SUR LA DETERMINATION D'UN CONTRAT OPTIMAL DE REASSURANCE

JEAN LEMAIRE

Belgique

RÉSUMÉ

Ohlin [7] a montré que la réassurance Stop Loss est optimale pour la cédante lorsque celle-ci évalue ses risques au moyen d'une fonction de perte continue. Nous généralisons cette propriété au cas de l'étendue, puis nous montrons qu'elle n'est plus vérifiée lorsque la compagnie utilise un paramètre basé sur certains percentiles. Nous démontrons ensuite un théorème d'optimalité permettant de calculer la valeur du plein en fonction de l'augmentation du portefeuille.

SUMMARY

Ohlin [7] showed optimality properties of Stop Loss reinsurance when the ceding insurer uses a continuous loss function to evaluate his risks. We generalize this property to the range of the distribution; we then show that Stop Loss reinsurance is no longer the best form when the company uses a percentile parameter. Finally we prove an optimality theorem concerning chance games which allows us to determine the retention as a function of the size of the portfolio.

§ 1. FORME OPTIMALE

Considérons une partie C_1 assumant la responsabilité de n contrats. Désignons par $F_\nu(x_\nu)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ_ν représentant le montant total des sinistres afférents au risque $\nu(\nu = 1, \ldots, n)$ pour toute la période considérée, et par $F(x)$ la fonction de répartition de ξ, le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille. Cette variable ξ peut être modiifée par une réassurance souscrite auprès de la compagnie C_2. Soit $T(x)$ la portion de x conservée par la cédante et $(I - T)(x)$ la fraction complémentaire réassurée. Nous supposons que C_2 n'exige qu'une prime nette pour la prise en charge d'une partie du portefeuille de C_1.

Deux problèmes se posent à la cédante:

1) le choix d'une forme de réassurance;
2) la détermination du niveau de cette forme.

Le premier de ces problèmes dépend évidemment de la politique adoptée par la compagnie, c'est-à-dire du critère adopté pour comparer deux transformations $T(x)$ et $T'(x)$. Ce critère est lui-même dépendant du paramètre choisi pour mesurer la dispersion de la distribution des risques. Le paramètre le plus naturel pour une mesure de la stabilité d'un traité est la variance, qui correspond à une fonction de perte quadratique. Borch [1] a montré que dans ce cas, la réassurance Stop Loss est optimale pour C_1 et constitue la plus mauvaise forme pour C_2. Le choix de la variance est évidemment critiquable. Ohlin [7] a généralisé le théorème de Borch à une fonction de perte quelconque, pourvu qu'elle soit convexe, continue, nulle à l'origine et non-négative. Cette formulation englobe tous les paramètres de dispersion habituels à l'exception de l'étendue et des paramètres basés sur les percentiles. Or, d'un point de vue théorique, l'étendue possède une signification importante: elle constitue le paramètre le plus pessimiste. Minimiser l'étendue assimile la nature à un être malveillant et représente l'analogue du critère du minimax de la théorie des jeux. D'autre part, cette mesure de dispersion est la seule qui permette de donner à une compagnie la certitude absolue de ne pas être ruinée (si ses réserves sont supérieures à l'étendue après réassurance). Nous allons montrer que le théorème d'Ohlin reste vrai lorsque l'on adopte ce paramètre comme mesure du risque.

Minimiser l'étendue pour une prime nette de réassurance donnée est un problème équivalent à celui qui consiste à minimiser la prime pour une réduction d'étendue donnée. Nous allons montrer que la réassurance Stop Loss permet d'atteindre une étendue fixée à un coût inférieur à celui des autres formes.

Théorème 1: La réassurance Stop Loss coûte moins cher que la réassurance en quote-part, pour une réduction d'étendue fixée.

