

LE SPECTRE DES OPÉRATEURS DE COMPOSITION SUR $C[0,1]$

BRUCE MONTADOR

Introduction. Soit $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ une fonction continue. $C[0,1]$ est l'espace (de Banach) des fonctions continues à valeurs complexes définies sur $[0, 1]$, muni de la norme définie par le suprémum. L'opérateur de composition $[f]$ se définit très naturellement sur cet espace:

$$[f] : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] \\ g \rightarrow g \circ f.$$

Le but de cet article est de calculer le spectre de l'opérateur $[f]$ pour chaque fonction f . Des études partielles d'opérateurs de composition ont déjà été publiées dans le contexte de certains espaces de fonctions analytiques dans le disque. Les résultats que nous présentons utilisent les méthodes de l'itération et des équations fonctionnelles, dont la référence principale est le livre de Kuczma [2]. Nous allons donner une classification des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, basée sur deux propriétés simples de telles fonctions. Cette classification sera l'outil fondamental pour le calcul du spectre.

Le présent travail fait partie de ma thèse de doctorat [3]. Je suis particulièrement reconnaissant à mon directeur de recherches, monsieur le professeur Serge Dubuc, dont les conseils m'ont été très utiles.

Notation. f^n est l'itérée n -ième de $f: f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ pour tout $n \geq 2$; $f^n(J) = \{y \in [0, 1] | y = f^n(x), x \in J\}$ où $J \subset [0, 1]$.

E est l'intervalle $[0, 1]$, $C(E) = C[0, 1]$.

D'abord nous obtenons une borne supérieure pour le spectre de tous les opérateurs $[f]$.

LEMME. $\sigma([f]) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} | |\lambda| \leq 1\} = D$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|[f]\| = 1$. Si $\|g\| = 1$, $g \in C(E)$, alors

$$\begin{aligned} \|[f]g\| &= \|g \circ f\| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} |g(f(x))| \\ &\leq \|g\| = 1. \end{aligned}$$

D'autre part, si $h(x) = 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$, $\|h\| = 1$ et $\|[f]h\| = \|h\| = 1$.

Reçu le 3, avril, 1973. Ce travail été rendu possible grâce à des subventions du Conseil des Arts du Canada et du Ministère de l'Éducation du Québec.

Nous donnons maintenant deux définitions qui vont nous permettre d'établir la classification des fonctions $f : E \rightarrow E$ déjà mentionnée.

Définition 1. Une fonction continue f de E dans lui-même est dite ultimement surjective s'il existe un entier positif n_0 et un sous-ensemble J de E tels que, pour tout entier positif k , $f^{n_0+k}(E) = f^{n_0}(E) = J$.

Définition 2. Une fonction continue $f : E \rightarrow E$ est dite ultimement injective s'il existe un entier positif n tel que, pour tout entier positif k et tout couple x, y de points de E , $f^{n+k}(x) = f^{n+k}(y)$ entraîne que $f^n(x) = f^n(y)$.

Remarque. Une fonction ultimement surjective f est ultimement injective si et seulement si elle est une bijection sur l'ensemble $J = f^{n_0}(E)$.

Le reste de cet article décrit le spectre de $[f]$, pour chaque fonction f . Ce travail se divise en trois parties selon que f n'est pas ultimement surjective, qu'elle est à la fois ultimement surjective et ultimement injective, ou qu'elle est ultimement surjective mais non ultimement injective.

1. f n'est pas ultimement surjective. Le résultat que nous obtenons ici repose sur le fait qu'une valeur presque propre est une valeur spectrale. Rappelons qu'une valeur presque propre d'un opérateur $A : T \rightarrow T$ est un nombre complexe λ pour lequel il existe une suite $\{x_n\}$ de points de T , avec $\|x_n\| = 1$ pour chaque n et $\|\lambda x_n - Ax_n\| \rightarrow 0$. (cf. [1, p. 304].)

THÉORÈME 1. Si $f : E \rightarrow E$ n'est pas ultimement surjective alors $\sigma([f]) = D$.

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour chaque λ , $0 < |\lambda| < 1$, il existe une suite $\{g_n\}$ de fonctions de E dans \mathbf{C} telle que $\|g_n\| = 1$ et $\|\lambda g_n - [f]g_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Fixons λ . Si nous construisons une fonction $g_n \in C(E)$ telle que $\|g_n\| = 1$ et telle que $\|\lambda g_n - [f]g_n\| \leq 2|\lambda|^{n+1}$ le théorème aura été démontré.

