

**DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA REPRESENTATION
 INTÉGRALE DU NOYAU COMPLÈTEMENT
 SOUS-HARMONIQUE ET INVARIANT
 PAR ROTATIONS**

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Dans toute la suite R^n désigne l'espace euclidien à dimension n (≥ 1). On désigne par Δ l'opérateur de Laplace sur R^n . Dans la théorie du potentiel, un noyau de convolution sur R^n signifie une mesure de Radon positive dans R^n . Rappelons qu'un noyau de convolution de Dirichlet N sur R^n est un noyau de convolution sur R^n tel que $1/\hat{N}$ soit égal à une fonction définie-négative dans R^n à valeurs réelles, où \hat{N} désigne la transformée de Fourier de N (cf. [1]). Pour un nombre $p > 0$, G_p désigne le noyau de convolution de Dirichlet sur R^n vérifiant $(\Delta - p)G_p = -\varepsilon$ (au sens des distributions), où ε est la mesure de Dirac à l'origine. Si $n \geq 3$, on note $G = G_0$ le noyau newtonien avec $\Delta G = -\varepsilon$. Dans l'article précédent [2], on a montré le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit N un noyau de convolution sur R^n s'annulant à l'infini¹⁾ et invariant par rotations. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *N est complètement sous-harmonique (en dehors de l'origine); c'est-à-dire, pour tout l'entier $m \geq 0$, $\Delta^m N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine, où $\Delta^0 N = N$, $\Delta^1 = \Delta$ et $\Delta^m = \Delta^{m-1} \Delta$ ($\forall m \geq 2$).*

(2) *N est de la forme*

$$N = c\varepsilon + \int G_p d\nu(p),$$

où c et ν sont respectivement une constante ≥ 0 et une mesure positive sur $R^+ = \{t \in R^1; t \geq 0\}$.

Received April 17, 1974.

1) Cela signifie que, quelle que soit f une fonction finie et continue dans R^n à support compact, $\lim_{x \rightarrow \infty} N * f(x) = 0$.

Si un noyau de convolution N sur \mathbf{R}^n vérifie l'énoncé (2), alors N est un noyau de convolution de Dirichlet sur \mathbf{R}^n ou bien 0. Donc le présent théorème joue un rôle essentiel dans la discussion sur le cône convexe divisible (cf. [2] et [3]).

La démonstration du théorème dans [2] est très compliquée. Le but de cette note est de fournir une démonstration simple du présent théorème, en utilisant seulement le théorème de Bernstein.

§ 2. Une démonstration simple du théorème

Rappelons d'abord le théorème de Bernstein (cf. par exemple, [4]).

LEMME. Soit φ une fonction infiniment dérivable dans $(0, +\infty)$ à valeurs réelles. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:

(a) φ est complètement monotone; c'est-à-dire, pour tout l'entier $m \geq 0$, $(-1)^m (d^m/dt^m)\varphi \geq 0$ dans $(0, +\infty)$.

(b) φ est de la forme

$$\varphi(t) = \int \exp(-ts) d\nu(s) \quad (\forall t > 0),$$

où ν est une mesure positive sur \mathbf{R}^+ .

Dans ce cas, ν est uniquement déterminée, d'après l'injectivité de la transformation de Laplace.

Montrons notre théorème. L'implication (2) \Leftrightarrow (1) résulte immédiatement du fait que, pour tout l'entier $m \geq 0$ et pour tout $p \geq 0$, $\Delta^m G_p = p^m G_p$ en dehors de l'origine. Donc on montrera seulement l'implication (1) \Leftrightarrow (2). Supposons que l'énoncé (1) a lieu; alors il existe uniquement une constante $c \geq 0$ et une fonction infiniment dérivable $\varphi(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$ telles que $\int_0^1 \varphi(r^2) r^{n-1} dr < +\infty$ et $N = c\epsilon + \varphi(|x|^2) dx$. Ayant, pour tout l'entier $m \geq 0$,

$$\Delta^m N = \left(4|x|^2 \frac{d^2}{dt^2} + 2n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(|x|^2) dx$$

en dehors de l'origine, on a $(2t(d^2/dt^2) + n(d/dt))^m \varphi(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$. On a, pour toute la fonction infiniment dérivable f dans \mathbf{R}^n à support compact,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int f(x-y) d(\Delta^m N)(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int \Delta^m f(x-y) dN(y) = 0,$$

et la fonction $(2|x|^2(d^2/dt^2) + n(d/dt))^m \varphi(|x|^2)$ de x dans $\mathbf{R}^n - \{0\}$ est sous-harmonique. Donc on a

$$\frac{d}{dt} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \leq 0 \quad \text{dans } (0, +\infty),$$

et par suite

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \geq 0 \quad \text{dans } (0, +\infty).$$

