Canad. Math. Bull. Vol. **29** (2), 1986

SOMMES CONTENANT DES COEFFICIENTS BINOMIAUX DE GAUSS

PAR

ARMEL MERCIER

ABSTRACT. Identities containing the Gaussian binomial coefficient $[{n \atop r}]$ are obtained. From these results, we deduce some identities of the combinatorial analysis which contain the binomial coefficient $\binom{n}{r}$.

1. **Introduction**. Le coefficient binomial de Gauss $[{n \atop r}]$ est défini (voir [2, p. 218]) par

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \dfrac{q^{n+1-r} - 1}{q^r - 1}, & \text{si } 0 < r \leq n \\ 1 \quad , & \text{si } r = 0 \\ 0 \quad , & \text{si } r < 0 \text{ ou } r > n, \end{cases}$$

où q est une variable.

Ces coefficients binomiaux de Gauss apparaissent comme solution dans différents types de problèmes. Soit S un espace projectif de dimension n sur le corps fini K ($= GF(q)$, de Galois) à $q = p^r$ éléments, où p est un nombre premier. Alors le nombre de points de S vaut $[{n \atop 1}]$ tandis que le nombre de variétés projectives de dimension k dans S est égal à $[{n+1 \atop k+1}]$ (voir [3, p. 103]). Dans [1, section 3.4] des identités liant les permutations énumérées et les coefficients binomiaux (multinomiaux) de Gauss sont obtenues.

La présente publication a pour but d'établir quelques identités de l'analyse combinatoire. D'une part, nous obtiendrons des résultats contenant le coefficient binomial de Gauss; et d'autre part, en utilisant le fait que

$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \binom{n}{r},$$

le coefficient binomial, nous établirons des identités valides pour une plus grande classe de polynômes que celles obtenues antérieurement [4].

Notons cependant que si au lieu de prendre $q \to 1$, nous choisissons q comme étant une racine primitive de l'unité, alors les identités de coefficients binomiaux de Gauss que nous établirons, nous amèneraient à l'étude des sommes de Gauss.

Reçu par la rédaction le 29 jan 1985, et, sous une forme revisée, le 9 avril 1985.
AMS Subject Classification (1980): 5 A 19.
Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG: A-3508.

2. **Résultats préliminaires**. Soit $n \geqslant 0$ un entier et soit b un nombre réel tel que $b \neq 0, -1, \ldots, -n+2$. Soit t un nombre réel arbitraire et définissons $[t; b]_n$ par

$$(1)\quad [t; b]_n = \begin{cases} t\left(t - \dfrac{q^b - 1}{q-1}\right)\ldots\left(t - \dfrac{q^{n+b-2}-1}{q-1}\right), & \text{si } n \geqslant 2 \\ t & , \text{si } n = 1 \text{ et } b = 1 \\ 1 & , \text{si } n = 1, b \neq 1 \text{ ou } n = 0, \end{cases}$$

et posons pour $n \geqslant 1$

$$(2)\qquad t^n = \sum_{k=0}^{n} S_q(n, k; b)[t; b]_k,$$

où dans les équations (1) et (2), q est une variable. D'après ces définitions, il est immédiat que

$$\lim_{q \to 1} [t; 1]_n = t(t-1)\ldots(t-n+1) = (t)_n$$

la fonction factorielle et

$$\lim_{q \to 1} S_q(n, k; 1) = S(n, k)$$

les nombres de Stirling de la seconde espèce. De plus, il est aisé de montrer que $S_q(n, n; b) = 1$ et $S_q(n, 0; b) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Aussi, nous avons $S_q(n, k; b) = 0$ pour $k > n$ et aussi pour $k < 0$. Finalement, ou démontre facilement que $S_q(n, k; b)$ vérifie la relation

$$(3)\qquad S_q(n+1, k; b) = S_q(n, k-1; b) + \left(\frac{q^{k+b-1}-1}{q-1}\right) S_q(n, k; b), \qquad b \neq -k+1.$$