Considérons les intervalles fermés et emboîtés $E \supset f(E) \supset f^2(E) \supset \dots \supset f^n(E) \supset \dots$. Nous voyons que, pour tout n , $f^{-n}(f^n(E)) = E$. De plus $f^{-n+1}(f^n(E)) \neq E$, car s'il y avait égalité, $f^{n-1}(E) = f^n(E)$ et f serait ultimement surjective. Choisissons $x_n \in E \setminus f^{-n+1}(f^n(E))$.

Maintenant définissons g_n . Prenons n'importe quelle fonction $g_n : f^n(E) \rightarrow \mathbf{C}$ qui satisfait les conditions suivantes:

- (i) $|g_n(x)| \leq |\lambda|^n$ si $x \in f^n(E)$
- (ii) $|g_n(x)| \leq |\lambda|^{n+1}$ si $x \in f^{n+1}(E)$
- (iii) $|g_n(f^n(x_n))| = |\lambda|^n$
- (iv) $g(f(a_n)) = \lambda g(a_n)$
 $g(f(b_n)) = \lambda g(b_n)$ où $f^n(E) = [a_n, b_n]$.

Nous allons prolonger g_n à $[0, 1]$, en plusieurs étapes. D'abord, si $x \in f^{-1}$

$(f^n(E)) \setminus f^n(E)$, posons $g_n(x) = \lambda^{-1}g(f(x))$. g_n est alors bien définies sur $f^{-1}(f^n(E))$ et elle est continue sauf peut-être aux points a_n et b_n . Cependant si $x \rightarrow a_n$, $x \notin f^n(E)$, $g_n(x) \rightarrow \lambda^{-1}g_n(f(a_n)) = g_n(a_n)$. g_n est donc continue au point a_n , et d'une façon analogue au point b_n . Elle est ainsi continue sur $f^{-1}(f^n(E))$ et si x n'est pas un point intérieur de $f^n(E)$, $\lambda g_n(x) = g_n(f(x))$.

Le prolongement de g_n à $E = f^{-n}(f^n(E))$ se fait de manière analogue, étape par étape. Si $k < n$ et si g_n est définie et continue sur $f^{-k}(f^n(E))$, avec $\lambda g_n(x) = g_n(f(x))$ si x n'est pas dans l'intérieur de $f^n(E)$, prolongeons g_n à $f^{-k-1}(f^n(E))$. Posons $g_n(x) = \lambda^{-1}g_n(f(x))$ si $x \in f^{-k-1}(f^n(E)) \setminus f^{-k}(f^n(E))$. Alors g_n est définie sur $f^{-k-1}(f^n(E))$ et elle est continue sauf peut-être aux points de la frontière de $f^{-k}(f^n(E))$. Puisque $f^{-k}(f^n(E)) \supset f^n(E)$, un tel point de la frontière x vérifie $\lambda g(x) = g(f(x))$. Par conséquent la même démonstration que précédemment nous donne que g_n est aussi continue aux points de la frontière de $f^{-k}(f^n(E))$.

Il est donc possible de prolonger g_n à une fonction continue sur E , telle que $\lambda g_n(x) = g_n(f(x))$ sauf si x est à l'intérieur de $f^n(E)$. Remarquons que $\|g_n\| = 1$:

$$\begin{aligned} \|g_n\| &= \sup_{t \in E} |g_n(t)| = \sup_{n=0, \dots, n} \sup_{t \in f^n(E)} |g_n(t)| |\lambda|^{-j} \\ &\leq \sup_{j=0, \dots, n} |\lambda|^{-j} |\lambda|^n = 1 \text{ et} \end{aligned}$$

$$|g_n(x_n)| = |\lambda|^{-n} |g_n(f^n(x_n))| = 1.$$

$\{g_n\}$ est la suite de fonctions recherchée car

$$\begin{aligned} \|\lambda g_n - [f]g_n\| &= \|\lambda g_n - g_n \circ f\| \\ &= \sup_{t \in E} |\lambda g_n(t) - g_n(f(t))| \\ &= \sup_{t \in f^n(E)} |\lambda g_n(t) - g_n(f(t))| \\ &\leq \sup_{t \in f^n(E)} \{|\lambda| |g_n(t)| + |g_n(f(t))|\} \\ &\leq |\lambda| |\lambda|^n + |\lambda|^{n+1} \\ &= 2|\lambda|^{n+1} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. f est ultimement surjective et ultimement injective. Rappelons que de telles fonctions f sont bijectives sur l'ensemble $J = f^{n_0}(E)$ (cf. la définition d'une fonction ultimement surjective). Parmi ces fonctions considérons d'abord les surjections, c'est-à-dire les fonctions qui sont bijectives sur $f^{n_0}(E) = E$. Nous avons le lemme suivant.