Démonstration: Soit E l'étendue initiale du portefeuille. Nous pouvons toujours effectuer un changement de variable de manière à avoir $E = 1$ (si E est infini, le résultat est immédiat). Soit e l'étendue après réassurance ($0 \leq e < 1$). Pour une réassurance Stop Loss de plein N, e vaut précisément la limite N. La prime P'_s à verser à C_2 vaut

$$P'_s = \int_0^1 (x - e)\, dF(x).$$

La prime correspondante P'_q pour une réassurance en quote-part vaut

$$P'_q = (1 - e) \int_0^1 x dF(x).$$

Nous devons montrer que $P'_s \leq P'_q$, c'est-à-dire

$$\int_e^1 (x - e)\, dF(x) \leq (1 - e) \int_0^1 x dF(x),$$

ou
$$e \int_0^1 x dF(x) - e \int_e^1 dF(x) \leq \int_0^1 x dF(x) - \int_e^1 x dF(x)$$

$$= \int_0^e x dF(x).$$

Il suffit (puisque $e < 1$) de montrer que

$$e \int_0^1 x dF(x) - e \int_0^e x dF(x) = e \int_e^1 x dF(x) \leq e \int_e^1 dF(x).$$

Cette dernière inégalité est triviale, car x ne prend que des valeurs inférieures à 1. De la même manière on montre la supériorité de la réassurance Stop Loss sur toute forme proportionnelle.

Théorème 2: La réassurance Stop Loss est meilleure que la réassurance Excess of Loss.

Démonstration: Pour la réassurance Stop Loss

$$P'_s = \int_e^\infty (x - e)\, dF(x).$$

Pour avoir une étendue égale à e dans le cas d'une réassurance Excess of Loss, il faut que la somme des rétentions L_ν soit égale à e.

$$\sum_{\nu=1}^{n} L_\nu = e.$$

La prime totale P'_e vaut

$$P'_e = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu}^\infty (x_\nu - L_\nu)\, dF_\nu(x_\nu).$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100005821 Published online by Cambridge University Press

Il suffit de faire la démonstration pour un portefeuille comprenant deux contrats. Il faut montrer que $P'_s \leq P'_e$, ou

$$\int_e^\infty (x-e)\,dF(x) < \sum_{\nu=1}^{2} \int_{L_\nu}^{\infty} (x_\nu - L_\nu)\,dF_\nu(x_\nu);$$

$$\int_{L_1+L_2}^{\infty} (x_1-L_1)\,dF(x) + \int_{L_1+L_2}^{\infty} (x_2-L_2)\,dF(x) \leq \int_{L_1}^{\infty} (x_1-L_1)\,dF_1(x_1) + \\ + \int_{L_2}^{\infty} (x_2-L_2)\,dF(x_2).$$

Supposons $L_1 > L_2$ et décomposons les intégrales du premier membre

$$\int_{L_2}^{L} (x_1-L_1)\,dF(x) + \int_{L_1}^{\infty} (x_1-L_1)\,dF(x) + \int_{L_2}^{\infty} (x_2-L_2)\,dF(x) \\ - \int_{L_2}^{L_1} (x_2-L_2)\,dF(x) \leq \int_{L_1}^{\infty} (x_1-L_1)\,dF_1(x_1) + \int_{L_2}^{\infty} (x_2-L_2)\,dF_2(x_2)$$

ou

$$\int_{L_2}^{L_1} (x_1-L_1)\,dF(x) - \int_{L_2}^{L_1} (x_2-L_2)\,dF(x) \leq \int_{L_1}^{\infty} (x_1-L_1)\,[dF_1(x)-dF(x)] \\ + \int_{L_2}^{\infty} (x_2-L_2)\,[dF_2(x)-dF(x)].$$

En intégrant par parties

$$[(x_1-L_1)\,(F_1(x)-F(x)]_{L_1}^{\infty} - \int_{L_1}^{\infty} [dF_1(x)-dF(x)] \\ +[(x_2-L_2)(F_2(x)-F(x))]_{L_2}^{\infty} - \int_{L_2}^{\infty} [dF_2(x)-dF(x)] \geq \int_{L_2}^{L_1} (x_1-L_1)dF(x) \\ - \int_{L_2}^{L_1} (x_2-L_2)\,dF(x).$$

Les termes entre crochets sont nuls. Il reste

$$F_1(L_1) + F_2(L_2) - F(L_1) - F(L_2) \geq \int_{L_2}^{L_1} (x_1-L_1)\,dF(x) \\ - \int_{L_2}^{L_1} (x_2-L_2)\,dF(x).$$

Le second membre est toujours négatif ou nul. Le premier membre est non-négatif car

$$F_1(L_1) = P(\xi_1 < L_1) \geq P(\xi_1 + \xi_2 < L_1) = F(L_1),$$

les variables considérées ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Par conséquent l'inégalité est vérifiée. Une démonstration similaire s'applique à toutes les formes non-proportionnelles.

