M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 51 (1973), 45–56

SUR UNE FAMILLE SOUS-ORDONNÉE AU NOYAU DE CONVOLUTION DE HUNT DONNÉ

dédié à M. le professeur Yukinari Tôki à l'occasion de sa 60ème année

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction

Soient X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini, et ξ sa mesure de Haar. Dans la théorie du potentiel, un noyau de convolution N sur X signifie une mesure de Radon positive dans X. Pour une mesure de Radon réelle μ dans X, $N * \mu$ s'appelle le N-potentiel de μ dès que cette convolution a un sens.

On dit qu'un noyau de convolution N sur X satisfait au principe de domination si, quelles que soient φ, ψ de $C_K^+(X)$, $N * \varphi \leqq N * \psi$ sur X dès que la même inégalité a lieu sur le support de φ, supp (φ). On note ici $C_K(X)$ et $C_K^+(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans X à support compact et son cône convexe des fonctions non-négatives, respectivement.

On connaît que, sous une condition additionelle, N satisfait au principe de domination si et seulement si N est un noyau de convolution de Hunt. Un noyau de convolution de Hunt N sur X est, par définition, de la forme $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$, où $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans X; c'est-à-dire, $\alpha_0 =$ la mesure deDirac ε, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ pour tous $t \geqq 0$, $s \geqq 0$ et l'application $R^+ = [0, +\infty) \ni t \to \alpha_t$ est vaguement continue. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est uniquement déterminé, qui s'appelle le semi-groupe associé au noyau N.

On dit qu'une mesure de Radon réelle μ dans X est bornée si, quelle que soit φ de $C_K(X)$, $\mu * \varphi$ est bornée sur X. On note $M_b^+(R^+)$ la totalité des mesures positives bornées dans la droite réelle R et portées par R^+.

Received September 29, 1972.

https://doi.org/10.1017/S0027763000015713 Published online by Cambridge University Press

Pour un noyau de convolution de Hunt $N=\int_0^\infty \alpha_t dt$ sur X et pour une mesure positive λ de $M_b^+(R^+)$, le noyau de convolution

$$N_{(\lambda)}=\int \alpha_t d\lambda(t)$$

sur X a un sens. On note

$$D(N\,;X)=\{N_{(\lambda)}\in D(X)\,;\lambda\in M_b^+(R^+)\}\ ,$$

où $D(X)$ est la totalité des noyaux de convolution sur X satisfaisant au principe de domination, et $D(N\,;X)$ s'appellera la famille sous-ordonnée au noyau N. Cette note sera consacrée à sa caractérisation.

THÉORÈME. Soit λ une mesure positive de $M_b^+(R^+)$; alors pour que, quels que soient X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini et N un noyau de convolution de Hunt sur X, $N_{(\lambda)}$ appartienne à $D(N\,;X)$, il faut et il suffit que le noyau de convolution λ sut R satisfasse au principe de domination. Dans ce cas, λ est un noyau de convolution de Hunt sur R ou 0.

Dans les articles [2] et [3], on discute que, pour un noyau de convolution de Hunt sur X, la somme linéaire de puissances fractionnaires de N satisfait aussi au principe de domination dès que cela a un sens. Mais nous connaissons maintenant que cela est un résultat immédiat de l'énoncé suivant (cf. [4]):

Soit $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau N; alors, quelle que soit λ ($\neq 0$) une mesure positive sur R^+ de masse totale finie, $\int N_p d\lambda(p)$ est aussi un noyau de convolution de Hunt sur X.

Si $N=\int_0^\infty \alpha_t dt$, alors

$$\int N_p d\lambda(p)=\iint_0^\infty \exp(-tp)\alpha_t dt d\lambda(p)=\int_0^\infty \alpha_t dt\int \exp(-tp)d\lambda(p)\ .$$

En utilisant notre théorème, le présent énoncé déduit immédiatement du principe de domination pour le noyau-fonction

$$K_\lambda(t)=\begin{cases}\int \exp(-tp)d\lambda(p) & t\geqq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

sur R. Cela résulte de la théorie générale, et on peut l'obtenir aussi par le calcul élémentaire (cf. [7]).

