Canad. Math. Bull. Vol. **31** (2), 1988

COMPARAISON DE LA MÉTHODE DES CONSTANTES DE LYAPUNOV ET DE LA BIFURCATION DE HOPF*

PAR
GUY BONIN ET JOSÉE LEGAULT

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous démontrons l'équivalence théorique de la méthode des constantes de Lyapunov et de la bifurcation de Hopf, pour l'étude de l'apparition ou de la disparition de cycles limites dans un système d'équations différentielles ordinaires.

En théorie des bifurcations on étudie des changements qualifitatifs survenant dans le portrait de phase d'un système d'équations différentielles ordinaires C^∞ lorsque ce système est soumis à des perturbations. L'une des bifurcations les plus intéressantes est celle donnant naissance à des cycles limites à partir d'un point singulier d'un champ de vecteurs, lorsque les valeurs traversent l'axe imaginaire.

Ce phénomène dont l'observation remonte à Poincaré a été l'objet de maints écrits dans la littérature mathématique. On y remarque deux approches différentes : la première méthode est appelée bifurcation de Hopf et la seconde, méthode des constantes de Lyapunov.

Le but du présent article est d'établir l'équivalence théorique entre les deux méthodes employées. On comparera aussi leur utilisation dans la pratique : ces deux méthodes sont complètement algorithmiques, donc entièrement programmables. Cependant, même pour des systèmes très simples, elles requièrent une très grande quantité de mémoire. Dans la première on remarque deux séries entières à déterminer terme à terme tandis que dans la seconde on n'en a qu'une. On conclut donc que la méthode des constantes de Lyapunov est presque deux fois plus efficace que la première lors d'applications pratiques.

Une des applications de ces deux méthodes est l'étude de la deuxième partie du 16^e problème de Hilbert à savoir : "Etudier le nombre maximal et la position des cycles limites d'un système polynomial de degré n". Ce problème est encore ouvert même pour $n = 2$, mais dans ce cas on connaît le nombre maximal de cycles pouvant naître d'un point singulier [3] ou de deux points singuliers [2]. La formule générale des trois premiers coefficients de Lyapunov pour un système

Reçu par la rédaction le 15 septembre 1986, et, sous une forme revisée, le 13 juillet 1987.

*Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un programme de bourse de recherche au premier cycle accordée par le CRSNG.

AMS Subject Classification (1980): 34C05.

sous forme réduite remonte à Bautin en 1939, alors que la formule correspondante des trois premiers coefficients de la bifurcation de Hopf demande toute la mémoire des ordinateurs modernes. Dans le cas d'un système cubique symétrique (sans termes quadratiques) on connaît les coefficients de Lyapunov jusqu'au cinquième, mais le cas général d'un point singulier d'un système cubique est encore ouvert.

Lorqu'on travaille avec la bifurcation de Hopf, on commence par faire subir au système une suite de changements de variable pour le rendre "presque" symétrique autour de l'origine. Le système est alors sous la forme:

$$\dot{r} = d_1 r^3 + d_2 r^5 + \ldots + d_k r^{2k+1} + O(r^{2k+3})$$
$$\dot{\theta} = 1 + O(r^2)$$

appelée forme normale de Poincaré. On dit que le système admet une bifurcation de Hopf d'ordre k autour d'un point singulier si $d_1 = d_2 = \ldots = d_{k-1} = 0$ et $d_k \neq 0$. Le point est attractif si $d_k < 0$ et est répulsif si $d_k > 0$.

Par la suite lorsqu'on perturbe le système afin de faire naître des cycles limites, ceux-ci sont à peu près circulaires en raison du redressement du champ effectué lorsque le système a été amené sous forme normale de Poincaré.

La méthode des constantes de Lyapunov ne vise pas à modifier le système de départ afin d'y redresser le champ, mais s'intéresse plutôt à la construction de domaines de Poincaré-Bendixson limités par une familles de courbes algébriques.

Pour construire ces courbes on cherche une série entière

$$F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + O(|x, y|^3) \text{ telle que } \dot{F} = \sum_{i=1}^{\infty} V_i'(x^2 + y^2)^{i+1}.$$

Les courbes algébriques cherchées sont données par $G_{2p} = \alpha$ où G_{2p} est la série F tronquée à l'ordre $2p + 2$. Les constantes V_i' telles que définies plus haut sont appelées constantes de Lyapunov. On dit que le système a un foyer faible d'ordre k si $V_1' = V_2' = \ldots = V_{k-1}' = 0$ et $V_k' \neq 0$. Ce foyer est attractif si $V_k' < 0$ et est répulsif si $V_k' > 0$.