LEMME. *Si f est une bijection,*

$$\sigma([f]) \subset S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

Démonstration. Puisque f est une bijection continue sur E , f^{-1} l'est aussi.

Alors $\| [f^{-1}] \| = 1$ et $\sigma([f^{-1}] \subset D$. Mais $[f^{-1}] = [f]^{-1}$, et $\lambda \in \sigma([f]) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma([f]^{-1}) \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Après avoir éliminé deux cas particuliers nous nous apercevrons qu'en général le réciproque du lemme est aussi vrai.

THÉORÈME. *Si $f : E \rightarrow E$ est une bijection le spectre de $[f]$ est*

- (i) $\{1\}$ si $f(x) = x$ pour tout $x \in E$;
- (ii) $\{1, -1\}$ si $f^2(x) = x$ pour tout $x \in E$ et si $f(y) \neq y$ pour un $y \in E$;
- (iii) S^1 si $f^2(x) \neq x$ pour un $x \in E$.

Démonstration. Constatons d'abord que si $\lambda \neq 1$ (resp. $\lambda^2 \neq 1$) l'inverse continu de $\lambda I - [f]$ est $(\lambda - 1)^{-1} [f] = (\lambda - 1)^{-1} I$ (resp. $(\lambda^2 - 1)^{-1} (\lambda I + [f])$) dans i (resp. ii). 1 est une valeur propre de tout opérateur de composition (la fonction constante étant une fonction propre correspondante). Si $f^2(x) = x$ pour tout $x \in E$ et si $f(y) \neq y$ pour un y , f est décroissante. Il y a donc un unique point fixe x_0 , et $x_0 \in (0, 1)$. Soit g une fonction positive sur $(x_0, 1]$ dont la limite à gauche à x_0 est nulle. Prolongeons g à $[0, 1]$ en posant $g(x) = -g(f(x))$ si $x \in [0, x_0)$ et $g(x_0) = 0$. Alors $g(f(x)) = -g(x)$ pour tout $x \in E$.

Maintenant il suffit de montrer que, pour tout $\lambda \in S^1, \lambda \neq 1$, il existe une fonction $h \in C(E)$ qui n'est pas dans l'image de $\lambda I - [f]$, si $f^2(y) \neq y$ pour un $y \in [0, 1]$. Fixons λ et supposons que f est croissante, et y_0 un tel point. Alors les points $y_n = f^n(y_0)$ convergent à un point fixe \bar{x} de f . Choisissons h dans $C(E)$ telle que

- (a) $h(\bar{x}) = 0$,
- (b) $h(y_n) = \lambda^n (n + 1)^{-1}$ pour tout $n > 0$.

Supposons qu'il existe une fonction continue $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $(\lambda I - [f])g = h$. Alors $g(\bar{x}) = (\lambda - 1)^{-1} h(\bar{x}) = 0$ et $g(y_n) \rightarrow 0$ car $y_n \rightarrow \bar{x}$. Posons $M = |g(y_0)| < \infty$.

D'abord, pour tout $t \in E, g(t) = \bar{\lambda}g(f(t)) + \bar{\lambda}h(t)$. Il s'ensuit que $g(y_0) = \bar{\lambda}g(y_1) + \bar{\lambda}h(y_0)$ et, plus généralement, que

$$g(y_0) = \bar{\lambda}g(y_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\lambda}^{i+1} h(y_i).$$

Lorsque $n \rightarrow \infty, \bar{\lambda}^n g(y_n)$ tend vers 0. Cependant

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{\lambda}^{i+1} h(y_i) = \bar{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\lambda}^i \lambda^i (i + 1)^{-1} = \bar{\lambda} \sum_{j=1}^n j^{-1}.$$

Soit m assez grand pour que $|g(y_m)| < M/2$ et pour que $\sum_{j=1}^{m-1} j^{-1} > 2 \text{Max}\{1, M\}$. Alors, si $M \neq 0$,

$$\begin{aligned} M = |g(y_0)| &= |\bar{\lambda}^m g(y_m) + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{m-1} j^{-1}| \\ &\geq \left| \sum_{j=1}^m j^{-1} \right| - |g(y_m)| \geq 2M - M/2 > M. \end{aligned}$$

Si $g(y_0)$ était 0, nous aurions $0 \geq 2$. Les deux cas mènent à des contradictions. Nous en concluons que g n'existe pas et que $\lambda \in \sigma([f])$.