Notre méthode est encore valable pour les noyaux de Hunt (non-convolution) sur un espace localement compact et dénombrable à l'infini.

2. La démonstration du théorème

Commençons d'abord avec quelques lemmes suivants.

LEMME 1. *Soient* $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ *un noyau de convolution de Hunt sur* X *et* λ *une mesure positive de* $M_b^+(R^+)$; *alors le noyau de convolution* $N_{(\lambda)} = \int_0^\infty \alpha_t dt$ *sur* X *a un sens.*

En effet, quelle que soit f de $C_K^+(R)$ portée par R^+, $f*\lambda$ est bornée sur R et $\operatorname{supp}(f*\lambda) \subset R^+$. Donc, quelle que soit φ de $C_K^+(X)$,

$$+\infty > \int \alpha_t * \varphi * \varphi(x)(f*\lambda)(t)dt = \iint \alpha_{t+s} * \varphi * \varphi(x) f(t) dt d\lambda(s)$$
$$= \left(\int \alpha_t * \varphi f(t) dt\right) * \left(\int \alpha_s * \varphi d\lambda(s)\right)(x)$$

pour tout x de X, d'où $N_{(\lambda)}$ a un sens.

LEMME 2. *Soit* λ *une mesure positive* ($\neq 0$) *de* $M_b^+(R^+)$ *de masse totale finie; supposons que, quels que soient* X *un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini et* N *un noyau de convolution borné de Hunt sur* X, $N_{(\lambda)}$ *est aussi un noyau de convolution de Hunt sur* X. *Si* N *est de la forme*

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma)^n ,$$

où σ *est une mesure de Radon positive dans* X *de masse totale* $\leqq 1$, *alors on a*

$$N_{(\lambda)} = c \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sigma)^n \right)^m ,$$

où c *et* a_n ($n = 0, 1, 2, \cdots$) *sont constantes non-négatives avec* $\sum_{n=0}^\infty a_n \leqq 1$.

On note $(\sigma)^0 = \varepsilon$, la mesure de Dirac à l'origine, et $(\sigma)^n = (\sigma)^{n-1} * \sigma$ ($n \geqq 1$). Un noyau de convolution N sur X est élémentaire s'il est de la forme $N = c \sum_{n=0}^\infty (\sigma)^n$, où c et σ sont respectivement une constante positive et une mesure de Radon positive dans X. Cela est toujours un noyau de convolution de Hunt (cf. [1]).

Montrons le présent lemme. Soit Z le groupe des entiers; posons $\tilde{N} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$, où ε_n est la masse d'unité au point n. Alors $\tilde{N}$ est un noyau de convolution de Hunt sur Z. D'après notre hypothèse, $\tilde{N}_{(\lambda)}$ est aussi un noyau de convolution de Hunt sur Z. Evidemment $\tilde{N}_{(\lambda)}(\{0\}) > 0$, et donc $\tilde{N}_{(\lambda)}$ est élémentaire. On a, d'autre part, supp $(\tilde{N}_{(\lambda)}) \subset Z^+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$, car, quel que soit $t \geqq 0$, $Z^+ =$ supp $(\tilde{N}) \supset$ supp $(\tilde{\alpha}_t)$, où $(\tilde{\alpha}_t)_{t \geqq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau $\tilde{N}$. $\tilde{N}$ étant borné, $\tilde{N}_{(\lambda)}$ est aussi borné. Donc il existe constantes non-négatives c et a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqq 1$ telles que

$$\tilde{N}_{(\lambda)} = c \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n \right)^m = c \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varepsilon_1)^n \right)^m .$$

