AXIOMATIQUE DES LATTICES DISTRIBUTIVES

R. CROISOT

CETTE note a pour principal objet de répondre à deux questions posées par G. Birkhoff.[1]

§1

THÉORÈME 1. *Les lattices distributives avec O et I sont exactement les systèmes algébriques avec une opération ternaire* (a, b, c) *et des éléments O et I tels que*:

$$(O, a, I) = a, \tag{1.1}$$

$$(a, b, a) = a, \tag{1.2}$$

$$(d, (a, b, c), e) = (b, (c, d, e), (a, d, e)). \tag{1.3}$$

(*On définit* $a \cup b = (a, I, b)$ *et* $a \cap b = (a, O, b)$. *Alors* $(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$.) *De plus, les axiomes* (1.1), (1.2), (1.3) *sont indépendants.*

Je ramène la démonstration à celle du théorème 4, p. 137.[1] Les axiomes du théorème 4 entraînent évidemment les précédents. Etablissons la réciproque. On a successivement:

Par (1.2), (1.3), (1.2),

$$a = (a, (a, b, a), a) = (b, (a, a, a), (a, a, a)) = (b, a, a). \tag{1.4}$$

Par (1.4), (1.3), (1.2),

$$(a, d, e) = (b, (a, d, e), (a, d, e)) = (d, (a, b, a), e) = (d, a, e). \tag{1.5}$$

Par (1.1), (1.3), (1.5), (1.1),

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= (O, (a, b, c), I) = (b, (c, O, I), (a, O, I)) \\ &= (b, (O, c, I), (O, a, I)) = (b, c, a).\end{aligned} \tag{1.6}$$

L'axiome (17) du théorème 4 résulte alors directement de (1.3), (1.5), (1.6). L'indépendance des axiomes est prouvée par les contre-exemples suivants:

$E_1 = \{O, I\}$ avec $(a, b, c) = c$.

$E_2 = \{O, x, I\}$ avec $(a, b, c) = x$ si au moins un des trois éléments a, b, c est x; sinon, $(a, b, c) = O$ ou I selon que au moins deux ou moins de deux des trois éléments sont O.

Reçu le 26 janvier, 1950.

[1]G. Birkhoff, *Lattice theory*, (2ième ed.) 1949, Amer. Math. Soc. Colloquium publications, vol. XXV. Problèmes 64 et 65, pp. 138 et 139. Pendant l'impression de cette note, Ph. Vassiliou m'a communiqué une solution voisine du problème 64. Cette solution est publiée par l'Université technique nationale d'Athènes, nº 5, 1950.

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-002-9 Published online by Cambridge University Press

$E_3 = \{O, I\}$ avec $(I, I, O) = O$; $(I, O, O) = I$; sinon, $(a, b, c) = O$ ou I comme dans E_2.

§2

Par la même méthode, on déduit du système de 5 postulats des algèbres de Boole de Grau[2] un système de 2 postulats (indépendants).

D'après Grau, un système algébrique avec une opération ternaire (a, b, c) dans lequel, pour tout a, existe au moins un complément a', avec les propriétés:

$$\begin{aligned} ((a, b, c), d, e) &= ((a, d, e), b, (c, d, e)), \\ (b, b, a) &= (a, b, b) = b, \\ (b', b, a) &= (a, b, b') = a, \end{aligned}$$

peut être organisé en algèbre de Boole (et réciproquement).

Je remplace ces postulats par les suivants:

$$(d, e, (b, a, c)) = (b, (e, d, c), (d, e, a)), \tag{2.1}$$

$$(b, a, b') = a. \tag{2.2}$$

D'après les résultats de Grau, ce système est conséquence du précèdent. La réciproque est vraie; on a successivement:

Par (2.2), (2.2), (2.1), (2.2),

$$\begin{aligned} a &= (b, a, b') = (b, a, (a, b', a')) \\ &= (a, (a, b, a'), (b, a, b')) = (a, b, a). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par (2.3), (2.1), (2.3),

$$\begin{aligned} (b, a, a) = (b, a, (a, b, a)) &= (a, (a, b, a), (b, a, b)) \\ &= (a, a, b). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Par (2.3), (2.1), (2.4), (2.1), (2.3), (2.3),

$$\begin{aligned} (b, a, a) &= (b, (a, a, a), (a, a, a)) = (a, a, (b, a, a)) \\ &= (a, a, (a, a, b)) = (a, (a, a, b), (a, a, a)) \\ &= (a, (a, a, b), a) = a. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Par (2.5), (2.1), (2.4), (2.5),

$$(a, b, c) = (a, b, (x, c, c)) = (x, (b, a, c), (a, b, c)) = (b, a, c), \tag{2.6}$$

si on prend $x = (b, a, c)$.

Par (2.2), (2.2), (2.6), (2.1), (2.6), (2.2), (2.3),

$$\begin{aligned} a &= (b, a, b') = (b, a, (b, b', b')) = (b, a, (b', b, b')) \\ &= (b', (a, b, b'), (b, a, b)) = (b', (b, a, b'), (b, a, b)) \\ &= (b', a, b). \end{aligned} \tag{2.7}$$

[2]A. A. Grau, *Ternary Boolean Algebra*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 53 (1947), pp. 567-572.

