Canad. Math. Bull. Vol. **27** (3), 1984

DIVISEURS DANS LES ANNEAUX DE SERIES FORMELLES EN UNE INFINITE D'INDETERMINEES

PAR
B. BALLET

RESUME. Etant donné un anneau commutatif unitaire A et un ensemble d'indices infini I; on peut obtenir, par passage à la limite projective, essentiellement trois anneaux A_1, A_2, A_3 de séries formelles en des indéterminées indexées par I et à coefficients dans A. On étudie alors les implications A factoriel $\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ factoriels et A de Krull $\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ de Krull. On donne à cet effet des conditions pour qu'une limite projective d'anneaux factoriels soit factorielle.

I. **Introduction.** Soit A un anneau commutatif, unitaire et intègre; I un ensemble d'indices infini. L'anneau des séries formelles $A\,[[X_i]]_{i\in I}$, qu'l'on notera A_1 dans la suite, est par définition ([1] ch. III §2 n° 11) l'algèbre large sur A du monoïde $N^{(I)}$ des applications de I dans N à support fini; en tant que A-module, il s'identifie à $A^{N^{(I)}}$. Pour tout $i\in I$, X_i est l'élément de $A^{N(I)}$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle d'indice φ_i où $\varphi_i(j)=\delta^i_j$. Un élément s de A_1 pourra être noté $s=\sum_{\varphi\in N^{(I)}} a_\varphi X^\varphi$ avec $X=\prod X_i^{\varphi(i)}$. D'autre part, désignons par $\mathscr{F}(I)$ l'ensemble des parties finies de I; pour tout $J\in\mathscr{F}(I)$, on posera $s_J=\sum_{\varphi\in N^J} a_\varphi X^\varphi$ et l'application $s\rightsquigarrow s_J$ est un homomorphisme surjectif d'anneaux: $A_1\to A_J=A[[X_i]]_{i\in J}$. Pour $J\subset K\in\mathscr{F}(I)$, l'homomorphisme précédent donne par restriction un homomorphisme $f_J^K: A_K\to A_J$, les f_J^K constituent un système projectif d'homomorphismes et A_1 s'identifie à la limite projective $\lim_{J\in\mathscr{F}(I)} A_J$. On peut distinguer dans A_1 trois autres anneaux de séries formelles en les indéterminées X_i $(i\in I)$:

(1) l'anneau A_2 des séries s telles que pour tout $J\in\mathscr{F}(I)$, s_J soit un polynôme, autrement dit, $A_2=\varprojlim_{J\in\mathscr{F}(I)} A[X_i]_{i\in J}$.

(2) l'anneau A_3 des séries qui n'ont chacune qu'un nombre fini de termes de degré donné. Cet anneau est le séparé complété de l'anneau de polynômes $A[X_i]_{i\in I}$ pour la topologie $\mathscr{T}$-adique, $\mathscr{T}$ étant l'idéal des polynômes sans coefficient constant. C'est donc encore une limite projective, mais d'anneaux non intègres.

(3) l'anneau A_4 des séries n'ayant chacune qu'un nombre fini de variables, c'est-à-dire l'union filtrante (ou la limite inductive) des anneaux A_J. Lorsque A

AMS Subject Classification (1980): 13A05.
Reçu par la redaction le 26 octobre 1982 et, sous une forme revisée finale, le 22 août 1983.

est le corps des complexes et I dénombrable, Cashwell et Everett ont établi dans [3] que A_1, qui s'identifie alors à l'anneau des séries formelles de Dirichlet à coefficients complexes, est factoriel. On va généraliser ce résultat au cas où I n'est pas dénombrable, en étudiant, systématiquement les propriétés "divisorielles" de A_1 induites pour celles de A. L'anneau A_3 hérite de certaines des propriétés de A_1, mais par contre l'anneau A_2 *n'a* aucune propriété divisorielle, et ceci quel que soit l'anneau de base A. Enfin, l'anneau A_4 n'est cité que pur mémoire, ses propriétés divisorielles sont bien connues (2 §3 ex. 2 et §1 ex. 9).

