SUR LE GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL ANALYTIQUE COMPLEXE

AKIHIKO MORIMOTO

1. Dans ce mémoir nous démontrons que le groupe d'automorphismes d'un espace fibré principal analytique complexe à base compacte est un groupe de Lie complexe par la topologie de la convergence compacte et ensuite nous étudierons quelques relations entre le groupe d'automorphismes d'un espace fibré principal analytique complexe et le groupe d'homéomorphisme analytiques de sa base.

2. Soit M une variété différentiable[1] et soit $D(M)$ le groupe d'homéomorphismes différentiables de M. Un sous-ensemble $\{a_t\ ;\ -\infty < t < \infty\}$ de $D(M)$ sera appelé un groupe à un paramètre de transformations de M si $a_t \cdot a_s = a_{t+s}$ et si l'application de $R \times M$ dans M définie par $(t, x) \to a_t x$ est différentiable. Un groupe à un paramètre de transformations a_t définit un champ de vecteurs X sur M tel que

$$X_x f = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_t(x)) - f(x)}{t} .$$

Soit, maintenant, M une variété analytique complexe et soit $a_t(-\infty < t < +\infty)$ un groupe à un paramètre de transformations analytiques (complexes) de M. Soit X le champ de vecteurs sur M défini par a_t. Si l'on désigne par I_M le tenseur de type (1.1) définissant la structure complexe de M, on a $[X, I_M Y] = I_M[X, Y]$ pour tout champs de vecteurs Y sur M. Un champ de vecteurs X sur M qui vérifie cette dernière condition sera appelé un champ de vecteurs *conforme*. On peut dire alors que le champ de vecteurs X défini par un groupe à un paramètre de transformations analytiques de M est conforme. Réciproquement, si M est compacte, tout champ de vecteurs conforme sur M engendre un groupe à un paramètre de transformations analytiques de M. Un champ de vecteurs complexes $\mathfrak{X}$ sera dit holomorphe si $\mathfrak{X}$ s'écrit localement $\mathfrak{X} = \sum_{i=1}^{n} X^i(z^1,$

Received April 6, 1958.

[1] Dans ce mémoir "différentiable" signifie "indéfiniment différentiable."

https://doi.org/10.1017/S002776300002359X Published online by Cambridge University Press

$\ldots, z^n) \frac{\partial}{\partial z^i}$, où $z^1, \ldots, z^n$ désigne un système de coordonnées complexes dans M et où $X^i(z^1, \ldots, z^n)$ sont des fonctions holomorphes de $z^1, \ldots, z^n$. Un champ de vecteurs réels X est conforme si et seulement si X s'écrit $X = \mathfrak{X} + \bar{\mathfrak{X}}$, où $\mathfrak{X}$ est un champ de vecteurs holomorphe et $\bar{\mathfrak{X}}$ désigne le conjugué complexe de $\mathfrak{X}$. Pour X conforme le champ de vecteurs $\mathfrak{X}$ sera appelé la partie holomorphe de X. L'ensemble $\mathfrak{a}(M)$ des champs de vecteurs conformes sur M forme une algèbre de Lie *complexe*. La structure complexe de $\mathfrak{a}(M)$ est donnée par la condition $\sqrt{-1} \cdot X = I_M \cdot X$. L'ensemble $\mathfrak{h}(M)$ des champs de vecteurs holomorphes sur M forme une algèbre de Lie complexe isomorphe à $\mathfrak{a}(M)$: L'isomorphisme est donné par $X \to \mathfrak{X}$. Soit $T(M)$ l'espace fibré tangent de M. $T(M)$ est un espace fibré vectoriel analytique complexe et on peut identifier $\mathfrak{h}(M)$ avec l'espace vectoriel complexe des sections holomorphes de $T(M)$.

3. Soit $P(M, G, \pi)$ un espace fibré principal analytique complexe de base M et de groupe structural G, π étant la projection de P sur M. Une application $\tilde{\alpha} : P \to P$ sera dite un automorphisme de $P(M, G, \pi)$ si $\tilde{\alpha}$ est un homéomorphisme analytique de la variété complexe P et si $\tilde{\alpha}(R_a \cdot x) = R_a \cdot \tilde{\alpha}(x)$ pour tout $x \in P$ et $a \in G$, où R_a désigne la translation à droite par un élément a du groupe structural G. Désignons par $F(P)$ le groupe de tous les automorphismes de P et par $A(M)$ le groupe de tous les homéomorphismes analytiques (complexes) de M munissant de la topologie de la convergence compacte (compact-open topology). Le groupe $F(P)$ (resp. $A(M)$) est alors un groupe topologique de transformations de P (resp. de M). Cela étant dit, nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME. *Soit $P(M, G, \pi)$ un espace fibré principal analytique complexe à base M compacte. Alors le groupe $F(P)$ d'automorphismes de $P(M, G, \pi)$ est un groupe de Lie complexe et l'application de $F(P) \times P$ dans P définie par $(\tilde{\alpha}, x) \to \tilde{\alpha}(x)$ est analytique complexe. De plus l'algèbre de Lie de $F(P)$ s'identifie avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}(P)$ de tous les champs de vecteurs conformes X sur P tels que $R'_a X = X$ pour tout $a \in G$, où R'_a désigne la différentielle de l'application R_a.*

4. Pour démontrer notre théorème rappelons, d'abord, deux théorèmes suivants dus à Bochner-Montgomery [3] :

(A) Si M est une variété analytique complexe compacte le groupe $A(M)$

est un groupe de Lie.