Lorsque f est décroissante et $f^2(y_0) \neq y_0$, les points $f^{2n}(y_0)$ convergent à un point fixe \bar{x} de f^2 et $f^{2n+1}(y_0)$ convergent à $f(\bar{x})$, un autre point fixe de f^2 . Si, dans la preuve pour f croissante, nous choisissons h telle que $h(\bar{x}) = h(f(x)) = 0$ et telle que $h(y_{2n}) = \lambda^{2n}(2n + 1)^{-1}$ et $h(y_{2n+1}) = 0$, la même démonstration, avec quelques légères modifications, assure que h n'est pas dans l'image de $C(E)$ par l'opérateur $\lambda I - [f]$

Si une fonction ultimement injective f est ultimement surjective sans être surjective, son spectre sera déterminé par son action sur l'ensemble $J = f^{n_0}(E)$ où elle est bijective.

THÉORÈME. *Si f est à la fois ultimement surjective et ultimement injective, et si $f(E) \neq E$, $\sigma([f])$ est*

- (i) $\{1, 0\}$ si $f(x) = x$ pour tout $x \in J = f^{n_0}(E)$;
- (ii) $\{1, -1, 0\}$ si $f^2(x) = x$ pour tout $x \in J$ et si $f(y) \neq y$ pour un $y \in J$;
- (iii) $\{0\} \cup S^1$ si $f^2(y) \neq y$ pour un $y \in J$.

Démonstration. (a) Si $f(E) \neq E$ $0 \in \sigma([f])$ car $f(E)^c$ est un ouvert de $[0, 1]$ et il existe une fonction continue $g : E \rightarrow \mathbf{C}$ non identiquement nulle qui s'annule sur $f(E)$, d'où $g(f(x)) = 0 \cdot g(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Il est possible de définir sur J des fonctions continues semblables à celles du théorème précédent, qui s'annulent sur la frontière de J . Elles peuvent être prolongées à $[0, 1]$ en les posant égales à zéro sur J^c . Les nouvelles fonctions prolongées seront alors les fonctions propres associées à 1 ou à -1 (cas (i) ou (ii)) ou des fonctions qui ne sont pas dans l'image de l'opérateur $\lambda I - [f]$, pour $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$ (cas (iii)).

Il s'ensuit que $\sigma([f])$ contient toujours les ensembles dont il est question dans l'énoncé.

(b) Soit $0 < |\lambda| < 1$. Considérons f comme une fonction de J dans lui-même. Alors $\lambda I - [f]$ est inversible sur $C(J)$ en vertu du théorème précédent. Si $h \in C(E)$ soit $g_0 : J \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction $(\lambda I - [f])^{-1}(h|_J)$. Définissons

$$g(x) = (\lambda I - [f])^{-1}(h)(x) = \sum_{i=1}^n \lambda^{-i} h(f^{i-1}(x)) + \lambda^{-n} g_0(f^n(x))$$

(où $f^0(x) = x$ et où $n = n_0$, l'entier minimal tel que $f^{n_0}(E) = J$). g est continue et

$$(\lambda I - [f])g(x) = h(x) - \lambda^{-n} h(f^n(x)) - \lambda^{-n} g_0(f^{n+1}(x)) + \lambda^{-n+1} g_0(f^n(x)) = h(x) \text{ car } f^n(x) \in J.$$

De plus

$$\|(\lambda I - [f])^{-1}h\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda|^{-i} \|h\| + |\lambda|^{-n} \|g_0\|.$$

Puisque $(\lambda I - [f])^{-1}$ est continu sur $C(J)$, $\|g_0\| \leq C\|h|J\| \leq C\|h\|$. Alors

$$\|(\lambda I - [f])^{-1}h\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^{-i} + C|\lambda|^{-n} \right) \|h\|$$

et $(\lambda I - [f])^{-1}$ est continu. Il s'ensuit que $\lambda \notin \sigma([f])$.

