L' ESPERANCE MATHEMATIQUE DU NOMBRE DE NOMBRES PREMIERS ALEATOIRES INFERIEURS OU EGAUX A x

Benoît Lachapelle

(reçu le 21 août, 1960)

D. Hawkins [1] propose un modèle stochastique simple de la distribution des nombres premiers. Il construit un crible aléatoire analogue à celui d' Eratosthène. La règle pour obtenir une suite de nombres premiers aléatoires est la suivante: 2 est un nombre premier aléatoire, que nous désignerons par P_1; chaque entier plus grand que P_1 est ensuite criblé avec probabilité $1/P_1$ d' être éliminé par le crible; si P_2 est le premier entier plus grand que P_1 qui n' a pas été éliminé par le crible, on crible chaque nombre plus grand que P_2, qui n' a pas été éliminé par le crible à la première opération, avec probabilité $1/P_2$ d' être éliminé; à la $n^{ième}$ étape, si P_n est le premier nombre plus grand que P_{n-1}, qui n' a pas été éliminé par les $n-1$ premières opérations du crible, on crible chaque nombre plus grand que P_n, qui n' a pas été éliminé par les $n-1$ premières opérations du crible, avec probabilité $1/P_n$ d' être éliminé. On obtient ainsi une suite $\{P_n\}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ de nombres premiers aléatoires.

Soit $P(n)$ la probabilité que n ne soit pas criblé (que n soit un nombre premier aléatoire) et soit $\pi_a(x)$ l' espérance mathématique du nombre de nombres premiers aléatoires inférieurs ou égaux à x, alors

$$(1) \qquad \pi_a(x) = \Sigma_{j=2}^{[x]} P(j).$$

Dans ce travail, nous allons prouver le théorème suivant.

Canad. Math. Bull. vol. 4, no. 2, May 1961.

https://doi.org/10.4153/CMB-1961-015-5 Published online by Cambridge University Press

$$\pi_a(x) = x/\log x + (1 - B)x/\log^2 x + \dots$$
$$+ (n - 1)! \, (1 - B + B^2/2! + \dots + (-1)^{n-1} B^{n-1}/(n-1)!)x/\log^n x$$
$$+ o(x/\log^n x),$$

où B est constante[1].

Il est intéressant de remarquer que si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x alors

$$\pi(x) - \pi_a(x) \sim \frac{Bx}{\log^2 x}.$$

Pour prouver le théorème, nous allons utiliser le résultat suivant [1]. Si $g_n = 1/P(n)$, alors

$$(2) \qquad g_{n+1} - g_n = \frac{1}{n - \frac{1}{g_n}} \qquad n = 2, 3, \dots .$$

LEMME:

$$(3) \qquad g_n = \log n + B + O(1/n).$$

Preuve. Soit $g_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j + c(n)$. Substituant dans (2), on obtient

$$c(n+1) - c(n) + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n - \frac{1}{g_n}}.$$

Comme $g_2 = 1$ et $g_{n+1} > g_n \quad n = 2, 3, \dots$

$$1/n - \frac{1}{n+1} < c(n+1) - c(n) < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$0 < c(n) - c(2) = \Sigma_{j=2}^{n-1} (c(j+1) - c(j)) < \Sigma_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j^2 - 1}.$$

Soit

$$c = c(2) + \Sigma_{j=2}^{\infty} (c(j+1) - c(j)).$$

---

[1] La valeur de B, qui est 1.24004 ... , a été calculée par Serge Dubuc à l'aide du calculateur LGP-30 de l'Université de Montréal.

https://doi.org/10.4153/CMB-1961-015-5 Published online by Cambridge University Press

Alors

$$0 < c - c(n) = \Sigma_{j=n}^{\infty} (c(j+1) - c(j)) < \Sigma_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2 - 1} = O(1/n).$$

La relation bien connue $\Sigma_{j=2}^{n} 1/j = \log n + \gamma + O(1/n)$ nous permet d' écrire

$$g_n = \log n + \gamma + c + O(1/n).$$

On obtient le lemme en choisissant $B = c + \gamma$.

Preuve du théorème. De (1) et (3), on obtient

$$\pi_a(x) = \Sigma_{j=2}^{[x]} \frac{1}{\log j + B + O(1/j)}. \tag{4}$$

En remplaçant la somme (4) par une intégrale, on obtient

$$\pi_a(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t + B + O(1/t)} + O(1)$$

$$= \int_2^x \frac{dt}{\log t(1 + \frac{B + O(1/t)}{\log t})} + O(1)$$

$$= \Sigma_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_2^x \frac{(B + O(1/t))^j}{\log^{j+1} t} dt$$

$$+ \int_2^x O(\frac{(B + O(1/t))^n}{\log^{n+1} t}) dt$$

$$\pi_a(x) = \Sigma_{j=0}^{n-1} (-1)^j B^j \int_2^x \frac{dt}{\log^{j+1} t} + \int_2^x O(\frac{1}{t \log t}) dt$$

$$+ \int_2^x O(\frac{1}{\log^{n+1} t}) dt.$$

Un simple calcul nous donne finalement

$$\pi_a(x) = \Sigma_{j=0}^{n-1} (-1)^j B^j \int_2^x \frac{dt}{\log^{j+1} t} + o(\frac{x}{\log^n x}). \tag{5}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1961-015-5 Published online by Cambridge University Press

En intégrant $\int_2^x \frac{dt}{\log^j t}$ par parties $n - j - 1$ fois, on obtient

$$(6) \quad \int_2^x \frac{dt}{\log^j t} = \frac{x}{\log^j x} + j \frac{x}{\log^{j+1} x} + \dots$$

$$+ j(j+1) \dots (n-1) \frac{x}{\log^n x} + o\left(\frac{x}{\log^n x}\right).$$

De (5) et (6), en groupant les termes, on obtient

$$\pi_a(x) = \frac{x}{\log x} + (1 - B)\frac{x}{\log^2 x} + \dots$$

$$+ (n-1)!\left(1 - B + \frac{B^2}{2!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B^{n-1}}{(n-1)!}\right)\frac{x}{\log^n x}$$

$$+ o\left(\frac{x}{\log^n x}\right).$$

REFERENCE

1. D. Hawkins, The random sieve, Maths. Mag. 31 (1957), 1-3.

Université de Montréal