(B) Soit V une variété différentiable connexe. Supposons qu'un groupe topologique H de transformations de V satisfasse à la condition suivante : un élément de H qui laisse fixe chaque point d'un ouvert non vide de V est nécessairement la transformation identique. Dans ce cas, si le groupe H est localement compact, H est un groupe de Lie.

D'après ce qu'on a remarqué au paragraphe 2 on voit que $A(M)$ est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie s'identifie avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(M)$ des champs de vecteurs holomorphes sur M.

5. Nous allons démontrer que $F(P)$ est un groupe de Lie par la topologie de la convergence compacte, en supposant que la base M est compacte.

D'après (A) le groupe $A(M)$ est un groupe de Lie, à fortiori, un groupe localement compact par la topologie de la convergence compacte. On peut donc trouver un nombre fini des compacts L_ν et des ouverts W'_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ dans M tels que

$$\mathfrak{U} = \{\alpha \in A(M) \mid \alpha(L_\nu) \subset W'_\nu, \quad \alpha^{-1}(L_\nu) \subset W'_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, p\}$$

soit un voisinage ouvert dans $A(M)$ dont la fermeture $\overline{\mathfrak{U}}$ est compacte. Prenons des compacts $\tilde{L}_\nu$ dans P $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ tels que $\pi(\tilde{L}_\nu) = L_\nu$. Soit $\{U''_i\}$ un recouvrement fini des voisinages ouverts coordonnés de M tel qu'il existe un homéomorphisme holomorphe $\phi_i : U''_i \times G \to \pi^{-1}(U''_i)$. Désignons par $\{g_{ij}\}$ des fonctions de passage par rapport au recouvrement $\{U''_i\}$:

$$\phi_j(x, g) = \phi_i(x, g_{ij}(x) \cdot g) \qquad x \in U''_i \cap U''_j, \quad g \in G.$$

Choisissons des ouverts U_i, U'_i dans M tels que $U_i \subset \overline{U}_i \subset U'_i \subset \overline{U}'_i \subset U''_i$ où $\overline{U}_i$ est compact et que $M = \bigcup_i U_i$.

Pour un compact K et un ouvert O dans P tels que $K \subset O$ nous posons

$$\mathfrak{U}(K, O) = \{\tilde{\alpha} \in F(P) \mid \tilde{\alpha}(K) \subset O, \quad \tilde{\alpha}^{-1}(K) \subset O\}.$$

Soit f_i la section holomorphe de P sur U''_i définie par

$$f_i(x) = \phi_i(x, a_i) \qquad x \in U''_i,$$

où a_i est un élément de G qui sera bientôt convenablement choisi. Posons $K_i = f_i(\overline{U}_i)$, $O_i = \phi_i(U'_i \times a_i V)$ où V est un voisinage ouvert de l'élément neutre de G tel qu'il existe un voisinage ouvert V' qui est analytiquement homéomorphe

https://doi.org/10.1017/S002776300002359X Published online by Cambridge University Press

à un domaine borné dans C^n $(n=\dim G)$ et qui contient la fermeture $\bar{V}$ de $V: V\subset \bar{V}\subset V'$. Soit W_ν $(\nu=1, 2, \ldots, p)$ un ouvert de M tel que $L\subset W_\nu \subset \bar{W} \subset W'_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, p)$. Maintenant nous posons:

$$\mathfrak{B}=\bigcap_i \mathfrak{U}(K_i, O_i)\cap \bigcap_\nu \mathfrak{U}(\tilde{L}_\nu, \tilde{W}_\nu),$$

où $\tilde{W}_\nu$ est un ouvert de P tel que $\tilde{L}_\nu\subset \tilde{W}_\nu\subset \pi^{-1}(W_\nu)$ $(\nu=1, 2, \ldots, p)$. $\mathfrak{B}$ est, par définition, un voisinage ouvert de l'élément neutre de $F(P)$. Démontrons d'abord que l'on peut trouver, pour toute suite $\{\tilde{\alpha}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ de $\mathfrak{B}$, un élément d'accumulation de $\{\tilde{\alpha}^{(k)}\}$ dans $\bar{\mathfrak{B}}$.