Corollaire: La réassurance Stop Loss est la plus mauvaise forme pour C_2. Ce corollaire est immédiat car l'étendue réassurée E-e s'ajoute simplement à l'étendue primitive du réassureur.

Tous les paramètres de dispersion envisagés jusqu'ici ont fourni les mêmes résultats. Nous allons montrer par un contre-exemple qu'il n'en est pas de même lorsque l'on emploie l'intervalle interquartile. Supposons que C_1 gère un portefeuille de 10.000 contrats identiques et indépendants pouvant conduire à un sinistre de montant unitaire avec une probabilité de 1%. Le montant total des sinistres admet une distribution binomiale de paramètre $p = 0{,}01$ et d'exposant $n = 10.000$. Approchons cette distribution par une normale de moyenne 100 et d'écart-type 10.

L'intervalle interquartile I vaut:

$$I = Q_3 - Q_1 = 106{,}74 - 93{,}26 = 13{,}48.$$

Une réassurance Stop Loss de plein $N = 110$ ne modifie évidemment pas cet intervalle

$$I_s = 13{,}48.$$

La prime pour cette réassurance vaut

$$P'_s = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \int_{110}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{10}\right)^2} dx - \frac{110}{10\sqrt{2\pi}} \int_{110}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{10}\right)^2} dx = 0{,}8326.$$

L'introduction d'une réassurance en quote-part de taux $a = 0{,}8326\%$ (qui coûte également $P'_q = 0{,}8326$) ramène l'intervalle interquartile à

$$I_q = 0{,}9917 \times 13{,}48 = 13{,}37.$$

La réassurance en quote-part conduit à une plus faible dispersion. Il en est évidemment de même pour tout paramètre basé sur les percentiles (il suffit de choisir un plein plus élevé que le percentile supérieur). Cette discordance entre ce résultat et les précédents ne présente cependant pas d'inconvénients majeurs car l'intervalle interquartile (et ses dérivés) constitue une très mauvaise mesure de risque pour un assureur: il ne tient pas compte des valeurs extrêmes de la distribution, qui sont évidemment primordiales dans ce cas.

On peut donc conclure que, pour tout paramètre de dispersion acceptable, la réassurance Stop Loss coûte le moins cher pour une dispersion fixée. La cédante a donc intérêt à choisir une forme de ce type.

§ 2. Niveau optimal

Les considérations développées au § 1. permettent à C_1 de choisir une forme optimale du traité de réassurance. Elles ne sont cependant d'aucune utilité pour déterminer le niveau du traité. Le choix de N constitue évidemment un problème important: un niveau trop élevé conduit à une dispersion trop grande des risques et donc à des résultats irréguliers. Un niveau trop faible entraîne une réduction excessive des bénéfices.

Il est évident que le niveau global de réassurance dépend de la puissance de l'assureur: une compagnie possédant un grand nombre de polices peut supporter plus facilement l'éventualité de gros sinistres qu'une petite compagnie et peut par conséquent conserver une fraction plus importante de ses risques.

Nous allons pour cette raison diviser le problème en deux parties:

a) détermination du niveau (à un facteur subjectif près) en fonction du nombre de polices;
b) détermination du facteur subjectif.

Supposons que les n contrats de C_1 soient indépendants, équidistribués et de fonction de fréquence $f(x)$ continue, définie sur l'intervalle $[0, \infty)$. Le théorème que nous allons démontrer est vrai pour des variables non-équidistribuées, mais l'introduction de telles variables n'a d'autre effet que d'encombrer les notations sans introduire de difficultés majeures dans la démonstration. Soit $g(x)$ le montant du sinistre se produisant avec un élément de probabilité $f(x)\,dx$. Nous supposons que $g(x)$ est convexe et ne contient pas de terme exponentiel positif. Nous allons montrer *qu'il y a moyen de choisir le plein N de telle manière que le montant total des sinistres après réassurance ne diffère de la prime nette retenue de plus d'une quantité arbitrairement petite qu'avec une probabilité asymptotiquement nulle.*

La prime nette perçue par C_1 pour un contrat ν vaut

$$p = E(\xi_\nu) = \int_0^\infty g(x) f(x)\, dx.$$

Les lois des grands nombres permettent d'affirmer que le montant total des sinistres converge vers la somme des primes nettes lorsque le nombre n de polices augmente indéfiniment. En pratique n est fini, et il y a toujours une différence entre les deux nombres.