L'inégalité $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqq 1$ résulte du fait que $\tilde{N}_{(\lambda)}$ est borné (cf. [6]). Soit $N = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma)^n$ le noyau de convolution élémentaire dans notre lemme. On peut écrire

$$N_{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\sigma)^n ,$$

où b_n est constant $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, car

$$\alpha_t = \exp(-t(\varepsilon - \sigma)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n (\varepsilon - \sigma)^n}{n!} .$$

On a aussi

$$\tilde{N}_{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\varepsilon_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n .$$

En comparant coéfficients, on a

$$N_{(\lambda)} = c \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sigma)^n \right)^m .$$

LEMME 3. *Soit λ la même que ci-dessus et supposons les mêmes conditions que ci-dessus. Alors, quels que soient X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini et N un noyau de convolution (non-borné) de Hunt sur X, $N_{(\lambda)}$ satisfait aussi au principe de domination.*

En effet, posons $N = \int_0^{\infty} \alpha_t dt$ et, quel que soit $p > 0$, $N_p = \int_0^{\infty} \exp(-tp) \alpha_t dt$; on a alors

https://doi.org/10.1017/S0027763000015713 Published online by Cambridge University Press

$$N + \frac{1}{p}\varepsilon = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(pN_p)^n .$$

$pN + \varepsilon$ étant aussi un noyau de convolution de Hunt sur X, on désigne par $(\alpha_{p,t})_{t \geqq 0}$ le semi-groupe associé au noyau $pN + \varepsilon$. On a aussi

$$\alpha_{p,t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n(\varepsilon - pN_p)^n}{n\,!} ,$$

et donc

$$(pN + \varepsilon)_{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(pN_p)^n ,$$

où b_n est la constante dans le lemme 2 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. On remarque ici que lorsque l'on écrit

$$\alpha_{p,t} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)(pN_p)^n ,$$

$f_n(t) \geqq 0$ sur R^+ pour tout entier $n \geqq 0$ (cf. le noyau de convolution de Hunt $\tilde{N}$ sur Z). Soient c et a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ aussi les constantes dans le lemme 1. En comparant coéfficients, on obtient que $\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(pN_p)^n)^k$ a un sens et

$$(pN + \varepsilon)_{(\lambda)} \geqq c\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(pN_p)^n\right)^k ,$$

d'où $\sum_{m=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(pN_p)^n)^m$ a un sens. En comparant encore coéfficients, on a

$$(pN + \varepsilon)_{(\lambda)} = c\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(pN_p)^n\right)^m ,$$

d'où $(N + (1/p)\varepsilon)_{(\lambda)}$ est un noyau de convolution élémentaire sur X. Il est évident que $(N + (1/p)\varepsilon)_{(\lambda)}$ converge vaguement vers $N_{(\lambda)}$ avec $p \to +\infty$. Donc, pour le principe de domination pour $N_{(\lambda)}$, il suffit de voir le lemme suivant:

LEMME 4. *Soit $(N_m)_{m=1}^{\infty}$ une suite de noyaux de convolution sur X satisfaisant au principe de domination. Si elle converge vaguement vers un noyau de convolution N sur X avec $n \to +\infty$, alors N satisfait aussi au principe de domination.*

Cela est presque connu, et nous faisons seulement quelques remarques.

https://doi.org/10.1017/S0027763000015713 Published online by Cambridge University Press

Pour le principe de domination pour N, il suffit de voir que, quelles que soient φ, ψ de $C_K^+(X)$,

$$N*\varphi < N*\psi \text{ sur supp}(\varphi) \Rightarrow N*\varphi \leqq N*\psi \text{ sur } X$$

(cf. [6]). D'autre part, la suite $(N_m*\varphi)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $N*\varphi$ sur tout compact dans X avec $m \to +\infty$.

LEMME 5. *Soit λ $(\neq 0)$ un noyau de convolution sur R qui appartient à $M_b^+(R^+)$. S'il satisfait au principe de domination, alors λ est un noyau de convolution de Hunt sur R.*

On a, quelle que soit φ de $C_K(R)$,

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\operatorname{supp}(\lambda)}} \lambda*\varphi(-x) = 0 .$$

D'après le théorème obtenu dans [6], λ est un noyau de convolution de Hunt.