Dans ce papier nous montrons l'équivalence des deux notions:

(a) le système a une bifurcation de Hopf d'ordre k à un point singulier

(b) le système a un foyer faible d'ordre k à ce même point singulier.

Sous ces hypothèses on obtient les résultats suivants:

(i) toute perturbation du système engendre au plus k cycles limites

(ii) $\forall 0 \leqq i \leqq k$, il existe une perturbation faisant apparaître exactement i cycles limites.

L'équivalence de (a) et (b) est montrée de la manière suivante : si le système est déjà sous forme normale de Poincaré, alors $V_i' = d_i$. Nous étudions ensuite comment se comporte les V_i' lors des changements de variables qui amènent le système sous forme normale de Poincaré. Nous obtenons en particulier que la définition de foyer faible d'ordre k, attractif ou répulsif, est intrinsèque i.e. indépendante du système de coordonnées choisi.

L'intérêt du parallèle entre les deux méthodes est de pouvoir utiliser les techniques bien connues de l'une dans l'autre. Ainsi dans le résultat (ii), dans le contexte de la bifurcation de Hopf où le système est sous forme normale de Poincaré, il est bien connu comment construire explicitement une perturbation faisant apparaître i cycles. Nous montrons que la même perturbation fonctionne encore quand on utilise la méthode des constantes de Lyapunov et que le système n'est pas sous forme normale de Poincaré.

En dernier lieu, nous comparons l'efficacité des deux méthodes en ce qui concerne le temps de calcul de leurs coefficients respectifs. On détermine les coefficients de la bifurcation de Hopf en identifiant, degré par degré, deux séries entières. Le calcul de la série F de la méthode des constantes de Lyapunov se fait aussi en identifiant des séries, degré par degré. Dans chaque cas, lors de l'identification des séries on doit résoudre un système d'équations linéaires. Nous comparons la taille des systèmes à résoudre ainsi que leur nombre, pour conclure que la méthode des constantes de Lyapunov est plus efficace.

Göbber et Willamowski [1] ont aussi écrit un papier sur l'équivalence des deux méthodes. Leur preuve en est plus théorique. Nous trouvons notre preuve, non seulement plus simple, mais plus pratique lorsqu'il s'agit de travailler avec des exemples et de passer d'une méthode à l'autre, suivant ce qui est le plus approprié pour la conclusion cherchée.

Considérons le système C^∞

$$\dot{x} = f(x, y),\ \dot{y} = g(x, y)$$

possédant une position d'équilibre en (x_0, y_0) et tel que le jacobien du système en ce point ait deux valeurs propres imaginaires pures $i\omega$ et $-i\omega$.

Tout d'abord, on peut ramener le point singulier à l'origine par une translation. Puis par une transformation linéaire et un changement d'échelle sur le temps t, le système prend la forme

$$\dot{x} = -y + p(x, y),\ \dot{y} = x + q(x, y) \tag{1}$$

où $p(x, y) = O(|x, y|^2)$ et $q(x, y) = O(|x, y|^2)$.

Méthode des Constantes de Lyapunov. Pour le système (1), il existe une série de puissances

$$F(x, y) = \sum_{p=2}^{\infty} F_p \text{ où } F_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ et } F_p = \sum_{i=0}^{p} f_{pi} x^{p-i} y^i$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-031-6 Published online by Cambridge University Press

telle que

$$\dot{F} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = \sum_{i=0}^{\infty} V_i'(x^2 + y^2)^{i+1}. \tag{2}$$

Les coefficients V_i' sont appelés constantes de Lyapunov. Les coefficients f_{pi} des polynômes F_p sont obtenus, degré par degré, par identification des séries de l'équation (2) [3]. On obtient alors un système d'équations linéaires dont le déterminant est donné par

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \cdots\cdots & 0 & -p \\ 0 & 0 & & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lorsque p est impair, $\Delta(p) \neq 0$. Par contre si p est pair, $\Delta(p) = 0$ et les f_{pi} ne sont pas uniquement déterminés. La condition de compatibilité de ce système donne alors la valeur de V_i'. Notons que l'on a une forme d'unicité restreinte pour les V_i' [4]. Ainsi pour deux fonctions F différentes nous obtenons des V_i et V_i' reliés par $V_i' = V_i + P(V_1, V_2, \ldots, V_{i-1})$ où P est un polynôme en $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}$ sans terme constant.