Lévy [6] a démontré le théorème suivant:

> ,,Pour mesurer une probabilité avec une précision telle que l'erreur relative soit de l'ordre de $1/q$, il faut continuer les expériences jusqu'à ce que l'événement ait été réalisé environ q^2 fois''.

Donc, pour que la probabilité soit déterminée avec deux chiffres significatifs, il faut que l'événement ait été observé 10.000 fois environ. Pour n petit, les probabilités les plus faibles sont mal approchées par les fréquences relatives correspondantes. Comme ce sont en général les événements de faible probabilité qui conduisent aux plus gros sinistres, la différence entre les débours et les primes sera importante. Pour un petit nombre de polices, le montant total à payer sera relativement faible. Au fur et à mesure que n augmente, des événements plus rares vont apparaître et les montants des sinistres vont croître et tendre vers les primes totales perçues.

Ceci conduit naturellement à la conclusion suivante: il ne faut considérer qu'une certaine partie de la distribution, dépendant de n. La fraction tronquée doit diminuer lorsque n augmente, pour disparaître à la limite.

C_1 doit donc conserver les risques les plus probables et réassurer les autres. Nous proposons de choisir un niveau N tel que la prime nette conservée par C_1 pour un contrat ν s'élève à

$$p(n) = \int_{a(n)}^{b(n)} g(x) f(x)\, dx,$$

où $a(n)$ et $b(n)$ sont deux nombres tels que

$$\int_0^{b(n)} f(x)\, dx = 1 - \frac{P_0(n)}{2} \text{ ou } b(n) = F^{-1}\left[1 - \frac{P_0(n)}{2}\right];$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100005821 Published online by Cambridge University Press

$$\int_{a(n)}^{\infty} f(x)\,dx = 1 - \frac{P_0(n)}{2} \text{ ou } a(n) = F^{-1}\left[1 - \frac{P_0(n)}{2}\right].$$

$P_0(n)$ est une fonction uniforme dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Nous pouvons imposer les deux conditions suivantes à $P_0(x)$:

— elle doit être monotone non croissante; en effet, lorsque le nombre de polices n augmente, les fréquences se rapprochent de plus en plus des probabilités théoriques; il faut tenir compte d'une fraction plus importante de la distribution.
— $P_0(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} P_0(n)$. En effet, en nous appuyant sur la loi des grands nombres, nous pouvons exiger de retrouver la prime globale à la limite.

Bien que le problème ne se pose que pour n naturel, nous supposons $P_0(n)$ (et donc $p(n)$) définies pour tous les réels de l'intervalle $[0, \infty)$.

Cette formulation convient pour des fonctions de fréquence en cloche, c'est-à-dire pour des $g(x)$ en forme de U. Elle peut être aisément adaptée à d'autres distributions de sinistres. Par exemple, pour $g(x)$ monotone croissante, il suffit de poser

$$p(n) = \int_0^{c(n)} g(x) f(x)\,dx,$$

où
$$c(n) = F^{-1}[1 - P_0(n)].$$

$p(n)$ satisfait aux propriétés suivantes:

— elle est non-négative;
— c'est une fonction non-décroissante de n;
— elle tend asymptotiquement vers p.

Les lois des grands nombres permettent d'affirmer que

$$P\left[\left|\frac{\xi}{np} - 1\right| > \varepsilon\right] \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

Nous généralisons naturellement cette propriétés par la définition suivante:

Définition 1: Un traité Stop Loss de plein N est optimal si et seulement si

$$P\left[\left|\frac{\xi}{np(n)} - 1\right| > \varepsilon\right] \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

THÉORÈME 3: Une condition suffisante d'optimalité du traité est que $P_0(n)$ soit de la forme A/n, où A est une constante de l'intervalle $[0, 1]$.