II. **Factorialité de A_1 et non-factorialité de A_2**

(1) *Etude de* $A1$. On va voir, de façon générale, que certaines limites projectives d'anneaux intègres factoriels sont factorielles.

Considérons un système projectif (W_J, f_J^K) d'anneaux intègres indexé par $\mathcal{F}(I)$, de limite projective $\mathcal{W}$. Pour $K \supset J$ et $w \in W_K$, on note simplement $(w)_J$ l'élément $f_J^K(w)$ lorsqu'aucune confusion ne sera possible. Il est immédiat que $\mathcal{W}$ est intègre, on note $\mathcal{U}$ le sous-groupe des unités du monoïde $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} - \{0\}$ et U_J celui du monoïde $W_J^* = W_J - \{0\}$. Enfin, pour un élément J_0 de $\mathcal{F}(I)$, on note $W(J_0)$ le sous-monoïde de $\mathcal{W}^*$ des éléments $(w_J)_{J \supset J_0}$ tels que $w_{J_0} \neq 0$.

LEMME I (de relèvement "modulo les unités"). *On suppose qu'il existe un système inductif d'homomorphismes* $\varphi_J^K : W_J \to W_K$ $(K \supset J)$ *tel que*:

(i) *Pour* $K \supset J$, $f_J^K \circ \varphi_J^K$ *est l'homomorphisme identité de* W_J.

(ii) *Pour tout couple* (J, J') *d'éléments de* $\mathcal{F}(I)$, *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} W_J \arrow[r, "\varphi_J^{J\cup J'}"] \arrow[d, "f^J_{J\cap J'}"'] & W_{J\cup J'} \arrow[d, "f_{J'}^{J\cup J'}"] \\ W_{J\cap J'} \arrow[r, "\varphi^{J'}_{J\cap J'}"] & W_{J'} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Alors, pour tout $J_0 \in \mathcal{F}(I)$, *l'homomorphisme canonique*

$$\mathcal{W}(J_0)/\mathcal{U} \to \varprojlim_{K \supset J_0} W_K^*/U_K$$

est bijectif.

L'injectivité est évidente, montrons la surjectivité. Soit (ω_K) un élément de $\varprojlim_{K \supset J_0} W_K^*/U_K$; et pour $K \supset J_0$, un relèvement w_K de ω_K dans W_K^*. Il existe alors, pour $K \supset J \supset J_0$, des unités $u_J^K \in U_J$ telles que $(w_K)_J = u_J^K w_J$, et il faut montrer qu'il existe $(w'_J) \in \varprojlim_{J \supset J_0} W_J^* = \mathcal{W}(J_0)$ tel que $w'_J \equiv w_J \bmod U_J$, la construction se fait par récurrence sur card$(J - J_0)$.

(1) On prend $w'_{J_0} = w_{J_0}$, et pour $J_i = J_0 \cup \{i\}$, $i \notin J_0$, $w'_{J_i} = \varphi_{J_0}^{J_i}(u_{J_0}^{J_i}) w_{J_i}$

(2) Supposons avoir effectué la construction pour tout $J-J_0$ de cardinal strictement plus petit que n et soit $L-J_0$ de cardinal n. Posons $L-J_0=\{1,2,\ldots n\}$. Pour tout $K\subset L$, on note $\langle K\rangle$ l'ensémble $(L-K)\cup J_0$. D'autre part, une image $\varphi_J^K(\cdot)$ sera simplement notée $(\cdot)^K$ lorsqu'aucune confusion n'en résultera. Enfin, notons simplement w l'élement w_L. Pour tout $1\le k\le n$, il existe donc des unités $u_{\langle k\rangle}\in W^*_{\langle k\rangle}$ telles que $w_{\langle k\rangle}=u_{\langle k\rangle}w'_{\langle k\rangle}$. Soit l un autre indice, alors $(w_{\langle k\rangle})_{\langle k,l\rangle}=(u_{\langle k\rangle})_{\langle k,l\rangle}(w^1_{\langle k\rangle})_{\langle k,l\rangle}$ et comme $(w_{\langle k\rangle})_{\langle k,l\rangle}=w_{\langle k,l\rangle}=(w_{\langle l\rangle})_{\langle k,l\rangle}$ (resp. $(w'_{\langle k\rangle})_{\langle k,l\rangle}=(w'_{\langle l\rangle})_{\langle k,l\rangle}=w'_{\langle k,l\rangle}$) et que $w'_{\langle k,l\rangle}\neq 0$; $(u_{\langle k\rangle})_{\langle k,l\rangle}=(u_{\langle l\rangle})_{\langle l,k\rangle}$ valeur commune que nous noterons $u_{\langle k,l\rangle}$. Il est clair que pour tout $r\geqslant 2$ et tout couple $\{i,j\}$ de $\{1,2,\ldots r\}$:

$$(u_{\langle i\rangle})_{\langle 1,2,\ldots r\rangle}=(u_{\langle j\rangle})_{\langle 1,2,\ldots r\rangle}$$

valeur commune que nous noterons $u_{\langle 1,2,\ldots r\rangle}$. Considérons alors les éléments

$$p_r=\prod_{i_1<i_2\cdots<i_r}(u_{\langle i_1,i_2\cdots i_r\rangle})^L$$

de W_L et fixons $1\le j\le n$. On peut écrire:

$$(p_1^{-1})_{\langle j\rangle}=\prod_{k=1}^{n}((u^{-1}_{\langle k\rangle})^L)_{\langle j\rangle}.$$

Or, d'après (i), $(u^{-1}_{\langle j\rangle})^L_{\langle j\rangle}=u^{-1}_{\langle j\rangle}$ et pour $k\neq j$, d'après (ii) appliqué à $J=\langle j\rangle$ et $J'=\langle k\rangle$, $(u^{-1}_{\langle k\rangle})^L_{\langle j\rangle}=(u^{-1}_{\langle k,j\rangle})^{\langle j\rangle}$ il en résulte:

$$(p_1^{-1})_j=u^{-1}_{\langle j\rangle}\times\prod_{k\neq j}(u^{-1}_{\langle k,j\rangle})^{\langle j\rangle}$$

Faisons l'hypothèse de récurrence:

$$(p_r^{(-1)^r}\cdots p_2p_1^{-1})_{\langle j\rangle}=\prod_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_r\\ i_k\neq j}}(u^{(-1)^r}_{\langle i_1\cdots i_r j\rangle})^{\langle j\rangle}\times u^{-1}_{\langle j\rangle}$$

alors:

$$\begin{aligned}(p_{r+1}^{(-1)^{r+1}}\cdots p_2p_1^{-1})_{\langle j\rangle}&=\prod_{i_1<i_2\cdots<i_{r+1}}((u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_{r+1}\rangle})^L)_{\langle j\rangle}\\&\quad\times\prod_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ i_k\neq j}}(u^{(-1)^r}_{\langle i_1\cdots i_r j\rangle})^{\langle j\rangle}\times u^{-1}_{\langle j\rangle}\\&=\prod_{\substack{i_1<\cdots<i_{r+1}\\ i_k\neq j}}((u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_r i_{r+1}\rangle})^L)_{\langle j\rangle}\times\prod_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ i_k\neq j}}(u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_r j\rangle})^L_{\langle j\rangle}\\&\quad\times\prod_{i_1<\cdots<i_r}(u^{(-1)^r}_{\langle i_1\cdots i_r j\rangle})^{\langle j\rangle}\times u^{-1}_{\langle j\rangle}\end{aligned}$$

or en appliquant (i) et (ii) à des parties J et J' convenables:

$$(u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_r j\rangle})^L_{\langle j\rangle}=(u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_r j\rangle})^{\langle j\rangle}$$

et

$$((u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_r i_{r+1}\rangle})^L)_{\langle j\rangle}=(u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_{r+1}j\rangle})^{\langle j\rangle}\qquad (i_k\neq j)$$

il en résulte bien:

$$(p^{(-1)^{r+1}}_{r+1}\cdots p_2p_1^{-1})_{\langle j\rangle}=\prod_{\substack{i_1<\cdots<i_{r+1}\\ i_k\neq j}}(u^{(-1)^{r+1}}_{\langle i_1\cdots i_{r+1}j\rangle})^{\langle j\rangle}\times u^{-1}_{\langle j\rangle}$$

