TETRASPHERES. I

A. DE MAJO

Les propriétés anallagmatiques de groupes de sphères ont été étudiées dans des contextes divers ces dernières années (voir **(4)**, **(5)**). Dans la note qui suit nous étudions les propriétés anallagmatiques de certains groupes de 4 sphères, nous plaçant à un point de vue élémentaire.

A fin de ne pas alourdir la rédaction nous omettrons de spécifier chaque fois que les points, droites ou sphères considérés sont toujours supposés être dans la position relative la plus générale possible compatible avec les définitions données.

L'index i pourra toujours prendre les valeurs $i = 1, 2, 3, 4$.

1. La configuration C_{12}**.** L'on sait (voir p.ex. **(3)** p. 134) que étant données 4 sphères en position générale les centres et axes de similitude de ces sphères forment une configuration de Reye.

Nous appelleront C_{12} une telle configuration, et rappelons qu'elle est projectivement équivalente à un cube, son centre et ses trois sommets à l'infini. On peut également considérer cette figure comme formée de trois tétraèdres tels que deux d'entre eux sont homologiques par rapport à un sommet et la face opposée du troisième. Chaque arête de l'un de ces tétraèdres coupe une arête de chacun des deux autres, et les deux points ainsi obtenus forment un quaterne harmonique avec les sommets du 1er tétraèdre sur cette arête. On obtient ainsi un groupe de 12 points, formant une C_{12}, que nous dirons *associée* à la 1ère. Notons que l'associativité est une propriété symétrique.

2. Octades. Nous appelleront octade la figure formée par quatre couples de points, A_i, A^i, sommets de quatres arêtes qui concourent au centre de l'octade.

Les 24 droites joignant les 8 points donnés 2 à 2 et ne contenant pas d'arête se coupent en 12 points, formant une C_{12}. Soit C_{12}' la configuration associée. Si l'on dénote par A_{ab} le point d'intersection des droites $A_a A_b - A^b A^a$, par A^{ab} celui des droites $A_a A^b - A_b A^a$, les trois tétraèdres associés à C_{12}' ont des couples d'arêtes opposées de la forme

$$\text{(I)}\quad A_{ab}A^{cd} - A_{cd}A^{ab}, \quad \text{(II)}\quad A_{ab}A_{cd} - A^{ab}A^{cd}, \quad \text{(III)}\quad A_{ab}A^{ab} - A_{cd}A^{cd}.$$

Les 32 droites joignant chacun des 4 sommets d'un tétraèdre du type I ou II aux 8 sommets de l'octade donnée concourent 4 par 4 aux 8 sommets d'une autre octade de même centre.

Reçu le 10 janvier, 1960.

On obtient en tout trois octades de cette manière et l'on prouve facilement la

Proposition 1. *A chaque octade correspondent deux autres octades de même centre, et ces trois octades sont associées à une C_{12}, de telle façon que chacun des sommets de l'une des octades est aligné avec chacun des sommets de chacune des deux autres octades par rapport aux sommets de l'un des tétraèdres associés à la C_{12}.*

Comme les sommets de deux telles octades se correspondent de 4 manières différentes de façon que les 8 droites joignant les sommets correspondants soient concourantes, l'on démontre facilement que pour que les figures formées par les sommets de deux octades associées soient inverses l'une de l'autre par rapport à 4 pôles différents il faut que:

(a) Les produits $OA_i \cdot OA^i$ soient égaux entre eux, ce qui implique que chacun des 4 couples de sommets opposés A_iA^i soit commun à 3 d'entre 4 sphères.

(b) Deux quelconques de ces 4 sphères se coupent suivant un angle égal ou supplémentaire à celui des deux autres.

Nous établirons au § 10 que ces deux conditions sont non seulement nécessaires mais aussi suffisantes.

3. Quadrisphères. Nous appellerons quadrisphère (S) la figure formée par 4 sphères S.

Trois quelconques de ces sphères ont en commun un couple de points. Le quadrisphère a donc 4 couples de sommets opposés A_iA^i, formant une octade. Les deux sommets opposés A_iA^i, alignés avec le centre radical O, sont inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère S_o orthogonale aux 4 sphères données.

L'inverse d'un quadrisphère est un autre quadrisphère, dont chaque angle est égal ou supplémentaire à l'angle correspondant de (S), et ceci d'après l'emplacement du pôle d'inversion.