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Le théorème est une conséquence immédiate des lemmes 1 à 4 et du fait que A doit faire partie de l'intervalle unitaire pour que $P_0(n)$ soit comprise entre 0 et 1.

Définition 2: Le traité satisfait à la condition A si

$$A(n) = o(np(n)),$$

où

$$A(n) = \max_{a(n) \leq x \leq p(n)} g(x).$$

Lemme 1: Si le traité satisfait à la condition A et si $P_0(n) = o(1/n)$, il est optimal.

Démonstration: Pour n fixé, décomposons la variable aléatoire ξ_ν en deux parties: η_ν contient les sinistres $\{g(x) \mid a(n) \leq x \leq b(n)\}$ et $\zeta_\nu = \{g(x) \mid x < a(n) \text{ ou } x > b(n)\}$.

Evidemment $\xi_\nu = \eta_\nu + \zeta_\nu$.

Par définition $E(\eta_\nu) = p(n)$.

D'autre part

$$\sigma_\nu^2 = \text{var}\,(\eta_\nu) < E(\eta_\nu^2) = \int_{a(n)}^{b(n)} g^2(x) f(x)\, dx$$

$$\leq \max_{a(n) \leq x \leq b(n)} g(x) \int_{a(n)}^{b(n)} f(x)\, g(x)\, dx$$

$$= p(n) \,.\, A(n).$$

$\eta_1 + \ldots + \eta_n$ est donc une variable aléatoire de moyenne $np(n)$ et de variance inférieure ou égale à $np(n)\, A(n)$. En appliquant l'inégalité de Bienaimé-Tchebycheff, il vient

https://doi.org/10.1017/S0515036100005821 Published online by Cambridge University Press

$$P\left\{\left|\frac{\eta_1+\ldots+\eta_n}{np(n)}-1\right|>\varepsilon\right\}=P\{|\eta_1+\ldots+\eta_n-np(n)|>\varepsilon\, np(n)\}$$
$$\leqslant\frac{n\sigma_\nu^2}{\varepsilon^2n^2[p(n)]^2}$$
$$<\frac{A(n)}{\varepsilon^2np(n)}\rightarrow 0.$$

en vertu de la condition A.

Pour accélérer la démonstration, il faut prouver que les variables ζ_ν deviennent négligeables, c'est-à-dire que

$$P\{\zeta_1+\ldots+\zeta_n>0\}\rightarrow 0 \qquad n\rightarrow\infty$$

$$P(\zeta_\nu>0)=\int_0^{a(n)}f(x)\,dx+\int_{b(n)}^{\infty}f(x)\,dx$$
$$=F[a(n)]+1-F[b(n)]$$
$$=\frac{P_0(n)}{2}+1-1+\frac{P_0(n)}{2}$$
$$=P_0(n).$$

Donc $\quad P[\zeta_1+\ldots+\zeta_n>0]<nP_0(n)\rightarrow 0\quad$ par hypothèse.

Posons $\quad P_1(n)=[P_0(n)]^{-1}$.

Lemme 2: Si le traité satisfait à la condition A, il est optimal si $P_1(n)$ est linéaire.

La propriété *a* été démontrée pour $P_1(n)=An^{1+\varepsilon}$. Il faut la prouver pour $\varepsilon=0$.

Utilisons la relation

$$P[|c-d|>f]\leq P\,||e-d|>f/2|+P[|c-e|>f/2]$$

avec
$$c=\xi_1+\ldots+\xi_n,$$
$$d=n\int_{a^*(n)}^{b^*(n)}f(x)\,g(x)\,dx,$$
$$e=n\int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)}f(x)\,g(x)\,dx.$$
$$f=\varepsilon e,$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100005821 Published online by Cambridge University Press

où les $a^*(n)$ et $b^*(n)$ sont obtenus en posant $P_0(n) = \frac{A}{n}$ et les $a^\varepsilon(n)$ et $b^\varepsilon(n)$ en choisissant $P_0(n) = \frac{A}{n^{1+\varepsilon}}$.