On a vu que le système (1) a un foyer faible d'ordre k à l'origine si $V_i' = \ldots = V_{k-1}' = 0$ et $V_k' \neq 0$. Par le type d'unicité décrit plus haut, on voit que l'ordre d'un foyer faible ainsi que la valeur de la première constante non-nulle sont bien définis [4].

On peut énoncer maintenant le théorème fondamental:

Théorème 1. *Si le système* (1) *admet un foyer faible d'ordre* k *à l'origine alors*

(i) *toute perturbation du système a au plus* k *cycles limites*

(ii) $\forall 0 \leqq i \leqq k$, *il existe une perturbation du système faisant apparaître exactement* i *cycles*

Mentionnons qu'il existe une preuve directe de ce théorème. La partie (i) se démontre en considérant le système en coordonnées polaires généralisées $\rho = \sqrt{2G_{2k}}$ et θ, où G_{2k} est la fonction F tronquée à l'ordre $2(k + 1)$, et en utilisant une application de premier retour le long du demi-axe $X > 0$ [1].

La partie (ii) se démontre en utilisant les courbes de niveau des fonctions $G_{2p} = \alpha\ p = k, \ldots, k - i$ pour construire i anneaux de Poincaré-Bendixson.

BIFURCATION DE HOPF. Considérons le système (1) en coordonnées complexes:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} = iz + F(z, \bar{Z}) \\ \dot{\bar{Z}} &= \dot{x} - i\dot{y} = -iz + F(z, \bar{Z}) \text{ où } F(z, \bar{Z}) = O(|z|^2). \end{aligned}$$

Toute l'information est contenue dans l'équation (3) car la deuxième équation est sa conjuguée. On peut développer $F(z, \bar{Z})$ en série entière

$$F(z, \bar{Z}) = a_{20}z^2 + a_{21}z\bar{Z} + a_{22}\bar{Z}^2 + a_{30}z^3 + a_{31}z^2\bar{Z} + \dots$$

et on cherche maintenant à éliminer le plus grand nombre possible de termes de $F(z, \bar{Z})$ en effectuant, degré par degré, un changement de variable

$$(4)\qquad z = w + \sum_{j=2}^{p} \sum_{i=0}^{j} b_{ji} w^{j-1} \bar{W}^i.$$

En substituant (4) dans (3) et en identifiant les deux séries termes à termes, on voit qu'on peut éliminer tous les termes de $F(z, \bar{Z})$ sauf ceux en $z^{i+1}\bar{Z}^i$. On obtient la forme caractéristique

$$(5)\qquad \dot{z} = iz + c_1 z^2\bar{Z} + c_2 z^3 \bar{Z}^2 + c_3 z^4 \bar{Z}^3 + \dots + c_k z^{k+1}\bar{Z}^k + O(|z|^{2k+3})$$

appelée forme normale de Poincaré. Remarquons que les coefficients c_i sont uniquement déterminés. L'équation (5) s'écrit en coordonnées polaires;

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \operatorname{Re} c_1 r^3 + \operatorname{Re} c_2 r^5 + \dots + \operatorname{Re} c_k r^{2k+1} + O(r^{2k+3}) \\ \dot{\theta} &= 1 + O(r^2) \end{aligned}$$

les $\operatorname{Re} c_i$ sont appelés coefficients de la bifurcation de Hopf.

THÉORÈME 2. *Si le système* (1) *admet une bifurcation de Hopf d'ordre k à l'origine alors*

(i) *toute perturbation du système fera apparaître au plus k cycles limites*

(ii) $\forall 0 \leqq i \leqq k$, *il existe une perturbation engendrant exactement i cycles limites* [2].