Répétons encore notre théorème principal.

THÉORÈME 1. *Soit λ une mesure positive de $M_b^+(R^+)$; alors pour que, quels que soient X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini et N un noyau de convolution de Hunt sur X, $N_{(\lambda)}$ appartienne à $D(N;X)$, il faut et il suffit que le noyau de convolution λ sur R satisfasse au principe de domination.*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est suffisante. Supposons que $\lambda\in M_b^+(R^+)$ satisfait au principe de domination. Alors, d'après le lemme 5, λ est un noyau de convolution de Hunt sur R ou 0. Evidemment on peut supposer $\lambda\neq 0$. Soit $N=\int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution sur X. Pour le principe de domination pour $N_{(\lambda)}=\int_0^\infty \alpha_t d\lambda(t)$, d'après le lemme 3, on peut supposer que N est borné. En considérant la résolvante associée à N et la résolvante associée à λ, on peut supposer ensuite que $\int dN < +\infty$, $\int d\lambda < +\infty$ et λ est de la forme $\lambda=\sum_{n=0}^\infty (\lambda_0)^n$, où λ_0 est une mesure positive de $M_b^+(R^+)$ de masse totale <1 (cf. le lemme 4). Dans ce cas, on a $\int d\alpha_t < 1$ pour tout $t>0$. Il existe une fonction définie-négative ψ sur le groupe dual $\hat{X}$ de X avec $\psi(\hat{O})>0$, et une seule telle que, quel que soit $t\geqq 0$,

$$\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi) ,$$

où la signe $\wedge$ représente la transformation de Fourier.[1] Pour que $N_{(\lambda)}$ soit un noyau de convolution de Hunt sur X, il suffit de voir que $1/\hat{N}_{(\lambda)}$ est définie-négative. On remarque ici $\int dN_{(\lambda)} < \int d\lambda < +\infty$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{N}_{(\lambda)}} = \frac{1}{\int \hat{\alpha}_t d\lambda(t)} &= \frac{1}{\int \exp(-t\psi) d\lambda(t)} \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \exp(-t\psi) d\lambda_0(t) \right)^n} \\ &= \left(1 - \int d\lambda_0\right) + \int (1 - \hat{\alpha}_t) d\lambda_0(t) ,\end{aligned}$$

et par suite $1/\hat{N}_{(\lambda)}$ est définie-négative. On obtient ainsi que la condition est suffisante.

Réciproquement, on considère le noyau-fonction d'Heaviside H sur R; c'est-à-dire, $H(t) = 1$ pour $t \geqq 0$ et $H(t) = 0$ pour tout $t < 0$. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ le semi-groupe associé à H; alors $\alpha_t = \varepsilon_t$, où ε_t est la mesure de Dirac à t. Donc, quel que soit λ de $M_b^+(R^+)$,

$$\int \alpha_t d\lambda(t) = \lambda .$$

On obtient ainsi que la condition est nécessaire. La démonstration est complète.

Remarque. Soient X l'espace euclidien R^n à n ($\geqq 1$) dimensions et λ une mesure positive de $M_b^+(R^+)$. Pour que, quel que soit N un noyau de convolution de Hunt sur R^n, $N_{(\lambda)}$ appartienne à $D(N; R^n)$, il faut et il suffit que λ soit un noyau de convolution de Hunt sur R ou 0.