Il vient

$$P\{|\xi_1 + \ldots + \xi_n - n \int_{a^*(n)}^{b^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx| > \varepsilon n \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx\}$$

$$\leq P\{|n \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx - \int_{a^*(n)}^{b^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx| > \varepsilon n/2 \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx\}$$

$$+ P\{|\xi_1 + \ldots + \xi_n - n \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx| > \varepsilon n/2 \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx\}.$$

Le deuxième terme du second membre $\underset{n\to\infty}{\to} 0$ par application du lemme I. Le premier terme du second membre est égal à

$$P\{|\int_{a^\varepsilon(n)}^{a(n)} f(x)\, g(x)\, dx + \int_{b(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx| > \varepsilon/2 \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx\}.$$

Par le théorème de la moyenne, il vient

$$P\{|g(\xi) \int_{a^\varepsilon(n)}^{a(n)} f(x) dx + g(\eta) \int_{b(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x) dx| > \varepsilon/2\, g(\alpha) \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x) dx\}$$

$$= P\left\{\left|g(\xi)\left(\frac{A}{2n} - \frac{A}{2n^{1+\varepsilon}}\right) + g(\eta)\left(1 - \frac{A}{2n^{1+\varepsilon}} - 1 + \frac{A}{2n}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2} g(\alpha)\left(1 - \frac{A}{2n^{1+\varepsilon}} - \frac{A}{2n^{1+\varepsilon}}\right)\right\}$$

$$= P\left\{\left|\frac{A}{2}[g(\xi) + g(\eta)]\left(\frac{n^\varepsilon - 1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2} g(\alpha)\left(1 - \frac{A}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right\}$$

$$= P\left\{\left|K \frac{n^\varepsilon - 1}{n^{1+\varepsilon}}\right| > \frac{\varepsilon(n^{1+\varepsilon} - A)}{n^{1+\varepsilon}}\right\} \left(\text{où } K = \frac{(A/2)(g(\xi) + g(\eta))}{(g(\alpha)/2)}\right)$$

$$= P\{|K(n^\varepsilon - 1)| > n^{1+\varepsilon} - A\varepsilon\}.$$

En effectuant un développement en série de Mac Laurin, ce terme vaut

$$P\{|K(\varepsilon \operatorname{Log} n + (\varepsilon^2/2) \operatorname{Log}^2 n + \ldots\ldots + 1 - 1| > \varepsilon n + \varepsilon^2 n \operatorname{Log} n + \ldots - \varepsilon A\}$$

$$= P\{|K\varepsilon \operatorname{Log} n + (K/2)\,\varepsilon^2 \operatorname{Log}^2 n + \ldots| > \varepsilon(n - A) + \varepsilon^2 n \operatorname{Log} n + \ldots\}.$$

Cette probabilité est nulle à partir d'un n suffisamment grand. Par conséquent, le premier membre de l'inégalité tend vers o pour $n \to \infty$. Il nous faut montrer que

$$P\{|\xi_1 + \ldots + \xi_n - n \int_{a^*(n)}^{b^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx| > \varepsilon n \int_{a^*(n)}^{b^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx\} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

sachant que

$$P\{|\xi_1 + \ldots + \xi_n - n \int_{a^*(n)}^{b^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx| > \varepsilon n \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx\} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Ces deux probabilités ne diffèrent que par le deuxième membre

$$\varepsilon n \int_{a^\varepsilon(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx = \varepsilon n \int_{a^*(n)}^{b^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx + \varepsilon n \int_{a^\varepsilon(n)}^{a^*(n)} f(x)\, g(x)\, dx + \varepsilon n \int_{b^*(n)}^{b^\varepsilon(n)} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Le deuxième terme du second membre est égale à

$$\begin{aligned} \varepsilon n\, g(\xi)\, [F(a^*(n)) - F(a^\varepsilon(n))] &= \frac{A}{2}\, n\, g(\xi) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right] \\ &= \frac{A\, g(\xi)}{2} \, \frac{\varepsilon n^\varepsilon - 1}{n^\varepsilon} \\ &\approx \varepsilon \end{aligned}$$

et tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$. Il en est évidemment de même du dernier terme. Le lemme est ainsi démontré.