Nous allons maintenant montrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Les théorèmes* 1 *et* 2 *sont équivalents.*

PREUVE. (a) L'équation (5) s'écrit en coordonnées réelles

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + (\operatorname{Re} c_1 x - \operatorname{Im} c_1 y)(x^2 + y^2) \\ &\quad + \dots + (\operatorname{Re} c_k x - \operatorname{Im} c_k y)(x^2 + y^2)^k + O(|x, y|^{2k+3}) \\ \dot{y} &= x + (\operatorname{Im} c_1 x + \operatorname{Re} c_1 y)(x^2 + y^2) \\ &\quad + \dots + (\operatorname{Im} c_k x + \operatorname{Re} c_k y)(x^2 + y^2)^k + O(|x, y|^{2k+3}). \end{aligned}$$

Si le système (1) est déjà sous cette forme alors on peut vérifier que $F = F_2$ est solution de

$$(6) \qquad \dot{F} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = \sum_{i=1}^{k} V_i'(x^2 + y^2)^{i+1} + O(|x, y|^{2k+4})$$

on obtient

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re} c_i(x^2 + y^2)^{i+1} + O(|x, y|^{2k+4})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} V_i'(x^2 + y^2)^{i+1} + O(|x, y|^{2k+4})$$

ce qui implique $\operatorname{Re} c_i = V_i'$ $i = 1, 2, \ldots, k$.

(b) Considérons à nouveau le système (1) et voyons ce qui arrive aux constantes de Lyapunov lorsqu'on introduit les changements de coordonnées qui préservent la forme du système (1). Ces changements sont des compositions de:

(i) changements linéaires de la forme

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ces changements multiplient les constantes de Lyapunov par $(a^2 + b^2)^{i+1}$.

(ii) changements non-linéaires

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + O(|x, y|^2) \\ y + O(|x, y^2) \end{pmatrix}$$

Pour ces changements

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^{\infty} V_i'(x^2 + y^2)^{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(X^2 + Y^2)^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x^2 + y^2 + O(|x, y|^3))^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} V_i[(x^2 + y^2)^{i+1} + O(|x, y|^{2i+3})].$$

Ici les constantes de Lyapunov ne sont pas préservées sauf si

$$V_1' = V_2' = \ldots = V_k' = 0 \text{ et } V_k' \neq 0 \text{ alors}$$

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_k = 0 \text{ et } V_k = V_k'.$$

Dans ce cas-ci c'est l'ordre du foyer faible et la valeur de la première constante de Lyapunov non-nulle qui sont préservés.

Les changements de coordonnées considérés en (ii) étant ceux impliqués lorsqu'on ramène le système (1) sous forme normale, ceci termine la preuve de l'équivalence

$$\text{bifurcation de Hopf d'ordre } k \Leftrightarrow \text{foyer faible d'ordre } k.$$

Il serait maintenant intéressant de déterminer explicitement pour l'une et l'autre des méthodes quelle est la nature de la perturbation faisant apparaître i cycles dans le système (1).

Considérons le système (1) ayant une bifurcation de Hopf d'ordre k autour de l'origine sous forme normale de Poincaré

$$\dot{r} = \text{Re } c_k r^{2k+1} + O(r^{2k+3}) \tag{7}$$

Pour construire la perturbation il faut ajouter successivement à l'équation (7) des termes de la forme $\beta_{k-j} r^{2(k-j)+1}$ $j = 1, 2, \ldots, i$ de sorte que le polynôme

$$r^{2(k-i)+1}(\beta_{k-i} + \beta_{k-i+1} r^2 + \ldots + \beta_{k-1} r^{2(i-1)} + \text{Re } c_k r^{2i}) \tag{8}$$

ait exactement $2i + 1$ racines, une racine multiple à l'origine et i paires de racines réelles simples, une positive et l'autre négative.