En effet, dans la présente démonstration, nous utilisons seulement $N = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$ sur Z et le noyau-fonction d'Heaviside sur R. Ces deux

---

[1] Une fonction complexe et continue ψ sur $\hat{X}$ est dite définie-négative si l'on a:
(a) $\psi(-\hat{x}) = \overline{\psi(\hat{x})}$ pour tout $\hat{x}$ de $\hat{X}$ et $\psi(\hat{O}) \geqq 0$.
(b) $\forall m \in Z^+$, $\forall \hat{x}_0, \cdots, \hat{x}_m \in \hat{X}$, $\forall c_0, \cdots, c_m$: nombres complexes tels que $\sum_{i=0}^m c_i = 0$,

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \psi(\hat{x}_i - \hat{x}_j) c_i \bar{c}_j \leqq 0 .$$

On obtient facilement qu'à un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ avec $\alpha_0 = \varepsilon$ et $\int d\alpha_t \leqq 1$, on peut associer une fonction définie-négative ψ sur $\hat{X}$, et une seule telle que, quel que soit $t \geqq 0$, $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000015713 Published online by Cambridge University Press

noyaux peuvent être considérés comme noyaux de convolution de Hunt sur R^n.

3. Remarque sur les noyaux de Hunt

Soient X un espace localement compact et dénombrable à l'infini, et ξ une mesure de Radon positive dans X. On note E et E_0 respectivement la σ-algèbre constituée par tous les ensembles ξ-mesurables dans X et sa sous-famille des ensembles relativement compacts. Dans l'article [5], on a introduit la notion de noyau N relatif à X et à ξ et discuté les potentiels par rapport au noyau N et la composition de deux noyaux. Voir [5] pour les définitions énoncées ci-dessous. On note, pour deux noyaux N_1, N_2 relatifs a X et à ξ, N_1N_2 le noyau composé de N_1 et N_2. Le noyau d'unité relatif à X et à ξ s'écrit U.

On dit qu'une famille $(N_t)_{t \geqq 0}$ de noyaux relatifs à X et à ξ s'appelle un semi-groupe continu si l'on a:

(1) $N_tN_s = N_{t+s} \quad {}^\forall t \geqq 0, \quad {}^\forall s \geqq 0.$

(2) $N_0 = U.$

(3) L'application $t \to N_t$ est fortement continue; c'est-à-dire, quelle que soit f de $B_K(X; \xi)$, l'application $t \to N_t f$ est continue pour la topologie forte de $L_{\mathrm{loc}}(X; \xi)$.

On note ici $B_K(X; \xi)$ et $B_K^+(X; \xi)$ l'ensemble des fonctions ξ-mesurables et bornées dans X à support compact et son cône convexe des fonctions non-négatives, respectivement.

Un noyau de Hunt V relatif à X et à ξ est, par définition, un noyau relatif à X et à ξ de la forme $V = \int_0^\infty N_t dt$, où $(N_t)_{t \geqq 0}$ est le semi-groupe continu de noyaux relatifs à X et à ξ. De la même manière que dans le cas où N est un noyau de Hunt continu (cf. [1]), $(N_t)_{t \geqq 0}$ est uniquement déterminé pour N. On dit aussi que $(N_t)_{t \geqq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau N. Posons, pour $p \geqq 0$, $V_p = \int_0^\infty \exp(-tp) N_t dt$; alors

$$(p-q)V_pV_q + V_p - V_q = 0 \quad ({}^\forall p \geqq 0, \ {}^\forall q > 0)$$

et V_p converge fortement vers V avec $p \to 0$. Donc si un noyau de Hunt V relatif à X et à ξ vérifie la condition $(*)$; quel que soit e de E avec $\xi(e) > 0$, $V(e, X) > 0$ et $V(X, e) > 0$, alors V satisfait au principe de domination (cf. [5]). Au lieu du lemme 4, on a le lemme suivant:

LEMME 6. *Soit* $(V_n)_{n=1}^\infty$ *une suite de noyaux relatifs à* X *et à* ξ *satis-*

https://doi.org/10.1017/S0027763000015713 Published online by Cambridge University Press

faisant au principe de domination. Si elle converge fortement vers un noyau V relatif à X et à ξ avec $n \to +\infty$ et si V vérifie la condition $(*)$, *alors V satisfait au principe de domination.*

D'après la condition $(*)$ pour V, il suffit de voir que, quelles que soient f, g de $B_K^+(X;\xi)$,

$$Vf < Vg \ \xi\text{-p.p. sur } \{x \in X;\, f(x) > 0\} \Rightarrow Vf \leqq Vg \ \xi\text{-p.p. sur } X$$

(cf. [5]). La notation ξ-p.p. signifie "presque partout pour ξ". Cette implication déduit de la même manière usuelle (cf. [5]).