Soit k un entier ≥ 1 et supposons que, quel que soit m un entier ≥ 0 ,

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \leq 0$$

dans $(0, +\infty)$. On a alors, pour tout l'entier $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^{m+1} \varphi(t) = 2t \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \\ &\quad + (n + 4k - 2) \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \end{aligned}$$

dans $(0, +\infty)$. D'après la présente hypothèse, on a

$$\frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \leq 0$$

dans $(0, +\infty)$. On a aussi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^{m+1} \varphi(t) = 2t \frac{d^{2(k+1)}}{dt^{2(k+1)}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \\ &\quad + (4k + n) \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \end{aligned}$$

dans $(0, +\infty)$. D'après l'inégalité obtenue ci-dessus, on a

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dt^{2(k+1)}} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \geq 0$$

dans $(0, +\infty)$. On obtient ainsi, par récurrence, que pour tous les entiers $k \geq 0$ et $m \geq 0$,

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt} \right)^m \varphi(t) \geq 0$$

dans $(0, +\infty)$. D'après le lemme, pour tout l'entier $m \geq 0$, il existe une mesure positive ν'_m sur \mathbf{R}^+ telle que

$$\left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) = \int \exp(-ts) d\nu'_m(s)$$

dans $(0, +\infty)$. Ayant $\lim_{t \rightarrow +\infty} (2t(d^2/dt^2) + n(d/dt))^m \varphi(t) = 0$, on a $\nu'_m(\{0\}) = 0$. Donc, en utilisant une certaine transformation, il existe une mesure positive ν_m dans $(0, +\infty)$ telle que

$$\left(2t \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt}\right)^m \varphi(t) = \int \frac{1}{(2\pi s^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{t}{4s}\right) d\nu_m(t)$$

dans $(0, +\infty)$. Ayant, pour tout l'entier $m \geq 0$,

$$A_{(x)} \left(2|x|^2 \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt}\right)^m \varphi(|x|^2) = \left(2|x|^2 \frac{d^2}{dt^2} + n \frac{d}{dt}\right)^{m+1} \varphi(|x|^2)$$

et

$$A_{(x)} \left(\frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right)$$

dans $\mathbf{R}^n - \{0\}$, on obtient, pour tout l'entier $m \geq 1$ et pour $t > 0$,

$$\int \frac{1}{(2\pi s^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{t}{4s}\right) d\nu_m(s) = \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(2\pi s^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{t}{4s}\right)\right) d\nu_{m-1}(s).$$

Donc on a, quels que soient k un entier ≥ 1 et f une fonction infiniment dérivable dans $(0, +\infty)$ à support compact,

$$\begin{aligned} &k \int \frac{1}{s^{n/2}} \int_s^\infty \exp\left(-\frac{k(t-s)}{4s}\right) f(t) dt d\nu_m(s) \\ &= k \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^{n/2}} \int_s^\infty \exp\left(-\frac{k(t-s)}{4s}\right) f(t) dt\right) d\nu_{m-1}(s). \end{aligned}$$

On peut montrer, d'autre part, qu'il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que, quels que soient k un entier avec $k \geq k_0$ et un point s de $(0, \frac{1}{2} \min_{t \in \text{supp}(f)} t)$,

$$k \int_s^\infty \exp\left(-\frac{k(t-s)}{4s}\right) |f(t)| dt \geq (k+1) \int_s^\infty \exp\left(-\frac{(k+1)(t-s)}{4s}\right) |f(t)| dt.$$

Par conséquent, en faisant $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int s^{1-n/2} f(s) d\nu_m(s) = \int \frac{d}{ds} (s^{1-n/2} f(s)) d\nu_{m-1}(s).$$

La fonction f étant quelconque, on a $\nu_m = -(d/dt)\nu_{m-1}$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'où, pour tout l'entier $m \geq 0$, $(-1)^m(d^m/dt^m)\nu_0 = \nu_m$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Donc il existe uniquement une fonction non-négative et infiniment dérivable φ dans $(0, +\infty)$ telle que $\nu_0 = \varphi(t)dt$ dans $(0, +\infty)$ et pour tout l'entier $m \geq 0$, $(-1)^m(d^m/dt^m)\varphi(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$. En utilisant encore le théorème de Bernstein, on peut écrire

$$\varphi(t) = \int \exp(-pt) d\nu(p) \quad (\forall t > 0),$$

où ν est une mesure positive sur \mathbf{R}^+ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} N &= c\varepsilon + \left(\int \frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) d\nu_0(t) \right) dx \\ &= c\varepsilon + \left(\iint_0^\infty \frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \exp(-pt) dt d\nu(p) \right) dx. \end{aligned}$$

Ayant

$$G_p = \left(\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi t^{1/2})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \exp(-pt) dt \right) dx$$

on obtient

$$N = c\varepsilon + \int G_p d\nu(p).$$

La démonstration est ainsi complète.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Beurling and J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. U.S.A., **45** (1959), 208–215.
- [2] M. Itô: Sur les cônes convexes de Riesz et les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques, Nagoya Math. J., **55** (1974), 111–144.
- [3] —: Sur l'unicité du cône convexe divisible constitué par de noyaux de convolution de Dirichlet, Nagoya Math. J., à paraître.
- [4] D. Widder: The Laplace transform, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

Université de Nagoya