LEMME 1. *Soit k un entier positif et soit $n \geqslant 3$ un entier. Alors pour tout nombre réel b, $b \neq -k-1, \ldots, -k-n+2$, nous avons*

$$S_q(n+k, k+2; b) + \sum_{i=3}^{n} (-1)^i \left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right)\ldots\left(\frac{q^{k+b+i-2}-1}{q-1}\right) \times S_q(n+k, k+i; b) = S_q(k+n-1, k+1; b).$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la relation (3), le membre de gauche de l'équation du lemme 1 devient successivement

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-037-9 Published online by Cambridge University Press

$$S_q(n+k, k+2; b) + \sum_{i=3}^{n} (-1)^i \left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right) \cdots \left(\frac{q^{k+b+i-2}-1}{q-1}\right)$$

$$\times \left\{S_q(n+k-1, k+i-1; b) + \left(\frac{q^{k+b+i-1}-1}{q-1}\right) S_q(n+k-1, k+i; b)\right\}$$

$$= S_q(n+k, k+2; b) + \sum_{i=3}^{n} (-1)^i \left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right) \cdots \left(\frac{q^{k+b+i-2}-1}{q-1}\right)$$

$$\times S_q(n+k-1, k+i-1; b) + \sum_{i=3}^{n} (-1)^i \left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right) \cdots \left(\frac{q^{k+b+i-1}-1}{q-1}\right)$$

$$\times S_q(n+k-1, k+i; b) = S_q(n+k, k+2; b)$$

$$+ \sum_{i=3}^{n} (-1)^i \left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right) \cdots \left(\frac{q^{k+b+i-2}-1}{q-1}\right) S_q(n+k-1, k+i; b)$$

$$+ \sum_{i=4}^{n+1} (-1)^{i-1} \left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right) \cdots \left(\frac{q^{k+b+i-2}-1}{q-1}\right) S_q(n+k-1, k+i-1; b)$$

$$= S_q(n+k, k+2; b) - \left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right) S_q(n+k-1, k+2; b)$$

$$= S_q(n+k-1, k+1; b),$$

ce qui prouve le résultat.

LEMME 2. *Soit $r \geqslant 0$ un entier et soit k et n des entiers positifs tels que $n > k + r + 1$. Soit $f(x)$ un polynôme de degré n, alors pour tout nombre réel b, $b \neq 0, -1, \ldots, -k$, le coefficient de x dans l'expression*

$$\frac{f(x)}{x^r\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right) \cdots \left(x - \frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)}$$

est donnée par l'expression

$$\sum_{j=2}^{n-k-r} \frac{f^{(k+j+r)}(0)}{(k+j+r)!} S_q(k+j-1, k+1; b)$$

DÉMONSTRATION. Soit $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, alors nous avons

$$\frac{f(x)}{x^r\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right) \cdots \left(x - \frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)} = a_n \frac{x^{n-r}}{\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right) \cdots \left(x - \frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)}$$

$$+ \ldots + a_{k+r+2} \frac{x^{k+2}}{\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right) \cdots \left(x - \frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)}$$

$$+ \ldots + \frac{a_0}{x^r\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right) \cdots \left(x - \frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-037-9 Published online by Cambridge University Press

Conséquemment, pour prouver notre résultat, il suffit de trouver le coefficient de x dans l'expression

$$(4)\qquad \frac{x^{k+j}}{\left(x-\frac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x-\frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)}, \qquad j = 2, 3, \dots, n-k-r.$$

Or d'après l'identité

$$x^{k+j} = \sum_{i=0}^{k+j} S_q(k+j, i; b)[x; b]_i$$

nous obtenons

$$\frac{x^{k+j}}{\left(x-\frac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x-\frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)} = \sum_{i=0}^{k+j}\frac{S_q(k+j, i; b)[x; b]_i}{\left(x-\frac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x-\frac{q^{k+b}-1}{q-1}\right)}.$$

En utilisant (1), le coefficient de x dans (4) est alors

$$S_q(k+j, k+2; b) + \sum_{i=3}^{j}(-1)^i\left(\frac{q^{k+b+1}-1}{q-1}\right)\dots\left(\frac{q^{k+b+i-2}-1}{q-1}\right)S_q(k+j, k+i; b)$$

et qui d'après le lemme 1, est égal à $S_q(k+j-1, k+1; b)$. Ceci achève la démonstration de ce résultat.