Or, un élément $\tilde{\alpha}$ de $F(P)$ induit un élément α de $A(M)$ tel que

$$\alpha\circ\pi=\pi\circ\tilde{\alpha}.$$

Si $\tilde{\alpha}$ est un élément de $\bar{\mathfrak{B}}$, d'après la définition de $\mathfrak{B}$ on peut écrire comme suit:

$$\tilde{\alpha}(\phi_i(x, a_i))=\phi_i(\alpha(x), a_i\cdot\beta_i(x)) \qquad x\in U_i, \tag{1}$$

où $\beta_i: U_i\to V'$ est une application holomorphe. Puisque $\tilde{\alpha}$ est un automorphisme de P on a l'égalité suivante:

$$g_{ij}(\alpha(x))\cdot\tilde{\beta}_j(x)=\tilde{\beta}_i(x)\cdot g_{ij}(x) \quad \text{pour} \quad x\in U_i\cap U_j, \tag{2}$$

où $\tilde{\beta}_i(x)=a_i\cdot\beta_i(x)\cdot a_i^{-1}$. D'après la manière du choix de $\mathfrak{B}$ l'automorphisme $\alpha^{(k)}$ de M induit par $\tilde{\alpha}^{(k)}$ est contenu dans $\mathfrak{U}$. On peut supposer que $\alpha^{(k)}$ converge vers $\alpha\in A(M)$ par la convergence compacte car $\bar{\mathfrak{U}}$ est compact. Puisque l'égalité (1) est vraie pour $\tilde{\alpha}^{(k)}$ on peut écrire:

$$\tilde{\alpha}^{(k)}(f_i(x))=\phi_i(\alpha^{(k)}(x),\ a_i\beta_i^{(k)}(x)) \qquad x\in U_i,$$

où $B=\{\beta_i^{(k)}\}$ est une famille des applications holomorphes uniformément bornés de U_i dans V', parceque V' est un domaine borné. On peut donc trouver une suite uniformément convergente $\{\beta_i^{(k')}\}$ dans B. Nous pouvons donc supposer que

$$\beta_i^{(k)}\to\beta_i^*$$

par la convergence compacte, où β_i^* est aussi holomorphe. Définissons $\tilde{\alpha}\in F(P)$ par la formule suivante:

$$\tilde{\alpha}(f_i(x)\cdot g)=\phi_i(\alpha(x),\ a_i\beta_i^*(x)\cdot g).$$

Nous remarquons que $\tilde{\alpha}$ est un élément de $F(P)$ bien défini puisque β_i^* satisfait à l'égalité (2). D'après la convergence compacte des suites $\{\alpha^{(k)}\}$ et $\{\beta_i^{(k)}\}$ il est clair que $\tilde{\alpha}^{(k)}$ converge vers $\tilde{\alpha}$ dans $F(P)$.

Pour un compact K et un ouvert O dans P tels que $K \subset O$ désignons par $C(K, O)$ l'ensemble de toutes les applications continues de K dans O. $C(K, O)$ est un espace topologique par la topologie de la convergence compacte. Si O est contenu dans un voisinage coordonné, $C(K, O)$ a une base dénombrable des ouverts car K et O, tous les deux ont telle base. Soit ρ l'application de $\mathfrak{U}(K, O)$ dans $C(K, O)$ qui fait correspondre à un élément $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{U}(K, O)$ sa restriction à K. Si K contient un ouvert non vide l'application ρ est injective. Démontrons le lemme suivant :

LEMMA. *Supposons que la base M soit connexe. Si K contient un ouvert non vide et si O est contenu dans un voisinage coordonné, l'application ρ est une application topologique de $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}(K, O)$ dans $C(K, O)$.*

D'après la définition de la topologie de la convergence compacte ρ est naturellement continue. Pour montrer que ρ est topologique il suffit donc de montrer le fait suivant puisque $C(K, O)$ a une base dénombrable des ouverts : Si, pour une suite $\{\tilde{\alpha}^{(k)}\}$ dans $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}(K, O)$, $\rho(\tilde{\alpha}^{(k)})$ converge vers $\rho(\tilde{\alpha})$ dans $C(K, O)$, $\tilde{\alpha}^{(k)}$ converge nécessairement vers $\tilde{\alpha}$ dans $F(P)$. Si, en effet, la suite $\{\tilde{\alpha}^{(k)}\}$ ne converge pas vers $\tilde{\alpha}$, il existe un voisinage $\tilde{\mathfrak{U}}$ de $\tilde{\alpha}$ dans $F(P)$ et il existe infiniment beaucoup de $\tilde{\alpha}^{(k')}$ dans $\{\tilde{\alpha}^{(k)}\}$ tel que $\tilde{\alpha}^{(k')} \notin \tilde{\mathfrak{U}}$. D'après ce qu'on a déja démontré il existe une sous-suite $\{\tilde{\alpha}^{(k'')}\}$ dans $\{\tilde{\alpha}^{(k')}\}$ qui converge vers un élément $\tilde{\beta}$ dans $\overline{\mathfrak{V}}$. Puisque $\tilde{\alpha}(p) = \tilde{\beta}(p)$ pour tout point p de K et puisque K contient un ouvert non vide de P, on a $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$. En effet, pour le voir, il suffit de démontrer le fait suivant : une transformation $\tilde{\alpha}$ de $F(P)$ qui laisse fixe chaque point d'un ouvert U non vide de P est nécessairement la transformation identique. Soit, en effet, x_0 un point de U. Alors $\tilde{\alpha}$ laisse fixe chaque point de la composante connexe P_{x_0} de P contenant le point x_0. Puisque M est connexe, on sait que $\pi(P_{x_0}) = M$. Il existe donc, pour tout point x de P, un point $x_1 \in P_{x_0}$ et un élément $g \in G$ tels que $x = x_1 \cdot g$. On a alors $\tilde{\alpha}(x) = \tilde{\alpha}(x_1 \cdot g) = \tilde{\alpha}(x_1) \cdot g = x_1 \cdot g = x$. $\tilde{\alpha}$ est donc la transformation identique. Or, l'égalité $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ est contradictoire au fait : $\tilde{\alpha}^{(k')} \notin \tilde{\mathfrak{U}}$, et le lemme est donc démontré.