Par conséquent, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soient $V = \int_0^\infty N_t dt$ un noyau de Hunt relatif à X et à ξ, et λ un noyau de convolution de Hunt appartenant à $M_b^+(R^+)$. Alors $V_{(\lambda)} = \int N_t d\lambda(t)$ satisfait au principe de domination dès que cela est un noyau relatif à X et à ξ.*

LEMME 7. *Soient $(N_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe continu de noyaux relatifs à X et ξ, et λ un noyau de convolution de Hunt appartenant à $M_b^+(R^+)$. Alors $V_{(\lambda)} = \int N_t d\lambda(t)$ vérifie la condition* $(*)$ *dès que $V_{(\lambda)}$ a un sens.*

En effet, supposons qu'il existe un ensemble e de E avec $\xi(e) > 0$ tel que $V_{(\lambda)}(X, e) = 0$. Dans ce cas, on peut supposer $e \in \mathsf{E}_0$. On a, quel que soit K un compact de X, $N_t(K, e) = 0$ pour tout t de $\operatorname{supp}(\lambda)$, car l'application $t \to N_t(K, e)$ est continue. D'après $\operatorname{supp}(\lambda) \ni 0$, $U(K, e) = 0$, d'où $U(X, e) = 0$, d'où contradiction. De la même manière on a, quel que soit e de E avec $\xi(e) > 0$, $N(e, X) > 0$.

Démonstration du théorème 2. D'après le lemme 6, on peut supposer $\int d\lambda < +\infty$ (cf. la démonstration du théorème 1) et encore que λ est une fonction continue et bornée dans $(0, +\infty)$, car si l'on peut écrire $\lambda = \sum_{n=0}^\infty (\lambda_0)^n$, où λ_0 est une mesure positive de $M_b^+(R^+)$ avec $\int d\lambda_0 < 1$, alors, quelle que soit φ de $C_K^+(R)$ portée par R^+ et avec $\int \varphi(t)dt \leqq 1$, $\sum_{n=0}^\infty (\lambda * \varphi)^n$ est continue et bornée dans $(0, +\infty)$.

Posons aussi $V_p = \int_0^\infty \exp(-tp) N_t dt$ pour tout $p > 0$; alors cela est un noyau relatif à X et à ξ, et on a

$$V + \frac{1}{p}U = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(pV_p)^n ,$$

où $(pN_p)^0 = U$. Posons ensuite

$$N_{p,t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tp)^n(U - pV_p)^n}{n!}(^\forall t > 0) \quad \text{et} \quad N_{p,0} = U;$$

alors $N_{p,t}$ est un noyau relatif à X et à ξ et $(N_{p,t})_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe continu de noyaux relatifs à X et à ξ. On a

$$V + \frac{1}{p}U = \int_0^{\infty} N_{p,t}dt .$$

D'après la remarque ci-dessus pour λ, $(V + (1/p)U)_{(\lambda)}$ est un noyau relatif à X et à ξ. D'après le théorème 1 et en utilisant la même manière que dans le lemme 3, $(V + (1/p)U)_{(\lambda)}$ est élémentaire, d'où il satisfait au principe de domination. Il est facile de voir que, quel que soit $t \geqq 0$, $N_{p,t}$ converge fortement vers N_t avec $p \to +\infty$, et donc, d'après le théorème de Lebesgue, $(V + (1/p)U)_{(\lambda)}$ converge fortement vers $N_{(\lambda)}$ avec $p \to +\infty$. En vertu des lemmes 6 et 7, $V_{(\lambda)}$ satisfait au principe de domination. La démonstration est ainsi complète.

4. Appendice

Dans la présente discution, le principe de domination pour les noyax de convolution appartenant à $M_b^+(R^+)$ est essentiel. On se propose de fournir une condition explicite.

