordre de grandeur du coefficient correspondant à l'argument. En conservant toujours la séparation entre argument "Lune" et argument "planète" nous avons calculé toutes les périodes provenant de toutes les combinaisons possibles Lune x planète, en nous limitant à une période maximum de 3500 ans. Brown estime que les coefficients des inégalités ayant des

Tableau 1 $\vec{\mathrm{grad}}_G\, q_k$ et $\vec{\mathrm{grad}}_G\, i_m$

$k = 0, 1, 2, 3 \; ; \; m = 0, 2$

composante du gradient / fonction	$\frac{\partial}{\partial r'}$	$\frac{\partial}{\partial u'}$	$\frac{\partial}{\partial \bar{u}'}$
q_0	$3\, r_1'^{-4} - \frac{15}{2}\, r_1'^{-6}\, u'\bar{u}'$	$\frac{3}{2}\, \bar{u}'\, r_1'^{-5}$	$\frac{3}{2}\, u'\, r_1'^{-5}$
q_1	$\frac{15}{2}\, u'\, r_1'^{-6} - \frac{105}{8}\, u'^2 \bar{u}'\, r_1'^{-8}$	$-\frac{3}{2}\, r_1'^{-5} + \frac{15}{4}\, u'\bar{u}'\, r_1'^{-7}$	$\frac{15}{8}\, r_1'^{-7}\, u'^2$
q_2	$-\frac{15}{2} u'^2\, r_1'^{-6}$	$3\, u'\, r_1'^{-5}$	0
q_3	$\frac{105}{8}\, u'^3\, r_1'^{-8}$	$\frac{45}{8}\, u'^2\, r_1'^{-7}$	0
i_0	$\frac{15}{2\chi}\, u'\, H' r_1'^{-6}$	0	$\frac{3}{2\chi}\, H' r_1'^{-5}$
i_2	$-\frac{15}{2\chi}\, u'\, H'\, r_1'^{-6}$	$\frac{3}{2\chi}\, H'\, r_1'^{-5}$	0

$$H' = y\,(\bar{\mu}'\,\Xi'\rho_1' - \mu'\,\bar{\Xi}'\rho_1')$$

$$= 2\sqrt{-1}\;\bar{y}\;\mathrm{Im}\,(\bar{\mu}'\,\Xi'\rho_1')$$

μ' et Ξ' sont des fonctions des inclinaisons

https://doi.org/10.1017/S0252921100062187 Published online by Cambridge University Press

Tableau 2 Dérivées par rapport à $\sigma_j'^{(0)}$

$\frac{\partial}{\partial \sigma_j'^{(0)}}$ \ fonction	r'	ρ'	$\overline{\rho}'$	μ'	ν'
$\frac{\partial}{\partial \lambda'}$	$\frac{1}{\phi'} \operatorname{Im} (\overline{z}' \tau')$	$\frac{\sqrt{-1}}{\phi'} (z' + \tau')$	$-\frac{\sqrt{-1}}{\phi'} (\overline{z}'+\overline{\tau}')$	0	0
$\frac{\partial}{\partial z'}$	$\frac{-1}{2} (\overline{\tau}' + \sqrt{-1}\, \overline{z}' \frac{\psi'}{\phi'} \operatorname{Im}(z'\overline{\tau}'))$	$-a' - \frac{1}{2\phi'^2} (\overline{z}'+\overline{\tau}')\rho' - \frac{\psi'}{2\phi'}\overline{z}'(z'+\tau')\ a'$	$\overline{\partial\rho' / \partial z'}$	0	0
$\frac{\partial}{\partial \overline{z}'}$	$-\frac{1}{2}(\tau' + \sqrt{-1}\ z' \frac{\psi'}{\phi'} \operatorname{Im}(\overline{z}'\tau'))$	$\frac{1}{2\phi'} (\frac{1}{\phi'} \rho' + a'\ \psi' z')(z'+\tau')$	$\overline{\partial\rho' / \partial \overline{z}'}$	0	0
$\frac{\partial}{\partial \zeta'}$	0	0	0	0	$-\chi'$
$\frac{\partial}{\partial \zeta'}$	0	0	0	ζ'	0

$$\rho = r'\ \tau' = r' \exp \sqrt{-1}\ w'$$

$$w' = v' + g' + h'$$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062187 Published online by Cambridge University Press

périodes supérieures à 3500 ans ont peu de chance d'être sensibles

Nous calculs sont obtenus à partir des séries réelles constituant les seconds membres de nos équations, alors que Brown s'est basé sur une formule empirique.

V. CONCLUSION

Afin de rechercher à améliorer les résultats de Brown nous avons pour l'instant considéré plusieurs aspects:

- Effectuer un développement de la fonction perturbatrice à un degré plus élevé en $\alpha = a/a'$.
- Calculer les expressions "Lune" et "planète" sous une forme aussi dense que possible afin d'éviter les erreurs de troncature.
- Utiliser, soit pour l'expression du D^{-s}, soit pour les séries $\sigma'^{(1)}$, des expressions plus précises que celles de Le Verrier utilisées par Brown.
- Réaliser un tamis aussi systématique que possible pour être sûr d'atteindre tous les termes de petits diviseurs essentiellement.
- Utiliser une solution du problème central aussi précise que possible.

Cette liste n'est sans doute pas exhaustive, et il faudra attendre la comparaison avec plusieurs méthodes pour garantir l'exactitude des résultats .

REMERCIEMENTS

l'Auteur remercie vivement M.J. Kovalevsky pour ses conseils et ses encouragements et M.J. Chapront qui lui a fait bénéficier de son expérience tout au long de ce travail.

'Planetary Perturbations of the Motion of the Moon' by N. Abu el Ata

ABSTRACT. The need for accurate ephemerides describing the motion of the Moon warrants a new determination of the inequalities in the Moon's coordinates due to the action of the planets (direct and indirect). Here we expose the different aspects of the problem and the methods to treat them. The difficulties that arose during the work and the elimination of their effects are explained.

REFERENC

Abu el Ata,N., Chapront,J.	1975	Astron. & Astrophys.38,57
Brown,E. W.	1908a	Adams Prize Ess.,Cambridge Uni.P.
Brown,E. W.	1908b	Mem. Roy. Astro. Soc. ,59

Bretagnon,P.	1976	Communication privée
Chapront,J.,Abu el Ata,N.	1977	Astron. & Astrophys.55,83
Chapront,J.,Bretagnon,P., Mehl,M.	1975	Celes. Mech. 16,379
Chapront,J.,Chapront,M., Simon,J.L.	1974	Astron. & Astrophys. 31,151
Chapront-Touzé,M.	1974	Astron. & Astrophys. 36,5
Henrard,J.	1973	Ciel et Terre 89, 1
Hill,G.W.	1878	Am. J. Math. 1,5
Kovalevsky,J.	1967	Celestial Mechanics, Rei.Publ.
Kovalevsky,J.	1977	Phil.Trans.R.Soc.Lond.A.284,565
Radau,R.	1895	Mem. Ann. de l'Obs. 21
Simon,J.L.,Bretagnon,P.	1975	Astron. & Astrophys. 42,259