Puisque $C(K, O)$ a une base dénombrable des ouverts pour un ouvert O contenu dans un voisinage coordonné, $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}(K, O)$ a de même une telle base pour un K contenant un ouvert non vide. D'après ce qu'on a démontré plus haut ce voisinage $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}(K, O)$ de l'élément neutre dans $F(P)$ a donc la fermeture compacte et par suite $F(P)$ est un groupe localement compact.

Nous allons maintenant démontrer que $F(P)$ est un groupe de Lie en supposant que la base M soit connexe. Soit P' une composante connexe de P. Puisque M est connexe, on voit qu'il est possible de trouver les éléments $a_i \in G$ tels que l'image $\{f_i(x) \mid x \in U_i''\}$ de la section f_i est contenue dans P' pour tout indice i, et il est possible, de même, de trouver les ouverts O, O_i et $\tilde{W}_\nu$ contenus dans P', les notations étant celles qui ont été utilisées pour définir le voisinage ouvert $\mathfrak{B}_1$ de $F(P)$. Soit $F'(P)$ le sous-groupe de $F(P)$ des éléments de $F(P)$ qui laissent stable P'. $F'(P)$ est alors un sous-groupe ouvert de $F(P)$ parceque $F'(P)$ contient un ouvert $\mathfrak{U}(\{x_1\}, P')$ où x_1 est un point de P'. Soit $F'(P) \mid P'$ le groupe de transformations de P' constitué par les restrictions sur P' des éléments de $F'(P)$, munissant de la topologie de la convergence compacte. Soit maintenant η l'homomorphisme de $F'(P)$ sur $F'(P) \mid P'$ qui fait correspondre à un élément de $F'(P)$ sa restriction sur P'. D'après ce qu'on a dit dans la démonstration du lemme η est algébriquement un isomorphisme de $F'(P)$ sur $F'(P) \mid P'$, car P' est un ouvert de P. De plus, l'image $\eta(\mathfrak{B}_1)$ de l'application η de $\mathfrak{B}_1$ est un ouvert de $F'(P) \mid P'$ car des ouverts O, O_i et $\tilde{W}_\nu$ sont contenus dans P'. Puisque η est continue et puisque $\mathfrak{B}_1$ a la fermeture compacte, $\eta(\mathfrak{B}_1)$ a aussi la fermeture compacte $\overline{\eta(\mathfrak{B}_1)} = \eta(\overline{\mathfrak{B}_1})$—donc le groupe $F'(P) \mid P'$ est un groupe localement compact et par conséquent un groupe de Lie d'après (B). Puisque $F'(P)$ est localement compact (car $F'(P)$ est un sous-groupe du groupe localement compact $F(P)$), et puisque η est un isomorphisme continu de $F'(P)$ sur le groupe de Lie $F'(P) \mid P'$, on sait que $F'(P)$ lui-même est un groupe de Lie (voir, par exemple, [4] p. 130). Le groupe $F(P)$ est donc un groupe de Lie car $F'(P)$ est un sous-groupe ouvert de $F(P)$.

Dans le cas où la base M n'est pas connexe, nous posons $M = \bigcup_{k=1}^{s} M_k$ où M_k est une composante connexe de M et où $M_k \cap M_{k'} = \phi (k \neq k')$. Soit $F^*(P)$ le sous-groupe ouvert de $F(P)$ des éléments de $F(P)$ qui laissent stable chaque $\pi^{-1}(M_k)$ $(k = 1, \dots, s)$, et soit $F_k(P)$ le sous-groupe de $F^*(P)$ des éléments de $F^*(P)$ qui laissent fixe chaque point de $\bigcup_{k' \neq k} \pi^{-1}(M_{k'})$. $F_k(P)$ est alors canoniquement isomorphe à $F(P_k)$, P_k désignant la restriction de l'espace fibré P sur M_k. D'autre part $F^*(P)$ est isomorphe au produit direct $\prod_{k=1}^{s} F_k(P)$. Puisque chaque $F(P_k)$ est un groupe de Lie d'après ce qu'on a démontré tout à l'heure, le groupe $F^*(P)$ est aussi un groupe de Lie—$F(P)$ est donc aussi un groupe de Lie.