Une étude détaillée des possibilités correspondantes montre que:

Proposition 2. *L'inversion ne peut donner pour les quadrisphères inverses que huit dispositions angulaires différentes.*

4. Quadrisphères de rayons donnés. Cherchons les points qui pris comme pôles d'inversion transforment le quadrisphère (S), dont les rayons sont r_i en un quadrisphère (S') dont les 4 rayons sont proportionnels à 4 nombres donnés, e_i. Chacun de ces pôles est commun à 6 surfaces, lieux des points tels que

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{r_a e_q}{r_b e_s}$$

(w_a = puissance par rapport à S_a). Or ce lieu se compose de deux sphères appartenant au faisceau linéaire défini par S_a et S_b. Nous dirons que la sphère $S_{ab}{}^{qs}$ dont le centre est extérieur aux points O_aO_b (centres des sphères S_a et S_b) est extérieure.

Chacun des pôles cherchés peut être ainsi entièrement défini par la condition d'être commun à trois des 6 surfaces en question, par exemple:

$$S^e_{ab}\, pq\, S^i_{ab}\, pq - S^e_{ac}\, pr\, S^i_{ac}\, pr - S^e_{ad}\, ps\, S^i_{ad}\, ps.$$

On obtient ainsi 8 couples de points communs à 3 sphères orthogonales à S_o, donc inverses l'un de l'autre par rapport à S_o.

On montre facilement que les centres des sphères $S_{ij}{}^{ln}$ forment une C_{12}.

L'étude du cas où les points cherchés sont tous réels est particulièrement intéressante, et l'on obtient alors la

PROPOSITION 3. *Dans le cas où les* 8 *couples de points pôles des inversions cherchées sont tous réels, ces couples correspondent biunivoquement aux* 8 *dispositions angulaires que l'on peut obtenir par inversion.*

Si l'on impose au quadrisphère inverse uniquement la condition d'avoir ses rayons proportionnels aux nombres e_i, sans considérer l'ordre des sphères correspondantes le nombre des pôles possibles est multiplié par 24, et l'on a:

PROPOSITION 4. *D'un quadrisphère l'on peut déduire* 384 *autres quadrisphères inverses du premier et tels que les rayons des sphères qui les composent soient proportionnels à* 4 *nombres donnés.*

5. Quadrisphères inverses égaux. Il est naturel de se demander combien, parmi ces 384 quadrisphères peuvent être égaux entre eux. L'on vérifie aisément que deux pôles inverses par rapport à la sphère S_o donnent toujours par inversion des figures égales entre elles. Il faut donc examiner sous quelles conditions deux couples différents parmi les 192 couples de figures inverses pourront être composés de quadrisphères tous égaux. Ils devront avoir leurs sphères correspondantes égales entre elles, et aussi la même disposition angulaire.

Nous chercherons d'abord sous quelles conditions 2 couples de quadrisphères inverses ont la même disposition angulaire, ce qui implique soit l'égalité soit la symétrie des tétraèdres formés par leurs sommets. (On verra au § 11 que le deuxième cas ne se présente jamais).

Une étude détaillée des divers cas montre que si aucun des 6 angles n'est droit il faut que certains d'entre eux soient égaux ou supplémentaires aux autres. Le cas le plus intéressant est celui du

6. Tétrasphère. Nous appellerons ainsi le quadrisphère ayant trois angles arbitraires, les trois angles opposés étant égaux ou supplémentaires aux premiers.

Le tétrasphère sera dit pair si les couples d'angles opposés sont formés d'angles égaux, impair s'ils se composent d'angles supplémentaires aux premiers.

Appliquant les résultats des sections précédentes on démontre aisément la

PROPOSITION 5. *Tout tétrasphère peut être transformé de 8 façons différentes en 8 tétrasphères de rayons donnés, égaux entre eux, dans des inversions par rapport à 8 sphères principales, ayant pour centres les sommets d'un même quadrisphère—il existe 8 tels quadrisphères, correspondant chacun à une disposition angulaire différente. Toutes les sphères considérées sont orthogonales à une même sphère.*

7. Orthosphère, équisphère, isosphère.

(a) Un tétrasphère dont tous les angles sont droits sera dit *orthosphère.* Il y a 192 couples de pôles d'inversion par rapport auxquels l'on peut transformer un orthosphère en 384 orthosphères égaux entre eux. Citons quelques propriétés de l'orthosphère:

PROPOSITION 6. *Les 4 sphères d'un orthosphère et sa sphère orthogonale forment un ensemble de 5 sphères 2 à 2 orthogonales et dont les centres sont les sommets d'un pentagone orthique* (*voir* **(1)**, **(2)**).