On peut donc écrire:

$$(p^{(-1)^{n-1}}_{n-1}\cdots p_2p_1^{-1})_{\langle j\rangle}=(u^{(-1)^{n-1}}_{\langle 1\,2\cdots n\rangle})^{\langle j\rangle}\times u^{-1}_{\langle j\rangle}=(p_n^{(-1)^{n-1}})_{\langle j\rangle}\times u^{-1}_{\langle j\rangle}$$

Finalement en posant $\alpha=p_n^{(-1)^n}\cdots p_2p_1^{-1}$, il vient:

$$(\alpha w)_{\langle j\rangle}=u^{-1}_{\langle j\rangle}u_{\langle j\rangle}w'_{\langle j\rangle}=w'_{\langle j\rangle}$$

et l'élément αw a bien les propriétés requises.

Remarque. Dans le cas où I est dénombrable, ce lemme est une conséquence immédiate d'un théorème de Mittag–Leffler ([4], prop. 13.2.2) il suffit d'ailleurs seulement que les restrictions des f_J^K aux groupes U_K soient surjectives.

Lemme 2. *On suppose ici que les unités de $\mathcal{W}$ sont les éléments (α_J) de $\mathcal{W}$ pour lesquels il existe $J_0\in\mathcal{F}(I)$ tel que α_{J_0} soit une unité de $\mathcal{W}_{J_0}$. Alors, si pour tout $J\in\mathcal{F}(I)$, les idéaux principaux de W_J vérifient la condition de chaïne ascendante, il en est de même pour $\mathcal{W}$.*

Soit $[w_1]\subset[w_2]\cdots\subset[w_n]$ une suite croissante d'idéaux principaux non nuls de $\mathcal{W}$. Soit $J\in\mathcal{F}(I)$ tel que $(w_1)_J\neq 0$. Dans W_J, la suite des idéaux principaux $(w_n)_J$ stationne à partir d'un certain rang n_0; en écrivant $w_{n_0}=\alpha_n w_n$, il en résulte que $(\alpha_n)_J$ est une unité de W_J et donc que α_n est une unité de $\mathcal{W}$ d'après l'hypothèse.

Théorème 1. *Soit (W_J, f_J^K) un système projectif d'anneaux factoriels indexé par l'ensemble $\mathcal{F}(I)$ des parties finies d'un ensemble infini I et satisfaisant aux conditions des lemmes 1 et 2. Alors la limite projective $\mathcal{W}$ est un anneau factoriel.*

Montrons d'abord, en reprenant une idée de Cashwell et Everett, que si s est un élément irréductible de $\mathcal{W}^*$, il existe $J\in\mathcal{F}(I)$ tel que pour $K\supset J$, $(s)_K$ soit irréductible dans W_K.

Raisonnons par l'absurde: soit J_0 un élément de $\mathcal{F}(I)$ tel que $(s)_{J_0}$ soit non nul; si l'assertion était fausse, il existerait une partie Γ de $\mathcal{F}(I)$, cofinale à $\mathcal{F}(I)$, et telle que pour tout $K\in\Gamma$ on ait $K\supset J_0$ et $(s)_K$ ni nul ni irréductible. Désignons alors par D_K un ensemble effectif de diviseurs propres de $(s)_K$, c'est-à-dire tel que tout diviseur propre de $(s)_K$ soit associé à l'un des éléments de D_K. On n'a pas nécessairement $(D_K)_J\subset D_J$ pour $K\supset J$, mais on l'a "modulo les unités", c'est-à-dire que si on note $\dot{D}_K$ l'image de D_K dans W_K^*/U_K, $(\dot{D}_K)_J \subset \dot{D}_J$. Comme W_K est factoriel, D_K est un ensemble fini, et donc $\varprojlim_{K\in\Gamma} \dot{D}_K$ est non vide, soit (α_K) l'un de ses éléments, qui appartient donc à $\varprojlim_{K\in\Gamma} W_K^*/U_K = \varprojlim_{K\supset J_0} W_K^*/U_K$ puisque Γ est cofinale à $\mathcal{F}(I)$. D'après le lemme 1, il existe $\alpha \in \mathcal{W}(J_0)$ tel que $(\dot{\alpha})_K = \alpha_K$ $\forall K \in \Gamma$. De plus, pour chaque $K \in \Gamma$, on peut écrire $(\dot{s})_K = \alpha_K \beta_K$, et comme $((\dot{s})_K)_J = (\dot{s})_J$, $(\beta_K)_J = \beta_J$; et donc $(\beta_K) \in \lim_{K\supset J_0} W_K^*/U_K$ se relève, toujours d'après le lemme 1, en un élément β de $\mathcal{W}(J_0)$. Il en résulte qu'il existe $u \in U$ tel que $s = u\alpha\beta$, comme α et β ne sont pas dans U, s ne serait pas irréductible.