3. **Principaux théorèmes**. Nous définissons

$$A(X_1, \dots, X_n) = \sum \frac{n!}{(k_1)!\dots(k_n)!}\left(\frac{X_1}{1}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{X_n}{n}\right)^{k_n}$$

où la somme du membre de droite porte sur tous les n-uples $(k_1, \dots, k_n)$ de nombres entiers $\geqslant 0$ tels que $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$.

THÉORÈME 1. *Soit n un entier positif et soit $f(x)$ un polynôme de degré m. Soit $r \geqslant 2$ un entier, alors pour tout nombre réel b, $b \neq 0, -1, \dots, -n$, nous avons*

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i\begin{bmatrix} n \\ i\end{bmatrix}q^{\frac{i(i-1)}{2}}f\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{q^{nb}q^{i(n-1)}\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^r} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q-1)(q-1)}{(r-1)!(q^b-1)\dots(q^{b+n}-1)}$$

$$\times\left\{f^{(r-1)}(0) + \sum_{j=1}^{r-1}\binom{r-1}{j}f^{(r-j-1)}(0)A(B_1, \dots, B_j)\right\}$$

$$+\frac{(-1)^n(q^n-1)\dots(q-1)}{(q-1)^n}\sum_{j=2}^{m+2-n-r}\frac{f^{(n+j+r-2)}(0)}{(n+j+r-2)!}$$

$$\times S_q(n+j-1, n+1; b)$$

où

$$B_k = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^k}$$

et dans le cas où $m < n + r$, la somme vide est interprétée comme étant égale à 0.

DÉMONSTRATION. Puisque $f(x)$ est un polynôme de degré m, alors nous avons

$$\text{(5)} \quad \frac{f(x)}{x^{r-1}\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} = a_m x^{m-n-r} + \dots + a_{n+r}$$
$$+ \frac{h(x)}{x^{r-1}\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)}$$

où le degré du polynôme $h(x)$ est plus petit que $n + r$. Mais nous avons le développement en fractions partielles.

$$\text{(6)} \quad \frac{(-1)^n(q^n-1)\dots(q-1)h(x)}{x^{r-1}\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} = \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_{r-1}}{x^{r-1}}$$
$$+ \frac{d_0}{\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)} + \dots + \frac{d_n}{\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)}$$

Or pour $0 \leq i \leqslant n$, nous avons

$$d_i = \lim_{x \to \frac{q^{i+b}-1}{q-1}} \left(\frac{(-1)^n(q^n-1)\dots(q-1)h(x)\left(x - \dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{x^{r-1}\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} \right)$$

$$= \frac{(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} (q-1)^n h\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^{r-1} q^{nb} q^{i(n-1)}},$$

et ainsi, nous pouvons écrire l'identité

(7)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} (q-1)^n h\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^{r-1} q^{nb} q^{i(n-1)} \left(x - \dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)} = -\sum_{j=1}^{r-1} \frac{c_j}{x^j}$$
$$+ \frac{(-1)^n(q^n-1)\dots(q-1)h(x)}{x^{r-1}\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)}$$

Mais d'après (5), il est immédiat que

$$f\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right) = h\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right), \qquad 0 \leq i \leq n,$$

d'où en substituant cette identité dans (7), on obtient une nouvelle équation qui nous permet de réécrire (5) sous la forme

$$(8) \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} (q-1)^n f\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^{r-1} q^{nb} q^{i(n-1)} \left(x - \frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^n (q^n-1)\dots(q-1) f(x)}{x^{r-1}\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \frac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{c_j}{x^j}$$

$$+ (-1)^n (q^n-1)\dots(q-1)(a_m x^{m-r-n} + \dots + a_{n+r}).$$

Maintenant, si nous laissons tendre x vers 0, cette dernière équation devient

$$(9) \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} (q-1)^n f\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{q^{nb} q^{i(n-1)} \left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^{r}}$$

$$= (-1)^{n+1}(q^n-1)\dots(q-1)a_{n+r}$$

$$+ \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(-1)^n (q^n-1)\dots(q-1) f(x)}{x^{r-1}\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \frac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{c_j}{x^j}\right\}.$$