PROPOSITION 7. *L'orthosphère est invariant par rapport à une inversion dont la sphère principale est l'une de ces 5 sphères.*

(b) Si les 4 nombres e_i sont égaux entre eux, les figures inverses d'un quadrisphère obtenues comme au § 4 ont leur 4 sphères égales entre elles etseront appelées *équisphères.*

On voit facilement que dans ce cas le centre des 12 sphères du type S_{ij}^{ln} ne sont autres que les centres d'homotéthie des 4 sphères S_i, et ces 12 sphères sont donc les sphères bissectrices des couples de sphères du quadrisphère donné.

Dans ce cas ci il n'y a que 8 couples distincts de pôles d'inversion, correspondant chacun à une disposition angulaire différente.

(c) Les équisphères obtenus à partir d'un tétrasphère sont dénommés *isosphères.* Parmi leur nombreuses propriétés nous citons:

PROPOSITION 8. *Le tétraèdre ayant pour sommets les centres des sphères d'un iosphère est isofacial s'il est pair, orthocentrique s'il est impair.*

8. Orthosphère adjoint. Parmi les 8 couples de points définis au § 7(b) quatre sont des pôles d'inversions qui transforment le tétrasphère en un isosphère pair, nous les désignerons par D_iD^i et le quadrisphère dont ils sont les sommets par (D).

Si l'on soumet la figure formée par un tétrasphère, ses sphères bissectrices et le quadrisphère (D) à une inversion dont l'un des D_i est un pôle l'on obtient comme transformé de (D) un orthosphère formé de 3 plans et une sphère. Il s'ensuit que (D) est un orthosphère.

On vérifie d'ailleurs aisément que les centres des sphères de (D) forment un tétraèdre conjugué à S_0.

On a donc la

PROPOSITION 9.

(a) *Les* 12 *sphères bissectrices d'un tétrasphère se coupent* 6 *à* 6 *en* 16 *points parmi lesquels* 8 *sont les sommets d'un orthosphère, dit adjoint au tétrasphère.*

(b) *Les centres des sphères de cet orthosphère forment un tétraèdre orthocentrique conjugué à la sphère orthogonale du tétrasphère.*

9. Propriété fondamentale du tétrasphère. Il s'ensuit des résultats du § 6 que tout point de l'espace peut être pris comme sommet d'un quadrisphère α tel que tous ses sommets donnent par inversion d'un tétrasphère donné des figures égales.

Comme l'orthosphère adjoint à un tétrasphère s'en déduit par des opérations anallagmatiques, les figures inverses de cet orthosphère par rapport à ces mêmes points seront également égales, et étant donné l'un de ces points la construction des autres sommets peut se faire à partir de (D) et non de (S); de sorte que les quadrisphères comme α ne dépendent que de (D). Un tel quadrisphère sera dit *annexé* à (D).

D'autre part l'on vérifie aisément que tout tétrasphère joint à (D) (c.à.d. tel que (D) soit son adjoint) est également annexé à (D). Or tout point de l'espace est l'un des centres des sphères d'un tétraèdre joint à un orthosphère donné. Deux tétrasphères joints à un même orthosphère sont dits *associés.*

Nous conclurons:

PROPOSITION 10.

(a) *Etant donné un tétrasphère, tout point de l'espace est sommet d'un second tétrasphère, associé au premier, tel que tous les sommets de l'un quelconque des deux sont des pôles d'inversions transformant l'autre en tétrasphères égaux.*

(b) *La propriété d'être associé est transitive pour les tétrasphères.*

10. Tétrasphères conjugués. Au § 8 nous avons considéré l'orthosphère (D) dont les sommets sont 4 couples de pôles transformant le tétrasphère en isosphère pair, les 8 pôles transformant le tétrasphère en isosphère impair sont les sommets d'un autre quadrisphère, dénommé (E).

Nous appelerons P_i les centres des sphères de l'orthosphère adjoint à un tétrasphère.

Considérons la figure formée par un tétrasphère (S), ses sphères bissectrices, les quadrisphères (D) et (E), et soumettons-la à une inversion de pôle P_i. Il est facile de voir que la figure est invariante, pour une puissance d'inversion convenable.

Puisque (E) est invariant, que les sphères bissectrices sont transformées en sphères bissectrices, et que (S) n'est pas invariant en général (sauf si ses 4 centres sont coplanaires), il s'ensuit que (S) et (E) sont inverses l'un de l'autre; donc (E) est également un tétrasphère. D'où la

PROPOSITION 11. *(S) et (E) sont deux tétrasphères inverses l'un de l'autre par rapport à chacun des 4 pôles P_i. Nous dirons qu'ils sont conjugués.*

Ceci démontre que les conditions nécessaires énoncées au § 2 pour que deux octades soient inverses l'une de l'autre sont aussi suffisantes.