Soit maintenant w un élément ni nul ni inversible de $\mathcal{W}$. Il est clair que l'existence d'une décomposition de w en produit d'irréductibles résulte du lemme 2. Montrons l'unicité. Soit $w = s_1 \cdots s_n = r_1 \cdots r_p$ deux décompositions en produit d'irréductibles. D'après ce qui précède, il existe $J_0 \in \mathcal{F}(I)$ tel que pour $K \supset J_0$, tous les $(s_i)_K$ et tous les $(r_j)_K$ soient irréductibles. Comme les anneaux W_K sont factoriels par hypothèse, il existe pour chaque $K \supset J_0$ une partie finie non vide $\Phi(K)$ de $\{1, 2 \cdots n\}$ telle que, pour $i \in \Phi(K)$ on ait $(\dot{s}_i)_K = (\dot{r}_1)_K$. Il est clair que pour $K \supset K' \supset J_0$, $\Phi(K) \subset \Phi(K')$ et si J_1 est tel que card $\Phi(J_1)$ soit minimum, on a, pour $K \supset J_1$ et $i_1 \in \Phi(J_1)$, $(\dot{s}_{i_1})_K = (\dot{r}_1)_K$, ce qui signifie que s_{i_1} est associé à r_1. On termine par récurrence.

Corollaire. *Soit A un anneau factoriel, tel que $A_J = A[[X_i]]_{i\in J}$ soit factoriel $(\forall J \in \mathcal{F}(I))$. Alors A_1 est factoriel.*

On applique le théorème 1 aux anneaux $W_J = A_J$: d'abord on sait qu'une série, élément de A_1, est inversible à la condition nécessaire et suffisante que son coefficient constant le soit; la condition du lemme 2 est donc remplie. Ensuite les homomorphismes φ_J^K du lemme 2 sont les injections naturelles $A_J \to A_K$; les conditions (i) et (ii) résultant immédiatement de la définition des homomorphismes de spécialisation f_J^K.

(2) *Etude de A_2*

Proposition. (i) *Les unités de A_2 sont identiques à celles de A* (identifié à son image dans A_2 par l'homomorphisme diagonal $A \to \prod_{J\in\mathcal{F}(I)} A[X_i]_{i\in J}$

(ii) *Il existe dans A_2 des suites strictement croissantes d'idéaux principaux. En particulier, l'anneau A_2 n'est jamais factoriel ni même de Krull.*

(i) Soit $u = (u_J)$ une unité de A_2, alors u_J est une unité de l'anneau de polynômes $A[X_i]_{i\in J}$, donc $u_J \in A$ $(\forall J \in \mathcal{F}(I))$. Il en résulte; $u_J = u_K$ $(\forall J, \forall K \in \mathcal{F}(I))$ et u s'identifie à une unité de A.