Pour évaluer a_{n+r}, il suffit de trouver le coefficient de x dans

$$\frac{f(x)}{x^{r-2}\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \frac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)},$$

qui d'après le lemme 2 est égal à

$$(10) \qquad \sum_{j=2}^{m+2-n-r} \frac{f^{(n+j+r-2)}(0)}{(n+j+r-2)!} S_q(n+j-1, n+1; b).$$

Pour compléter la preuve de ce résultat, il suffit maintenant d'évaluer la limite de l'équation (9). Pour ce faire, nous procédons de la façon suivante.

Nous avons le développement en fractions partielles

$$(11) \qquad \frac{(-1)^n (q^n-1)\dots(q-1) f(x)}{x^{r}\left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right)\dots\left(x - \frac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} = \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_r}{x^r} + R(x),$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-037-9 Published online by Cambridge University Press

où $R(x)$ désigne la somme des fractions correspondantes aux facteurs $(x - (q^b - 1)/(q - 1))\ldots(x - (q^{n+b} - 1)/(q - 1))$. Il est aisé de montrer que $A_i = c_{i-1}$, $i = 2, \ldots, r$. Cependant, pour $0 \leq j \leq r$, nous savons que

$$A_{r-j} = \frac{1}{j!} \lim_{x\to 0} \frac{d^j}{dx^j}\left\{\frac{(-1)^n(q^n - 1)\ldots(q - 1)f(x)}{\left(x - \dfrac{q^b - 1}{q - 1}\right)\ldots\left(x - \dfrac{q^{n+b} - 1}{q - 1}\right)}\right\}$$

et puisque d'après (11),

$$A_1 = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(-1)^n(q^n - 1)\ldots(q - 1)f(x)}{x^{r-1}\left(x - \dfrac{q^b - 1}{q - 1}\right)\ldots\left(x - \dfrac{q^{n+b} - 1}{q - 1}\right)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{c_j}{x^j}\right\}$$

alors

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(-1)^n(q^n - 1)\ldots(q - 1)f(x)}{\left(x - \dfrac{q^b - 1}{q - 1}\right)\ldots\left(x - \dfrac{q^{n+b} - 1}{q - 1}\right)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{c_j}{x^j}\right\}$$
$$= \frac{1}{(r - 1)!} \lim_{x\to 0} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left\{\frac{(-1)^n(q^n - 1)\ldots(q - 1)f(x)}{\left(x - \dfrac{q^b - 1}{q - 1}\right)\ldots\left(x - \dfrac{q^{n+b} - 1}{q - 1}\right)}\right\}. \tag{12}$$

A l'aide de la règle de Leibniz, le membre de droite de (12) devient

$$\frac{(-1)^n(q^n - 1)\ldots(q - 1)}{(r - 1)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} f^{(r-j-1)}(0)$$
$$\times \lim_{x\to 0}\left\{\left(x - \frac{q^b - 1}{q - 1}\right)^{-1}\ldots\left(x - \frac{q^{n+b} - 1}{q - 1}\right)^{-1}\right\}^{(j)} \tag{13}$$

et en utilisant la dérivée de fonctions composées [5], nous avons

$$\frac{d^j}{dx^j}\left\{\left(x - \frac{q^b - 1}{q - 1}\right)^{-1}\ldots\left(x - \frac{q^{n+b} - 1}{q - 1}\right)^{-1}\right\}$$
$$= (-1)^j\left(x - \frac{q^b - 1}{q - 1}\right)^{-1}\ldots\left(x - \frac{q^{n+b} - 1}{q - 1}\right)^{-1} A(T_1, \ldots, T_j) \tag{14}$$

où

$$T_m = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left(x - \dfrac{q^{i+b} - 1}{q - 1}\right)^m}, \qquad 1 \leq m \leq j$$

En substituant (14) dans (13) et reportant cette nouvelle équation dans (9), on obtient finalement le résultat.