11. Egalité ou symétrie. Les 4 poles P^i, pieds des hauteurs du tétraèdre P formé par les points P_i transforment également (S) en des tétrasphères égaux à (E), mais ne coïncident pas avec ce dernier, car ils lui sont symétriques par rapport aux hauteurs P_iP^i.

Ceci nous permet de montrer que quels que soient les 8 pôles déduits par continuité des pôles P_i et P^i les figures obtenues sont toujours égales et jamais symétriques—comme annoncé au § 5.

En effet l'égalité entre figures inverses ne pourrait venir à disparaître que si l'une des figures vient à posséder un plan de symétrie, ce qui exige que le pôle correspondant soit sur S_0. Or on vérifie aisément que deux pôles inverses par rapport à S_0 donnent des figures inverses égales, le passage d'un pôle par S_0 ne peut donc pas changer l'égalité en symétrie.

12. Construction de tétrasphères associés. La considération de l'isosphère associé à P dont les sommets sont les points P_i et P^i, et de son inverse (Q) par rapport à un pôle P_i, qui a pour sommets les 6 pieds Q_{ab} des perpendiculaires communes aux arêtes opposées de P, le point O et un point à l'infini permet de voir facilement que l'on a la

PROPOSITION 12. *Les inverses du tétrasphère (S) par rapport aux pieds des perpendiculaires communes aux arêtes de son tétraèdre associé P sont les symétriques de ce tétrasphère par rapport aux plans hauteurs menés par les arêtes opposées à ces pôles.*

Ceci nous permet de construire un tétrasphère associé à un tétraèdre orthocentrique, lorsque l'on se donne l'un de ses sommets, A_a p.ex.

A^a est l'inverse de A_a par rapport à S_0.

A_b, A^b sont à l'intersection des droites joignant Q_{ab} ou Q_{cd} aux symétriques de A_a et A^a par rapport aux plans hauteurs P_{cd} (mené par P_c et P_d) et P_{ab}.

La considération des questions de réalité nous mène alors à la

PROPOSITION 14. *Un tétrasphère réel, associé à un tétraèdre réel conjugué à une sphère S_0 imaginaire, a ses 8 sommets réels; lorsque la sphère S_0 est réelle, les 8 sommets de ce tétrasphère réel sont simultanément réels ou imaginaires.*

13. Tétrasphère et pentagone orthique. Au § 10 nous avons considéré le tétrasphère conjugué à (S). Soit B_i, B^i ses sommets.

L'ensemble de 16 points A_i, A^i, B_i, B^i jouit de nombreuses propriétés par rapport aux inversions dont les 5 sphères principales, 2 à 2 orthogonales, sont la sphère S_o et les 4 sphères principales D_i, de centres P_i.

Le tableau ci-après donne pour chacune de ces sphères la répartition des 16 sommets entre les 10 tétrasphères deux à deux conjugués.

TABLEAU

Sphère orthogonale	Centre radical	Premier tétrasphère	Second tétrasphère
S_o	O	$A_1A^1-A_2A^2-A_3A^3-A_4A^4$	$B_1B^1-B_2B^2-B_3B^3-B_4B^4$
D_1	P_1	$A_1B_1-A_2B^2-A^3B^3-A^4B^4$	$A^1B^1-A^2B_2-A_3B_3-A_4B_4$
D_2	P_2	$A_1B_2-A_2B^1-A_3B^4-A_4B^3$	$A^1B^2-A^2B_1-A^3B_4-A^4B_3$
D_3	P_3	$A_1B_3-A_2B^4-A^3B^1-A_4B^2$	$A^1B^3-A^2B_1-A_3B_1-A^4B_2$
D_4	P_4	$A_1B_4-A_2B^3-A_3B^2-A^4B^1$	$A^1B^4-A^2B_3-A^3B_2-A_4B_1$

BIBLIOGRAPHIE

1. N. A. Court, *On five mutually orthogonal spheres*, Ann. of Math., *30* (1929).
2. ——— *Sur quatre sphères réelles deux à deux orthogonales*, Mathesis, *65* (1956).
3. Hilbert, Cohn, Vossen, *Geometry and the imagination*, (New York, 1952).
4. R. Lagrange, *Produits d'inversions et métrique conforme* (Paris, 1957).
5. ——— *Sur les systèmes isogonaux de shpères*, Ann. Scient. E. N. Sup., t.73 (1959).

Paris