PROPOSITION. *Soit κ un noyau de convolution sur R appartenant à $M_b^+(R^+)$ et de la forme $d\kappa = k(t)dt$, où k est une fonction > 0, finie et continue sur R^+ et $k = 0$ dans $R - R^+$. Si, quel que soit $a \geqq 0$, $k(t)/k(t + a)$ est décroissante (au sens large) sur R^+, alors κ satisfait au principe de domination.*

Démonstration. Il suffit de voir que, quels que soient r_0, r' avec $0 < r_0 < r'$, il existe une mesure de Radon positive $\varepsilon'_{r_0,r'}$ dans R portée par $[r_0, r']$ telle que $\kappa \geqq \kappa * \varepsilon'_{r_0,r'}$ dans R et $\kappa = \kappa * \varepsilon'_{r_0,r'}$ au sens des mesures dans (r_0, r'). Soit n un entier > 0. D'après notre hypothèse,

$$k(t) \geqq \frac{k(r_0)}{k(0)}k(t - r_0)$$

dans $[r_0, +\infty)$. Posons $a_0 = k(r_0)/k(0)$. S'il existe un point de (r_0, r') où la fonction $(1 - 1/n)k(t) - a_0 k(t - r_0)$ prend la valeur positive, on pose

$$r_1 = \inf\left\{t \in (r_0, r')\,;\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)k(t) > a_0 k(t - r_0)\right\}$$

et $a_1 = 1/n\,(k(r_1)/k(0))$. S'il existe encore un point de (r_1, r') où la fonction $(1 - 1/n)k(t) - a_0 k(t - r_0) - a_1 k(t - r_1)$ prend la valeur positive, on détermine r_2 et a_2 de la même manière. Par récurrence, il est facile de voir qu'il existe un entier $m_n > 0$, une famille $(r_m)_{m=0}^{m_n}$ de nombres avec $r_0 < r_1 < \cdots < r_{m_n} \leqq r'$ et une famille $(a_m)_{m=0}^{m_n}$ de nombres > 0 telles que

$$\sum_{m=0}^{m_n} a_m k(t - r_m) \leqq k(t) \text{ dans } R \text{ et } \left(1 - \frac{1}{n}\right)k(t) \leqq \sum_{m=0}^{m_n} a_m k(t - r_m)$$
$$\leqq k(t) \text{ sur } [r_0, r'] \,.$$

En posant $\mu_n = \sum_{m=0}^{m_n} a_m \varepsilon_{r_m}$, la suite $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Un point vaguement adhérent $\varepsilon'_{r_0,r'}$ de $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ est une mesure que nous avons désiré. La démonstration est complète.

COROLLAIRE. *Soit λ une mesure positive dans R^+. Si un noyau de convolution κ sur R est de la forme*

$$d\lambda = \begin{cases} \left(\int \exp(-ts)\,d\lambda(s)\right)dt & \text{sur } R^+ \\ 0 & \text{dans } R - R^+ \,, \end{cases}$$

alors κ satisfait au principe de domination.

Cela résulte immédiatement de la présente proposition et du calcul élémentaire.

Bibliographie

[1] J. Deny: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **12**, 1962, p. 643–667.

[2] F. Hirsch: Sur une généralisation d'un théorème de M. Itô, C. R. Acad. Sc. Paris, **271**, 1970, p. 1236–1238.

[3] M. Itô: Sur la somme des noyaux de Dirichlet, ibid., **271**, 1970, p. 937–940.

[4] ——: Remarque sur la somme des résolvantes, Proc. Japan Acad., **46**, 1970, p. 243–245.

[5] ——: Sur le principe divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., **44**, 1971, p. 133–164.

[6] ——: Une caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution, à paraître.

[7] M. Kishi: An example of a non-symmetric convolution kernel satisfying the domination principle, Nagoya Math. J., **48**, 1972, p. 189–196.

Université de Nagoya