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-002-9 Published online by Cambridge University Press

Par (2.2), (2.7), (2.1), (2.5), (2.2),

$$(2.8) \qquad a = (b, a, b') = (b, a, (b', b', b)) = (b', (a, b, b), (b, a, b')) \\ = (b', b, a).$$

Par (2.8), (2.1), (2.6), (2.8),

$$(2.9) \qquad (a, b, c) = (x', x, (a, b, c)) = (a, (x, x', c), (x', x, b)) \\ = (a, c, b).$$

De (2.6) et (2.9), on déduit facilement tous les axiomes de Grau.

Les axiomes (2.1) et (2.2) sont indépendants:

$$E_1 = \{O, I\} \text{ avec } (x, y, z) = y.$$
$$E_2 = \{O, I\} \text{ avec } (x, y, z) = O.$$

§3

En ce qui concerne le problème 65 de Birkhoff, j'établis que les postulats du théorème 3 sont indépendants, puis je montre qu'une modification convenable de l'un d'eux permet d'en supprimer trois autres. Le théorème 3 peut s'énoncer ainsi:

Un système algébrique qui satisfait les axiomes (S):

(3.1) $a \cap a = a,$

(3.2α) $a \cup I = I$ pour un I,

(3.2β) $I' \cup a = I'$ pour un I',

(3.3α) $a \cap J = a$ pour un J,

(3.3β) $J' \cap a = a$ pour un J'

(on voit de suite que $I = I'$ et $J = J'$),

(3.2–3.3) $I = J,$

(3.4α) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c),$

(3.4β) $(b \cup c) \cap a = (b \cap a) \cup (c \cap a)$

est une lattice distributive avec I.

Théorème II. *Les axiomes précédents sont indépendants.*

E_1:

$\cap$	a	b	I
a	a	a	a
b	a	a	b
I	a	b	I

$\cup$	a	b	I
a	a	b	I
b	b	b	I
I	I	I	I

$E_{4\alpha}$:

$\cap$	a	b	I
a	a	b	a
b	a	b	b
I	a	b	I

$\cup$	a	b	I
a	a	b	I
b	a	b	I
I	I	I	I

$E_{2\alpha}$:

$\cap$	a	I
a	a	a
I	a	I

$\cup$	a	I
a	a	a
I	I	I

$E_{3\alpha}$:

$\cap$	a	I
a	a	I
I	a	I

$\cup$	a	I
a	a	I
I	I	I

E_{2-3}:

$\cap$	I	J
I	I	I
J	I	J

$\cup$	I	J
I	I	I
J	I	I

$E_{2\beta}$, $E_{3\beta}$, $E_{4\beta}$: anti-isomorphes de $E_{2\alpha}$, $E_{3\alpha}$, $E_{4\alpha}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-002-9 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME III. *Le système d'axiomes* (S) *est équivalent au système* (S') *d'axiomes également indépendants*:

(3.1), (3.2α), (3.3α), (3.2–3.3) et

$$a \cap (b \cup c) = (c \cap a) \cup (b \cap a). \tag{3.4'}$$

Il suffit d'établir que (S') entraîne (S). On établit successivement:

Par (3.3α), (3.2–3.3), (3.2α), (3.4′),

$$a = a \cap (I \cup I) = (I \cap a) \cup (I \cap a). \tag{3.5}$$

Par (3.4′), (3.3α),

$$I \cap (a \cup a) = (a \cap I) \cup (a \cap I) = a \cup a. \tag{3.6}$$

Par (3.5), (3.6), (3.5),

$$I \cap a = I \cap [(I \cap a) \cup (I \cap a)] = (I \cap a) \cup (I \cap a) = a. \tag{3.3β}$$

Par (3.3α), (3.2α), (3.4′), (3.3β), (3.1),

$$a = a \cap I = a \cap (a \cup I) = (I \cap a) \cup (a \cap a) = a \cup a. \tag{3.7}$$

Par (3.7), (3.4′), (3.7),

$$a \cap b = a \cap (b \cup b) = (b \cap a) \cup (b \cap a) = b \cap a. \tag{3.8}$$

Par (3.3β), (3.4′), (3.3α),

$$b \cup c = I \cap (b \cup c) = (c \cap I) \cup (b \cap I) = c \cup b. \tag{3.9}$$

Alors, (3.2β) résulte de (3.9); (3.4α) et (3.4β) résultent de (3.4′), (3.8), (3.9).

Les contre-exemples suivants montrent l'indépendance:

E'_1 et E'_{2-3}: E_1 et E_{2-3}.

$$E'_{2\alpha}: \begin{array}{c|cc} \cap & a & I \\ \hline a & a & a \\ I & a & I \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cup & a & I \\ \hline a & a & a \\ I & a & a \end{array} \qquad E'_3: \begin{array}{c|cc} \cap & a & I \\ \hline a & a & I \\ I & a & I \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cup & a & I \\ \hline a & I & I \\ I & I & I \end{array} \qquad E'_4: \begin{array}{c|cc} \cap & a & I \\ \hline a & a & a \\ I & I & I \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cup & a & I \\ \hline a & I & I \\ I & I & I \end{array}$$

Tous les contre-exemples utilisés sont tels qu'il n'en existe pas avec un nombre moindre d'éléments. Pour E_1 et $E_{4\alpha}$, il n'existe pas de contre-exemple avec 2 éléments seulement.

Université de Poitiers, France

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-002-9 Published online by Cambridge University Press