On sait que si un groupe de Lie de transformations G opère continument sur une variété différentiable M, l'opération est nécessairement différentiable: c'est-à-dire l'application $G \times M \to M$ définie par $(g, x) \to g(x)$ est différentiable (voir, par exemple, [2]). Par conséquent on sait que l'application $F(P) \times P \to P$ est différentiable.

6. Pour compléter la démonstration de notre théorème montrons d'abord la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Les notations étant celles du Théorème, soit X un champ de vecteurs sur P. Le champ X engendre un groupe à un paramètre de transformations globales contenu dans $F(P)$ si et seulement si X est conforme et $R'_a X = X$ pour tout $a \in G$.*

Soit $\tilde{\alpha}_t$ un groupe à un paramètre de transformations contenu dans $F(P)$. On a alors $R_a \circ \tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}_t \circ R_a$ pour tout $a \in G$. Soit X le champ de vecteurs défini par $\tilde{\alpha}_t$. D'après la définition même de X on obtient $R'_a X = X$. De plus, $\tilde{\alpha}_t$ étant analytique, X est conforme. La nécessité est donc vérifiée. On va montrer que le champ de vecteurs conforme X sur P qui satisfait à la condition dans la proposition 1 engendre un groupe à un paramètre de transformations globales de P. Pour cela il suffit de démontrer le fait suivant: il existe un nombre réel positif ε tel que, pour *tout point* $x \in P$, il existe une courbe intégrale $x(t)$ du champ du vecteurs X définie pour $|t| < \varepsilon$ et passant par x à $t = 0$: $x(0) = x$.

Pour tout point $y \in P$ désignons par $\phi_t^{(y)}$ le groupe local à un paramètre de transformations locales dans un voisinage suffisamment petit de y engendré par le champs de vecteurs X. Pour tout point $u \in M$ nous choisissons un point $x(u) \in \pi^{-1}(u)$. Il existe alors un nombre positif $\varepsilon(x(u))$ et un voisinage ouvert $\tilde{U}_{x(u)}$ de $x(u)$ tels que $\phi_t^{(x(u))}$ soit défini dans $\tilde{U}_{x(u)}$ pour $|t| < \varepsilon(x(u))$. Si y est un point de $\pi^{-1}(u)$, il existe un élément $a \in G$ tel que $y = x(u) \cdot a$. Il résulte de l'égalité $R'_a X = X$ que $\phi_t^{(y)} = R_a \circ \phi_t^{(x(u))} \circ R_a^{-1}$ et par suite $\phi_t^{(y)}$ est défini dans $\tilde{U}_{x(u)} \cdot a$ pour $|t| < \varepsilon(x(u))$. Posons $U_u = \pi(\tilde{U}_{x(u)})$. Puisque M est compacte il existe un nombre fini de points $u_1, \ldots, u_m$ tel que $M = \bigcup_{i=1}^{m} U_{u_i}$. Soit $\varepsilon = \operatorname{Min}_i \varepsilon(x(u_i))$. Or, pour tout point $x \in P$, il existe un indice i tel que $x \in \pi^{-1}(U_{u_i})$. Il existe alors un élément $a \in G$ tels que $x \in \tilde{U}_{x(u_i)} \cdot a$. Posons $y = x(u_i) \cdot a$, alors $\phi_t^{(y)}$ est défini dans $\tilde{U}_{x(u_i)} \cdot a$ pour $|t| < \varepsilon(x(u_i))$ et donc pour

$|t| < \varepsilon$. Si l'on pose $x(t) = \phi_t^{(y)}(x)$, d'après la définition même de $\phi_t^{(y)}$ la courbe $x(t)$ est une courbe intégrale cherchée de X. On a donc montré que X engendre un groupe à un paramètre de transformations ϕ_t de P qui verifient la condition $R_a \circ \phi_t = \phi_t \circ R_a$ pour tout $a \in G$. Puisque le champ de vecteurs X est conforme la transformation $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ est nécessairement analytique complexe. Le groupe ϕ_t est donc contenu dans $F(P)$. La proposition est ainsi démontrée.

Nous allons maintenant compléter la démonstration de notre théorème. Les champs de vecteurs conformes X sur P tels que $R'_a X = X$ pour tout $a \in G$ forment une algèbre de Lie $\mathfrak{f}(P)$. Soit $\mathfrak{f}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite sur $F(P)$, et soit $\mathfrak{g}(P)$ l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs sur P. L'isomorphisme canonique ψ de $\mathfrak{f}$ dans $\mathfrak{g}(P)$ est défini comme suit: $\psi(\tilde{X})$ $(\tilde{X} \in \mathfrak{f})$ est le champ de vecteurs dans $\mathfrak{g}(P)$ qui engendre le groupe à un paramètre de transformations $\exp(t\tilde{X})$ $(\subset F(P))$ de P. D'après la proposition 1 l'isomorphisme ψ est un isomorphisme de $\mathfrak{f}$ *sur* $\mathfrak{f}(P)$, donc on peut identifier l'algèbre de Lie de $F(P)$ avec $\mathfrak{f}(P)$. Soit, d'autre part, I_P le champ de tenseurs sur P définissant la structure complexe de P. Puisque R_a est une transformation analytique de P, on a $I_P(R'_a X) = R'_a(I_P X)$ pour tout champ de vecteurs X sur P. Il en résulte immédiatement que, pour tout $X \in \mathfrak{f}(P)$ on a $I_P X \in \mathfrak{f}(P)$. Puisque les champs de vecteurs dans $\mathfrak{f}(P)$ sont conformes, on peut définir une structure de l'algèbre de Lie *complexe* dans $\mathfrak{f}(P)$ en posant $\sqrt{-1}X = I_P X$ pour $X \in \mathfrak{f}(P)$. Donc $F(P)$ est un groupe de Lie complexe. On va montrer que l'application φ de $F(P) \times P$ dans P définie par $\varphi(\tilde{\alpha}, x) = \tilde{\alpha}(x)$ est analytique complexe. Soit I_F le champ de tenseurs sur $F(P)$ définissant la structure complexe du groupe de Lie complexe $F(P)$.