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-037-9 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 2. *Soit n et r des entiers positifs et soit $f(x)$ un polynôme dont le degré est plus petit que $n + r$. Alors pour tout nombre réel b, $b \neq 0, -1, \ldots, -n$, nous avons*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} f(q^{i+b})}{q^{in} \left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^{r-1}} = (1-q)^{r-1} f(0) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right)$$

$$- \frac{q^{(n+1)b}(q-1)^{r-1}(q^n-1)\ldots(q-1)}{(q^b-1)\ldots(q^{n+b}-1)} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(-1)^j}{(r-1-j)!}$$

$$\times \left\{ f^{(r-1-j)}(1) + \sum_{i=1}^{r-1-j} \binom{r-j-1}{i} \frac{f^{(r-1-i-j)}(1)}{(q-1)^i} A(B_1, \ldots, B_i) \right\}$$

$$B_k = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^k}, \qquad 1 \leq k \leq r-2$$

et dans le cas où lorsque la somme de droite est vide, celle-ci est interprétée comme étant égale à 0.

DÉMONSTRATION. Soit h un polynôme dont le degré est plus petit que $n + r$, alors d'après (7), nous avons

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} (q-1)^n h\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^{r-1} q^{nb} q^{i(n-1)} \left(x - \dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^n (q^n-1)\ldots(q-1) h(x)}{x^{r-1}\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)\ldots\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{c_j}{x^j}$$

Cependant, d'après (6), nous avons pour $1 \leq j \leq r-1$

$$c_j = \frac{1}{(r-1-j)!} \lim_{x \to 0} \frac{d^{r-1-j}}{dx^{r-1-j}} \left\{ \frac{(-1)^n (q^n-1)\ldots(q-1) h(x)}{\left(x - \dfrac{q^b-1}{q-1}\right)\ldots\left(x - \dfrac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^n (q^n-1)\ldots(q-1)}{(r-1-j)!} \sum_{i=0}^{r-1-j} \binom{r-1-j}{i} h^{(r-1-j-i)}(0)$$

$$\times \lim_{x \to 0} \left\{ \left(x - \frac{q^b-1}{q-1}\right)^{-1} \ldots \left(x - \frac{q^{n+b}-1}{q-1}\right)^{-1} \right\}^{(i)}.$$

En utilisant (14), nous obtenons

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-037-9 Published online by Cambridge University Press

$$c_j = -\frac{(q^n-1)\dots(q-1)(q-1)^{n+1}}{(r-1-j)!(q^b-1)\dots(q^{n+b}-1)}\Big\{h^{(r-1-j)}(0)$$
$$+\sum_{i=1}^{r-1-j}\binom{r-1-j}{i}h^{(r-1-j-i)}(0)A(B_1,\dots,B_i)\Big\}$$

où

$$B_k = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r-2.$$

Soit $x = -(1/(q-1))$ et $h(x) = f(1+(q-1)x)$, alors on obtient

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i\begin{bmatrix} n \\ i\end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}}(q-1)^n f(q^{i+b})}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^{r-1} q^{i(n-1)}\left(\dfrac{-q^{i+b}}{q-1}\right)q^{nb}}$$
$$= \frac{(-1)^n(q^n-1)\dots(q-1)f(0)}{\left(\dfrac{-1}{q-1}\right)^{r-1}\left(\dfrac{-q^b}{q-1}\right)\dots\left(\dfrac{-q^{n+b}}{q-1}\right)} - \sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j(q-1)^j c_j^*,$$

où

$$c_j^* = -\frac{(q^n-1)\dots(q-1)}{(r-1-j)!(q^b-1)\dots(q^{n+b}-1)}\Big\{(q-1)^{r-1-j}f^{(r-1-j)}(1)$$
$$+\sum_{i=1}^{r-1-j}\binom{r-1-j}{i}(q-1)^{r-1-i-j}f^{(r-1-j-i)}(1)A(B_1,\dots,B_i)\Big\}.$$

Finalement, de simples manipulations nous permettent d'obtenir le résultat escompté.