A cette fin on choisit les β_{k-j} pour que Re $c_k, \beta_{k-1}, \beta_{k-2}, \ldots, \beta_{k-i}$ soient de signes alternés et que $0 \ll |\beta_{k-i}| \ll \ldots \ll |\beta_{k-1}| \ll |c_k|$. Or le fait que le polynôme (8) possède i racines simples positives implique que sur l'axe $\theta = 0$ le signe de $\dot{r}$ alterne i fois. Ceci permet la construction de i anneaux de Poincaré-Bendixson pour le système perturbé qui s'écrit en coordonnées réelles:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + \beta_{k-i} x(x^2 + y^2)^{k-i} + \beta_{k-i+1} x(x^2 + y^2)^{k-i+1} \\
&\quad + \ldots + \beta_{k-1} x(x^2 + y^2)^{k-1} + (\text{Re } c_k x - \text{Im } c_k y)(x^2 + y^2)^k \\
&\quad + O(|x, y|^{2k+3}) \\
\dot{y} &= x + \beta_{k-i} y(x^2 + y^2)^{k-i} + \beta_{k-i+1} y(x^2 + y^2)^{k-i+1} \\
&\quad + \ldots + \beta_{k-1} y(x^2 + y^2)^{k-1} + (\text{Im } c_k x + \text{Re } c_k y)(x^2 + y^2)^k \\
&\quad + O(|x, y|^{2k+3}).
\end{aligned}$$

Notons avec intérêt que la même perturbation permet d'obtenir i cycles même si le système n'est pas sous forme normale de Poincaré. En effet, dans la méthode de Lyapunov, la localisation des cycles fait aussi intervenir des domaines de Poincaré-Bendixson, mais ceux-ci sont construits à partir des courbes de niveau des fonctions G_{2p} $p = k, k - 1, \ldots, k - i$ au lieu de cercles comme dans la bifurcation de Hopf.

PROPOSITION 1. *Soit le système* (1) *possédant à l'origine un foyer faible d'ordre k alors pour* $\beta_{k-i}, \ldots, \beta_{k-1}$ $0 \leqq i \leqq k$ *choisis tels que* $\beta_{k-i}, \beta_{k-i+1}, \ldots, \beta_{k-1}$, V_k' *soient de signes alternés et* $|\beta_{k-i}| \ll |\beta_{k-i+1}| \ll \ldots \ll |\beta_{k-1}| \ll |V_k'|$ *le système*

$$\dot{x} = -y + \beta_{k-i}x(x^2 + y^2)^{k-i} + \ldots + \beta_{k-1}x(x^2 + y^2)^{k-1} + p(x, y)$$
$$\dot{y} = x + \beta_{k-i}y(x^2 + y^2)^{k-i} + \ldots + \beta_{k-1}y(x^2 + y^2)^{k-1} + q(x, y)$$

admet exactement i cycles dans un voisinage de l'origine.

PREUVE. Supposons, sans perdre de généralité, que $V_k' < 0$. On considère en premier lieu une certaine courbe de niveau de la fonction G_{2k} où $\dot{G}_{2k} < 0$. Puis on effectue la perturbation suivante sur les termes de degré $2k - 1$ de (1) :

$$\dot{x} = -y + p(x, y) + \beta_{k-1}x(x^2 + y^2)^{k-1}$$
$$\dot{y} = x + q(x, y) + \beta_{k-1}y(x^2 + y^2)^{k-1}.$$

En reconsidérant l'équation (2) pour le nouveau système on trouve $V_{k-1}' = \beta_{k-1}$. On choisit $\beta_{k-1} > 0$ assez petit pour que le nouveau $V_k' = V_k' + \beta_{k-1}e_k$ reste négatif.

La courbe de niveau $G_{2k} = \alpha_k$ se trouve un peu modifiée par la perturbation mais si β_{k-1} est assez petit, $\dot{G}_{2k}$ reste négatif sur cette courbe.

On poursuit en considérant une certaine courbe de niveau de la fonction $G_{2(k-1)} = \alpha_{k-1}$ située à l'intérieur de $G_{2k} = \alpha_k$ telle que $\dot{G}_{2(k-1)} > 0$ sur cette courbe puis on effectue une perturbation du même type sur les termes de degré $2k - 3$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne i domaines de Poincaré-Bendixson limités par des courbes des fonctions $G_{2k}, G_{2(k-1)}, \ldots, G_{2(k-i)}$. On conclut alors par le théorème de Poincaré-Bendixson à l'existence de i cycles limites pour le système (1). □

La proposition 1 constitue une preuve directe et constructive de la partie (ii) du théorème 1.

Comparons en dernier lieu les deux méthodes du point de vue du temps de calcul de leurs coefficients caractéristiques. Cette comparaison repose sur le nombre d'équations linéaires qu'il faut résoudre pour évaluer, dans chacun des cas, le $k^{\text{ième}}$ coefficient.