Puisque la structure complexe de $F(P)$ a été définie en identifiant $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}(P)$ par l'isomorphisme ψ, on a $\psi(I_F\tilde{X}) = I_P \cdot \psi(\tilde{X})$ pour $\tilde{X} \in \mathfrak{f}$.

Soit maintenant x un point de P. On désignera encore par x l'application de $F(P)$ dans P définie par $x \cdot \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(x)$. Puisque l'on a $x(\exp t\,\tilde{X} \cdot \tilde{\alpha}) = \exp t\,\tilde{X} \cdot \tilde{\alpha}(x)$ on a $x'(\tilde{X}_{\tilde{\alpha}}) = \psi(\tilde{X})_{\tilde{\alpha}(x)}$ pour tout $\tilde{X} \in \mathfrak{f}$ et $\tilde{\alpha} \in F(P)$, où x' désigne la differentielle de l'application x. Il en résulte que $x'((I_F\tilde{X})_{\tilde{\alpha}}) = I_P \cdot x'(\tilde{X}_{\tilde{\alpha}})$ pour tout $\tilde{X} \in \mathfrak{f}$. Pour montrer que $\varphi : F(P) \times P \to P$ est analytique complexe, il suffit de montrer que $\varphi'((I_F\tilde{X})_{\tilde{\alpha}}, I_P X_x) = I_P \cdot \varphi'(\tilde{X}_{\tilde{\alpha}}, X_x)$ en tout point $(\tilde{\alpha}, x)$ de $F(P) \times P$, où $\tilde{X}$ est un élément arbitraire de $\mathfrak{f}$ et X_x désigne un vecteur tangent arbitraire de P au point x; on a identifié l'espace vectoriel tangent $(F(P)\times P)_{(\tilde{\alpha},x)}$ avec le produit $F(P)_{\tilde{\alpha}}\times P_x$.[2] On a

$$\varphi'((I_F\tilde{X})_{\tilde{\alpha}},\ I_PX_x)=\tilde{\alpha}'(I_PX_x)+x'((I_FX)_{\tilde{\alpha}})=I_P\tilde{\alpha}'(X_x)+I_P\cdot x'(\tilde{X}_\alpha)$$
$$=I_P(\varphi'(\tilde{X}_{\tilde{\alpha}},\ X_x)).$$

L'application φ est donc analytique. Le théorème est ainsi démontré.

7. *Relations entre les groupes* $F(P)$ *et* $A(M)$. Dans ce paragraphe, $P(M, G, \pi)$ désigne toujours un espace fibré principal analytique complexe à base M *compacte*. On utilisera les notations introduites aux paragraphes précédents. Désignons par $F_0(M)$ (resp. $A_0(M)$) la composante connexe de l'élément neutre de $F(M)$ (resp. de $A(M)$). Il existe un homomorphisme holomorphe naturel π de $F_0(M)$ dans $A_0(M)$. Si $\tilde{\alpha}\in F(P)$, on a $(\pi\tilde{\alpha})(\pi x)=\pi(\tilde{\alpha}(x))$ pour tout $x\in P$. L'homomorphisme π induit un homomorphisme (complexe) π' de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{f}(P)$ dans l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{a}(M)$. Cet homomorphisme π' est précisément égal à la projection sur M des champs de vecteurs appartenant à $\mathfrak{f}(P)$.