Dans le cas i (resp. ii) la preuve que $\lambda I - [f]$ est inversible si $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$ (resp. $\lambda^2 \neq 1$) est analogue à celle que nous venons de faire lorsque $0 < |\lambda| < 1$.

3. f est ultimement surjective mais elle n'est pas ultimement injective. Il ne nous reste plus que ce dernier cas. La démonstration va montrer que chaque λ de module entre 0 et 1 est une valeur propre de $[f]^*$, et par conséquent une valeur spectrale de $[f]$. De ceci nous concluons que $\sigma([f]) = D$.

THÉORÈME. Si $f : E \rightarrow E$ est une fonction ultimement surjective qui n'est pas ultimement injective $\sigma([f]) = D$.

Démonstration. Il suffit de construire, pour chaque $\lambda, 0 < |\lambda| < 1$, une fonctionnelle μ , linéaire et continue sur $C(E)$, telle que $\lambda\mu(g) = \mu(g \circ f)$ pour chaque $g \in C(E)$.

Puisque f n'est pas ultimement injective il existe deux points distincts x_1 et y_1 dans J tels que $f(x_1) = f(y_1)$ (cf. la remarque qui suit les définitions au début de l'article). $f(J) = J$ et, par conséquent, nous pouvons construire deux suites infinies dans J , $\{x_n\}_{n \geq 1}$ et $\{y_n\}_{n \geq 1}$ telles que $f(x_i) = x_{i-1}$ et $f(y_i) = y_{i-1}$ pour tout i, j ($x_0 = y_0 = f(x_1)$). Il est facile de constater que x_1, y_1 , et leurs pré-images peuvent être choisis de telle sorte que tous les points soient distincts.

Fixons $\lambda, 0 < |\lambda| < 1$, et définissons $\tau_\lambda : C[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$\tau_\lambda(h) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i h(x_{i+1}) - \sum_{i \geq 0} \lambda^i h(y_{i+1})$$

pour chaque $h \in C[0, 1]$ τ_λ est bien définie et continue car $|\tau_\lambda(h)| \leq 2\|h\|(1 - |\lambda|)^{-1}$. De plus

$$\begin{aligned} \tau_\lambda(h \circ f) &= \sum_{i \geq 0} \lambda^i [h(f(x_{i+1})) - h(f(y_{i+1}))] \\ &= \sum_{i \geq 0} \lambda^i [h(x_i) - h(y_i)] \\ &= \sum_{i \geq 1} \lambda^i [h(x_i) - h(y_i)] \text{ car } x_0 = y_0 \\ &= \lambda \sum_{i \geq 1} \lambda^{i-1} [h(x_{i+1}) - h(y_{i+1})] \\ &= \lambda \tau_\lambda(h). \end{aligned}$$

Montrons pour terminer que τ_λ n'est pas identiquement nulle. Fixons n_0 pour que $\sum_{i \geq n_0} |\lambda|^i < 1/4$ et soit

$$\delta = \frac{1}{2} \text{Min}\{|x_1 - z| : z = x_j, j = 2, \dots, n_0 \text{ ou } z = y_j, j = 1, \dots, n_0\}$$

$\delta > 0$ car tous les x_i et y_j sont distincts. Choisissons h telle que $\|h\| \leq 1$, $h(x_1) = 1$ et $h(y) = 0$ si $y \notin \{t \in [0, 1] \mid |x_1 - t| < \delta\}$. Alors

$$\tau_\lambda(h) = h(x_1) + \sum_{i \geq n_0} \lambda^i [h(x_{i+1}) - h(y_{i+1})],$$

d'où

$$|\tau_\lambda(h) - 1| \leq 2 \sum_{i \geq n_0} |\lambda|^i < \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

et $\tau_\lambda(h) \neq 0$.

τ_λ est donc la fonctionnelle linéaire recherchée et la preuve est complète.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Bachman et L. Narici, *Functional analysis* (Academic Press, New York, 1966).
2. M. Kuczma, *Functional equations in a single variable* (PWN, Warszawa, 1968).
3. R. B. Montador, *Sur les opérateurs de composition*, Thèse, Université de Montréal, 1972.

*Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Québec*