Lemme 3: La condition (A) est vérifiée lorsque $P_1(n) = (n^b/A)$ $(b < 1)$.

Démonstration: $\quad p(n) = \int_{a(n)}^{b(n)} f(x)\, g(x)\, dx.$

Donc $\quad p'(n) = f(b(n))\, g(b(n))\, b'(n) - f(a(n))\, g(a(n))\, a'(n);$

or $\quad \dfrac{\partial F(b(n))}{\partial n} = f(b(n)) \,.\, b'(n)$ et $\dfrac{\partial F(a(n))}{\partial n} = f(a(n)) \,.\, a'(n).$

Par conséquent $\quad p'(n) = \dfrac{\partial F(b(n))}{\partial n} \,.\, g(b(n)) - \dfrac{\partial F(a(n))}{\partial n}\, g(a(n)).$

Comme $F(b(n)) = 1 - \frac{P_0(n)}{2} = 1 - \frac{n^{-b}}{2}$; $F(a(n)) = \frac{P_0(n)}{2} = \frac{n^{-b}}{2}$ (en posant $A = 1$ par commodité),

il vient $\quad \frac{\partial F(b(n))}{\partial n} = \frac{b}{2} \frac{1}{n^{b+1}}$; $\quad \frac{\partial F(a(n))}{\partial n} = -\frac{b}{2} \frac{1}{n^{b+1}}$

et
$$p'(n) = \frac{b}{2} \frac{1}{n^{b+1}} [g(a(n)) + g(b(n))].$$

Donc
$$g(a(n)) + g(b(n)) = p'(n)\, n^{b+1} \cdot \frac{2}{b}.$$

La fonction $g(n)$ étant non négative,

$$\max (g(a(n)),\quad g(b(n))) \leq p'(n)\, n^{b+1} \cdot \frac{2}{b}.$$

La condition A devient

$$\frac{A(n)}{np(n)} = \frac{\max\limits_{a(n) \leq x \leq b(n)} g(x)}{np(n)} = \frac{\max (g(a(n)), g(b(n)))}{np(n)}$$

car $g(x)$ est convexe.

$$\leq \frac{2}{b} \frac{n^{b+1}}{n} \frac{p'(n)}{p(n)}$$
$$= \frac{2}{b}\, n^b \frac{p'(n)}{p(n)}.$$

Dans le cas où $p(n)$ est de forme polynomiale

$$p(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_r n^r,$$
$$p'(n) = a_1 + 2a_2 n + \ldots + r a_r n^{r-1}$$

$$\frac{A(n)}{np(n)} = \frac{2}{b}\, n^b \frac{a_1 + 2a_2 n + \ldots + r a_r n^{r-1}}{a_0 + a_1 n + \ldots + a_r n^r} \approx K\, n^b \frac{n^{r-1}}{n^r} \approx K\, n^{b-1},$$

ce qui tend vers 0 lorsque $b < 1$.

On aboutit au même résultat pour toute fonction $p(n)$ qui n'est pas du type exponentiel. Il est facile de voir que $p(n)$ est de forme exponentielle si et seulement si $g(x)$ l'est.

Lemme 4: Le lemme 3 est vérifié si $b = 1$.

La démonstration est similaire à celle du lemme 2.

§ 4. Un contre-exemple

Lorsque $g(n)$ contient un terme exponentiel positif, il peut ne pas y avoir optimalité, comme nous allons le montrer au moyen de l'exemple suivant:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} x^{-1/2}; \quad (x > 0)$$
$$g(x) = \sqrt{x}\, e^{x/2};$$
$$P_1(n) = n.$$

Il est facile de vérifier que

$$p = \infty$$

et
$$p(n) = \frac{c(n)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour montrer la non-optimalité de ce jeu, nous nous appuyons sur un théorème de Feller [3].