PROPOSITION 2. *Soit le système* (1)
(1) *Pour obtenir* c_1, *il faut résoudre* 6 *équations linéaires*

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-031-6 Published online by Cambridge University Press

(2) *En supposant connu* $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$, *pour obtenir* c_k *il faut résoudre* $8k$ *équations linéaires supplémentaires.*

(1′) *Pour obtenir* V_1' *il faut résoudre* 4 *équations linéaires*

(2′) *En supposant connu* $V_1', V_2', \ldots, V_{k-1}'$, *pour obtenir* V_k' *il faut résoudre* $4k + 2$ *équations linéaires supplémentaires.*

PREUVE.

(1) Considérons le système (1) sous sa forme complexe (3). Pour obtenir le premier coefficient de la forme normale de Poincaré il faut trouver le changement de variable (4) de degré 2 qui nous permet d'éliminer les termes quadratiques de $F(z, \bar{Z})$. Ceci nous donne 3 équations linéaires complexes à résoudre donc 6 équations réelles.

(2) Supposons qu'on ait évalué les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ et qu'on cherche c_k. Au début de la $k^{\text{ième}}$ étape le système est sous cette forme

$$\begin{aligned}\dot{z} &= iz + \operatorname{Re} c_1 z^2 \bar{Z} + \ldots + \operatorname{Re} c_{k-2} z^{k-1} \bar{Z}^{k-2} \\ &\quad + A_{2k-1,0} z^{2k-1} + A_{2k-1,1} z^{2k-2} \bar{Z} \\ &\quad + \ldots + \operatorname{Re} c_{k-1} z^k \bar{Z}^{k-1} + \ldots + A_{2k-1,2k-1} \bar{Z}^{2k-1} \\ &\quad + \ldots + \sum_{i=0}^{2k} A_{2k,i} z^{2k-i} \bar{Z}^i + \sum_{i=0}^{2k+1} A_{2k+1,i} z^{2k+1-i} \bar{Z}^i + O(|z|^{2k+2}).\end{aligned}$$

On veut éliminer les termes de degré $2k - 1$ (sauf $\operatorname{Re} c_{k-1}$) et les termes de degré $2k$. Ce qui fait $4k$ équations linéaires complexes donc $8k$ équations réelles à résoudre à la $k^{\text{ième}}$ étape.

(1′) Dans [3] on trouve une formule donnant les V_i' en fonction des coefficients du système (1). On voit que pour trouver V_1' on a besoin des coefficients de F_3, les f_{3i}, $i = 0, 1, 2, 3$. Ce qui fait 4 équations linéaires à résoudre, les f_{3i} étant uniquement déterminés.

(2′) Supposons $V_1', V_2', \ldots, V_{k-1}'$ déjà évalués, ceci implique la connaissance de $F_3, F_4, \ldots, F_{2k-1}$. Pour obtenir V_k' on a besoin des coefficients des fonctions F_{2k} et F_{2k+1}. Il faut résoudre $2k$ équations pour F_{2k} car le rang de la matrice du système d'équations permettant de déterminer les $f_{2k,i}$ est $2k$. Pour la fonction F_{2k+1} on trouve $2k + 2$ équations linéaires à résoudre car le rang de la matrice correspondant au système d'équations est $2k + 2$. Donc pour obtenir V_k' on a dû résoudre $4k + 2$ équations linéaires. □

On conclut donc à la supériorité de la méthode des constantes de Lyapunov, pour ce qui est du temps de calcul des coefficients.

REMERCIEMENTS. Nous tenons à remercier Mme Christiane Rousseau et M. Jacques Bélair pour l'aide et les conseils qu'ils nous ont prodigués.

Références

1. F. Göbber and K-D. Willamowski, *Lyapunov approach to multiple Hopf bifurcation*, J. Math. Anal. and Appl. **71** (1979), pp. 333-350.

2. C. Rousseau and D. Schlomiuk, *Generalized Hopf bifurcations and applications to planar quadratic systems*, preprint, 1985.

3. Shi-Shongling, *A method of constructing cycles without contact around a weak focus*, J. Differential Equations **41** (1981), pp. 301-312.

4. Shi-Shongling, *On the structure of the Poincaré-Lyapunov constants for the weak focus of polynomial vector fields*, J. Differential Equations **52** (1984), pp. 52-57.

160 Boyer #4
Dorion, PQ J7V 1K1