Considérons la suite exacte des espaces fibrés vectoriels analytiques complexes sur M introduite par Atiyah [1]:

$$(1)\qquad 0\longrightarrow L(P)\xrightarrow{j}Q(P)\xrightarrow{\pi}T(M)\longrightarrow 0.$$

$Q(P)$ est défini comme suit: Soit $u\in M$ et soit ξ_u l'ensemble de tous les champs de vecteurs $\{X_x|x\in\pi^{-1}(u)\}$ tangents à P le long de la fibre $\pi^{-1}(u)$ tels que $X_{x\cdot a}=R_a'X_x$ pour tout $x\in\pi^{-1}(u)$ et tout $a\in G$. Un élément de ξ_u sera appelé un champ de vecteurs le long de la fibre $\pi^{-1}(u)$ invariant par G. Soit $Q(P)$ l'ensemble des ξ_u, où u parcourt M. On voit que $Q(P)$ se munit d'une structure d'un espace fibré vectoriel analytique complexe de base M (Atiyah [1]). On vérifie facilement que l'on peut identifier $\mathfrak{f}(P)$ avec l'espace vectoriel des sections holomorphes de $Q(P)$. $T(M)$ est le fibré tangent de M et $L(P)$ est défini comme suit: $L(P)$ est l'ensemble des champs de vecteurs le long d'une fibre de P invariants par G qui sont verticaux, c'est-à-dire leurs projections sur M sont nuls. L'application π est la projection naturelle et j est l'injection de $L(P)$ dans $Q(P)$. On peut identifier $L(P)$ avec l'espace fibré vectoriel de fibre type $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ étant l'algèbre de Lie complexe du groupe structural G) associé à $P(M, G, \pi)$ par la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}$. La suite

[2] On désignera par M_x l'espace vectoriel tangent d'une variété M au point x.

https://doi.org/10.1017/S002776300002359X Published online by Cambridge University Press

(1) induit la suite exacte de cohomologie:

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow H^0(M, \mathbf{L}(P)) \xrightarrow{j^*} H^0(M, \mathbf{Q}(P)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(M, \mathbf{T}(M)) \xrightarrow{\delta^*} H^1(M, \mathbf{L}(P)) \longrightarrow \dots$$

(Pour un espace fibré vectoriel analytique complexe E on désignera par $\mathbf{E}$ le faisceau des germes de sections holomorphes de E). Comme on a déjè remarqué plus haut, on peut identifier $\mathfrak{f}(P)$ avec $H^0(M, \mathbf{Q}(P))$ et $\mathfrak{a}(M)$ avec $H^0(M, \mathbf{T}(M))$ de telle manière que le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^0(M; \mathbf{Q}(P)) \arrow[r, "\pi^*"] & H^0(M, \mathbf{T}(M)) \\ \mathfrak{f}(P) \arrow[u] \arrow[r, "\pi'"] & \mathfrak{a}(M) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Puisque la suite (2) est exacte, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *La dimension complexe du noyau de l'homomorphisme* $\pi : F_0(P) \to A_0(M)$ *est égale à la dimension complexe de l'espace vectoriel complexe des sections holomorphes de* $L(P)$. *L'homomorphisme* $\pi : F_0(P) \to A_0(M)$ *est surjectif si et seulement si* $\delta^*(H^0(M, \mathbf{T}(M))) = (0)$.

On va montrer maintenant la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *L'homomorphisme* $\pi : F_0(P) \to A_0(M)$ *est surjectif si une des conditions suivantes soit satisfaite:*

1) *Il existe une connexion holomorphe dans* $P(M, G, \pi)$.

2) M *est une variété kaehlerienne à premier nombre de Betti nul et le groupe structural* G *est nilpotent.*

Supposons qu'il existe une connexion holomorphe sur $P(M, G, \pi)$. Alors l'homomorphisme $H^0(M, \mathbf{Q}(P)) \to H^0(M, \mathbf{T}(M))$ est surjectif et donc $\pi : F_0(P) \to A_0(M)$ est surjectif. En effet, d'après Atiyah [1], l'existence d'une connexion holomorphe sur $P(M, G, \pi)$ implique l'existence d'un homomorphisme η de l'espace fibré vectoriel analytique $T(M)$ dans l'espace fibré vectoriel analytique $Q(P)$ tel que $\pi \circ \eta = 1$.

Supposons maintenant que la condition 2) soit vérifiée. On va démontrer que $H^1(M, \mathbf{L}(P)) = (0)$. Supposons d'abord que G soit abélien. Alors la représentation adjointe de G est triviale. Donc $L(P)$ est analytiquement équivalent au produit direct $M \times \mathfrak{g}$ et par suite $\mathbf{L}(P)$ est égal au faisceau $\Omega^0(\mathfrak{g})$ des germes

https://doi.org/10.1017/S002776300002359X Published online by Cambridge University Press

de fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathfrak{g}$ sur M. D'autre part, d'après un théorème de Dolbeault [5], $H^1(M, \Omega^0(\mathfrak{g}))$ est isomorphe à l'espace vectoriel complexe $H^{0,1}(M) \otimes_C \mathfrak{g}$, où $H^{0,1}(M)$ désigne l'espace vectoriel complexe des formes harmoniques de type $(0, 1)$ de M. Puisque l'on a supposé que le premier nombre de Betti de M soit nul, on a $H^{0,1}(M) = (0)$ et par suite $H^1(M, \Omega^0(\mathfrak{g})) = H^1(M, \mathbf{L}(P)) = (0)$. Dans le cas général nous montrons que $H^1(M, \mathbf{L}(P)) = (0)$ par récurrence sur la dimension complexe de G. Si la dimension complexe de G est égale à 1, G est abelien et par suite on a $H^1(M, \mathbf{L}(P)) = (0)$. Supposons que l'on ait $H^1(M, \mathbf{L}(P)) = (0)$ pour tout espace fibré $P(M, G)$ tel que G soit nilpotent et que la dimension complexe de G soit plus petite que n (>1). Soit $P(M, G)$ un espace fibré principal analytique dont la dimension du groupe structural G est égale à n. Soit Z le centre de G. G étant nilpotent Z est un sous-groupe complexe et fermé de dimension positive de G. Posons $G' = G/Z$. Soit $P(M, G, \pi)/Z$ le quotient de $P(M, G, \pi)$ par la relation d'équivalence $x \sim x \cdot z$ $(x \in P, z \in Z)$. $P(M, G, \pi)/Z$ est un espace fibré principal analytique de base M, de groupe structural G', que nous désignerons par $P'(M, G', \pi')$. Soit $\varphi : P \to P'$ et $\varphi : G \to G'$ les projections canoniques. On a alors $\pi'(\varphi(x)) = \pi(x)$ et $\varphi(xa) = \varphi(x) \cdot \varphi(a)$ pour tout $x \in P$ et tout $a \in G$. Soit $L(P')$ l'espace fibré vectoriel analytique de fibre type $\mathfrak{g}'$ ($\mathfrak{g}'$ étant l'algèbre de Lie de G') associé à P' par la représentation adjointe de G' dans $\mathfrak{g}'$. On désignera encore par φ la projection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$. L'application φ induit un homomorphisme φ de l'espace fibré vectoriel $L(P)$ sur l'espace fibré vectoriel $L(P')$. Cet homomorphisme φ peut être défini de la façon suivante: Soient $\rho : P \times \mathfrak{g} \to L(P)$ et $\rho' : P' \times \mathfrak{g}' \to L(P')$ les projections canoniques.[3] On définit $\varphi : L(P) \to L(P')$ par $\varphi(\rho(x, \xi)) = \rho'(\varphi(x), \varphi(\xi))$ pour tout $x \in P$ et tout $\xi \in \mathfrak{g}$. Cette définition consiste en vue des égalités $\varphi(x \cdot a) = \varphi(x) \cdot \varphi(a)$ et $\varphi(\mathrm{ada} \cdot \xi) = \mathrm{ad}(\varphi(a)) \cdot \varphi(\xi)$ $(x \in P, a \in G, \xi \in \mathfrak{g})$. Soit maintenant $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et soit $Z(P)$ l'espace fibré vectoriel analytique de fibre type $\mathfrak{z}$ associé à P par la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{z}$. On peut définir l'isomorphisme j de $Z(P)$ dans $L(P)$. On a alors la suite exacte des espace fibrés vectoriels:

$$0 \longrightarrow Z(P) \xrightarrow{j} L(P) \xrightarrow{\varphi} L(P') \longrightarrow 0, \tag{3}$$

[3] Remarquons que $L(P)$ est le quotient de l'espace $P \times \mathfrak{g}$ par la relation d'équivalence $(x, \xi) \sim (x \cdot a, \mathrm{ad}(a^{-1})\xi)$ $(x \in P, \xi \in \mathfrak{g}, a \in G)$.

qui induit la suite exacte de cohomologie :

$$(4) \qquad \ldots \longrightarrow H^1(M, \mathbf{Z}(P)) \xrightarrow{j^*} H^1(M, \mathbf{L}(P)) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(M, \mathbf{L}(P')) \longrightarrow \ldots$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a $H^1(M, \mathbf{L}(P')) = (0)$. D'autre part, $\mathfrak{z}$ étant le centre de $\mathfrak{g}$, la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{z}$ est triviale. Donc $Z(P)$ est analytiquement isomorphe au produit direct $M \times \mathfrak{z}$. Il en résulte que le faisceau $\mathbf{Z}(P)$ est égale au faisceau $\Omega^0(z)$ des germes de fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathfrak{z}$ sur M. On a alors $H^1(M, \mathbf{Z}(P)) = H^{0,1}(M) \otimes_C \mathfrak{z} = (0)$. Il résulte alors de la suite exacte (4) que $H^1(M, \mathbf{L}(P)) = (0)$. On a donc démontré que $H^1(M, \mathbf{L}(P)) = (0)$. Il résulte de là et de la suite exacte (2) que l'homomorphisme $H^0(M, \mathbf{Q}(P)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(M, \mathbf{T}(M))$ est surjectif et donc que l'homomorphisme $\pi : F_0(M) \rightarrow A_0(M)$ est surjectif.

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah, Complex analytic connections in fiber bundles, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **84** (1957).

[2] S. Bochner and D. Montgomery, Groups of differentiable and real or complex analytic transformations, Ann. of Math., Vol. **46** (1945).

[3] S. Bochner and D. Montgomery, Locally compact groups of differentiable transformations, Ann. of Math., Vol. **47** (1946).

[4] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton (1946).

[5] P. Dolbeault, Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe I, Ann. of Math., Vol. **64** (1956).

Université de Nagoya