4. **Quelques conséquences**.

COROLLAIRE 1. *Soit n un entier positif et soit $f(x)$ un polynôme dont le degré est plus petit que $n+2$. Alors pour tout nombre réel b, $b \neq 0, -1, \dots, -n$, nous avons*

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i\begin{bmatrix} n \\ i\end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} f\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}{q^{nb}q^{i(n-1)}\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)^2} = \frac{(q^n-1)\dots(q-1)(q-1)}{(q^b-1)\dots(q^{n+b}-1)}$$
$$\times\left\{f'(0)+f(0)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\left(\dfrac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)}\right\}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de poser $r = 2$ dans l'équation du théorème 1.

En posant $r = 1$ dans l'énoncé du théorème 2, on obtient

https://doi.org/10.4153/CMB-1986-037-9 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 2. *Soit n un entier positif et soit $f(x)$ un polynôme de degré plus petit que $n+1$. Alors pour tout nombre réel b, $b \neq 0, -1, \ldots, -n$, nous avons*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} f(q^{i+b})}{q^{in}} = f(0) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right).$$

Remarque. Puisque $\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-i \end{smallmatrix}\right]$, alors l'équation du corollaire 2 devient

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} f(q^{n-1+b}) = (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} f(0) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right).$$

Cependant, si nous posons $r = 2$, le théorème 2 devient

Corollaire 3. *Soit n un entier positif et soit $f(x)$ un polynôme de degré plus petit que $n+2$. Alors pour tout nombre réel b, $b \neq 0, -1, \ldots, -n$, nous avons*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i-1)}{2}} f(q^{i+b})}{q^{in}\left(\frac{q^{i+b}-1}{q-1}\right)} = (1-q) f(0) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right)$$
$$+ \frac{q^{(n+1)b}(q-1)(q^n-1)\ldots(q-1)f(1)}{(q^b-1)\ldots(q^{n+b}-1)},$$

En spécifiant le polynôme $f(x)$ ou en spécifiant r dans les theorèmes 1 ou 2, nous pouvons établir de nombreuses conséquences du même type que celles énoncées précédemment. Cependant, il est intéressant de noter que lorsque q tend vers 1, le théorème 1 devient une généralisation du théorème 4 de [4] et qui s'énonce de la façon suivante:

Corollaire 4. *Soit n un entier positif et soit $f(x)$ un polynôme de degré m. Soit $r \geqslant 2$ un entier, alors pour tout nombre réel b, $b \neq 0, -1, \ldots, -n$, nous avons*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \binom{n}{i} f(i+b)}{(i+b)^r} = \frac{n!}{(r-1)!\, b(b+1)\ldots(b+n)} \Bigg\{ f^{(r-1)}(0)$$
$$+ \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r-1}{j} f^{(r-1-j)}(0) A(B_1^*, \ldots, B_j^*) \Bigg\}$$
$$+ (-1)^n n! \sum_{j=2}^{m+2-n-r} \frac{f^{(n+j+r-2)}(0)}{(n+j+r-2)!} S_1(n+j-1, n+1; b)$$

où

$$B_k^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+b)^k}$$

et dans le cas où $m < n + r$, la somme vide est interprétée comme étant égale à 0.

References

1. G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Addison-Wesley, 1976.

2. G. Berman and K. Fryer, *Introduction to combinatorics*, (Academic Press, 1972).

3. L. Comtet, *Analyse combinatoire (tome 1)*, Presses Universitaire de France.

4. A. Mercier, *Quelques identités de l'analyse combinatoire*, Discrete Math., **49** (1984), pp. 139–149.

5. J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis*, (Princeton University Press, 1978).

DÉPARTMENT DES SCIENCES FONDAMENTALES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC A CHICOUTIMI
CHICOUTIMI, P. QUE.,
CANADA, G7H 2B1