Théorème 4: Soit $a_n \to \infty$ une suite de nombres positifs. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite $\{b_n\}$ telle que $P\{ \mid S_n - b_n \mid > \varepsilon a_n\} \to 0$ pour $n \to \infty$, est que, pour tout $\delta > 0$, on ait simultanément

$$n \int_{|x| > \delta a_n} dF(x) \to 0 \text{ et } a_n^{-2} n \int_{|x| > a_n} x^2 dF(x) \to 0.$$

Dans notre cas, $n \int_{|x| > \delta a_n} dF(x) = n \int_{x > \frac{\delta c(n)}{\sqrt{2\pi}}} f(x)dx$ (en posant $a_n = p(n)$)

$$= n \int_{c(n)}^{\infty} f(x)dx \text{ (en posant } \delta = \sqrt{2\pi})$$
$$= n[1 - F(c(n))]$$
$$= n[1 - (1 - (1/n))]$$
$$= 1 \not\to 0.$$

Il n'y a donc pas optimalité.

D'autres exemples, donnés dans [5] permettent de voir que le théorème 3 ne peut être étendu: la condition est suffisante mais non nécessaire, et il peut ne pas y avoir convergence lorsque l'on choisit une fonction $P_0(n)$ „tronquant" plus vite ou moins vite que (A/n).

§ 5. Détermination de A

Le théorème 3 permet de déterminer le niveau optimal d'une réassurance Stop Loss en fonction de l'augmentation du nombre de polices. Le traité dépend cependant de la constante A de la fonction de troncature $P_0(n) = (A/n)$.

Le problème de décision est ainsi ramené au choix d'une constante en un seul point (ou, ce qui revient au même, au choix de l'origine de la courbe donnant N en fonction de n). A est l'élément subjectif du problème et ne peut être déterminée que lorsque la compagnie a précisé le but qu'elle désire atteindre.

Par exemple, si C_1 désire atteindre une variance $V(\eta)$, A peut être déterminée en résolvant le système de deux équations en les deux inconnues A et N:

$$\int_N^\infty (x - N)\, dF(x) = \int_0^\infty x dF(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a(n)}^{b(n)} f(x)\, g(x)\, dx.$$

$$V(\eta) = \int_0^N x^2 dF(x) + N^2 \int_N^\infty dF(x) - [N - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a(n)}^{b(n)} f(x)\, g(x)\, dx]^2.$$

Si C_1 a choisi l'étendue comme mesure de stabilité, le système se réduit à

$$\int_E^\infty (x - E)\, dF(x) = E(\xi) - E(\eta) = E(\zeta).$$

§ 6. Extensions

Le théorème 3 a été présenté sous forme de problème de réassurance, mais le champ de ses applications est évidemment beaucoup plus large et s'étend à tous les processus stochastiques. La démonstration du théorème dans le cas où les variables aléatoires considérées sont discrètes est donnée dans [5], ainsi que plusieurs contre-exemples. La généralisation à des variables pouvant prendre des valeurs négatives s'effectue sans aucune difficulté. La seconde partie de [5] est consacré à l'application du théorème au célèbre „Paradoxe de Saint Pétersbourg". Les prévisions théoriques sont confrontées aux résultats d'une simulation portant sur 2^{22} répétitions du jeu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Borch, K., „An attempt to determine the optimum amount of Stop Loss Reinsurance", Trans. of *the XVIth International Congress of Actuaries Bruxelles,* vol. *1*, pp. 597-610, 1960.

[2] Borch, K., „The optimal Reinsurance Treaty", *ASTIN Bulletin,* vol. *5* (1969). Part. 2, pp. 293-297.

[3] Feller, W., „*An introduction to probability theory and its applications*" New York, 1950, vol. *1*.

[4] Kahn, P., „Some remarks on a recent paper by Borch", *ASTIN Bulletin,* vol. *1* (1961), Part. 5, pp. 265-272.

[5] Lemaire, J., „Une nouvelle définition de l'équitabilité pour les jeux de hasard. Application au paradoxe de Saint-Pétersbourg" soumis pour publication aux *Annales de l'Institut H. Poincaré.*

[6] Levy, P., *Calcul des Probabilités,* Paris, 1925.

[7] Ohlin, J., „On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance", *ASTIN Bulletin,* vol. *5* (1969), part 2, pp. 249-266.

[8] Pesonen, E., „On optimal properties of the Stop Loss Reinsurance", *ASTIN Bulletin,* vol. *4* (1967), part 2, pp. 175-176.

https://doi.org/10.1017/S0515036100005821 Published online by Cambridge University Press