(ii) L'assertion va résulter de l'existence de "produits infinis" dans l'anneau A_2. Considérons, dans A_2, une famille dénombrable d'indéterminées $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et définissons les éléments $P_n = (P_n)_J$ de $\prod_{J\in\mathcal{F}(I)} A[X_i]_{i\in J}$ par les relations:

$(*)$ $(P_n)_J = 1$ si $J \cap R_N = \varnothing$

$(**)$ $(P_n)_J = \prod_{p\in J\cap R_n} (1 + X_P)$ si $J \cap R_n \neq \varnothing$,

https://doi.org/10.4153/CMB-1984-045-x Published online by Cambridge University Press

où l'on a posé $R_n = \{p; p \in \mathbb{N} \text{ et } p \geq n\}$. Alors on vérifie aisément qu'en fait $P_n \in A_2$ et que $P_n = (1+X_n)P_{n+1}(\forall n)$. La suite des idéaux principaux (P_n) est alors strictement crossante, puisque d'après (i), le polynôme $1+X_n$ n'est pas inversible dans A_2.

REMARQUE. L'anneau A_2 a valeur de contre-example; sa présence infirme l'assertion qu'un système projectif d'anneaux factoriels, même vérifiant les conditions du lemme 1, a une limite factorielle ou de Krull. Pour ce qui est de A_3, j'ignore, même lorsque A est un corps, s'il est factoriel; cependant on verra dans le § suivant que c'est un anneau de Krull.

III. **Etude de A_1 et A_3 lorsque A est un anneau de Krull.** Commençons par établir un lemme qui rend compte de l'existence de certains liens entre A_1 et A_3. Nous noterons u^n la composante homogène de degré n d'une série u de A_1, série qui sera dite homogène de degré n si $u = u^n$. Pour que $u \in A_3$, il faut et il suffit que u^n soit un polynôme ($\forall n \geq 1$), ou encore qu'il existe $J_n \in \mathcal{F}(I)$ tel que $u^n \in A_{J_n}$ ($\forall n \geq 1$).

LEMME 3. (1) *Soient u^n et v^m deux séries homogènes de A_1. Alors si $u^n v^m \in A_3\lambda$, u^n et v^m sont dans A_3.*

(2) *Soit K le corps des fractions de A_3; alors $K \cap A_1 = A_3$*

(1) Soit $J \in \mathcal{F}(I)$ tel que $u^n v^m \in A_J$. Considérons l'isomorphisme de "changement de base" Φ_J de A_1 sur $A_J[[X_i]]_{i \in I-J} = (A_J)_1$ défini par:

$$\Phi_J\left(\sum_{\lambda \in \mathbb{N}^{(I)}} a_\lambda X^\lambda\right) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^{(I-J)}} \left(\sum_{\theta \in \mathbb{N}^J} a_{\mu+\theta} X^\theta\right) X^\mu.$$

Ecrivons, dans l'anneau $(A_J)_1$:

$$\Phi_J(u^n) = r^0 + \cdots + r^n; \ \Phi_J(v^m) = s^0 + \cdots + s^m \text{ où les } r^i \text{ et les } s^i \text{ sont}$$

des séries homogènes de degré i et j respectivement. Comme $u^n v^m \in A_{J_0}$, $\Phi_J(u^n v^m)$ est une constante h_0 de $(A_J)_1$ et on a l'églité: $h_0 = (r^0 + \cdots + r^n)(s^0 + \cdots + s^m)$, ce qui entraîne $r^i = s^j = 0 \ \forall i, j \geq 1$ et donc u^n et v^m sont dans A_J.

(2) Soient $w \in A_1^*$; $y, z \in A_3^*$ tels que $y = wz$. Si w^n, z^m, y^{n+m} sont les composantes homogènes de plus bas degré de w, z, y respectivement on a, pour tout entier $p \geq 0$, $y^{n+m+p} = w^n z^{m+p} + w^{n+1} z^{m+p-1} + \cdots w^{n+p} z^m$. En appliquant le 1), on voit alors facilement par récurrence que $w^{m+p} \in A_3$ ($\forall p \geq 0$). Nous aurons besoin aussi du lemme suivant, concernant les anneaux de séries formelles en un nombre fini d'indéterminées:

LEMME 4. *Soit A un anneau de Krull noethérien (c'est-à-dire un anneau noethérien intégralement clos). On désigne par Π_0 l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A; et pour $p \in \Pi_0$, par p_J l'idéal premier de $A_J = A[[X_i]]_{i \in J}$ ($J \in \mathcal{F}(I)$) des séries dont le coefficient constant est dans p. Alors:*

(1) *Let localisé $(A_J)_{p_J}$ est un anneau factoriel.*

(2) *Soit F une partie finie de Π_0, $M_J(F)$ l'ensemble des idéaux $\mathcal{G}$ de A_J tels que l'idéal $\mathcal{G}_0$ des coefficients constants des éléments de $\mathcal{G}$ soit non nul et que* Supp $(\operatorname{div}\mathcal{G}_0) \subset F$*: si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux éléments de $M_J(F)$ tels que* $\operatorname{div}(\mathcal{G}(A_J)_{P_J}) = \operatorname{div}(\mathcal{G}'(A_J)_{P_J})$ *pour tout $p \in F$, alors* $\operatorname{div} \mathcal{G} = \operatorname{div} \mathcal{G}'$.

(1) $(A_J)_{p_J}$ est un anneau local noethérien dont le séparé complété pour la topologie $p_J(A_J)_{p_J}$—adique est l'anneau factoriel $\hat{A}_p[[X_i]]_{i\in J}$ il est donc lui aussi factoriel ([2] §3 n° 6 prop. 4).

(2) Soit P un élément de $\operatorname{Supp}\operatorname{div}\mathcal{G}$, alors $P \supset \mathcal{G}$ et $P_0 \supset \mathcal{G}_0$. Si p est un élément de Π_0 contenant P_0, alors $p \in F$ et $p_J \supset P$. Il en résulte que d'une part la valuation essentielle v_p de A_J est l'une des valuations essentielles, soit w, de $(A_J)_{p_J}$; et que d'autre part d'après l'hypothèse, $\operatorname{div} \mathcal{G}(A_J)_{p_J} = \operatorname{div} \mathcal{G}'(A_J)_{p_J}$. On a alors:

$$\operatorname*{Inf}_{z\in\mathcal{G}} v_p(z) = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathcal{G}(A_J)_{P_J}} w(z) = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathcal{G}'(A_J)_{p_J}} w(z) = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathcal{G}} v_p(z),$$

et donc les composantes de $\operatorname{div}\mathcal{G}$ et $\operatorname{div}\mathcal{G}'$ sur $\operatorname{div} P$ sont égales. CQFD.

THÉORÈME 2. *Soit A un anneau noethérien intégralement clos. Alors A_1 et A_3 sont des anneaux de Krull.*

Supposons avoir démontré que A_1 était de Krull, alors le résultat est aussi acquis pour A_3, en vertu du lemme 3 2) et de ([2], §1 n° 3).

Pour A_1, il y a plusieurs étapes:

(a) A_1 est complètement intégralement clos; soit x un élément du corps des fractions H de A_1 tel qu'il existe $d \in A_1$ avec $dx^n \in A_1$ $(\forall n \geq 0)$. Ecrivons $x = a/b$, et soit $J \in \mathcal{F}(I)$ tel que pour $K \supset J$ on ait $b_K \neq 0$; on a $d_K(a_K/b_K)^n \in A_K (\forall n \geq 0)$ et donc $a_K/b_K = c_K \in A_k$. Il est clair que la famille (c_K) définit un élément de A_1 qui n'est autre que x.

(b) Soit maintenant $(\mathcal{G}^n)$ une suite croissante d'idéaux entiers divisoriels de A_1. Quitte à remplacer A par A_J pour J suffisamment grand, on peut supposer que l'idéal U des coefficients constants de $\mathcal{G}^1$ est non nul. Si on pose $F = \operatorname{Supp}\operatorname{div} U$, pour tout $J \in \mathcal{F}(I)$ et tout entier positif n, $\mathcal{G}^n_J \in M_J(F)$ (notations du lemme 4). D'autre part, pour chaque $p \in F$ et pour $K \supset J$, l'homomorphisme canonique $A_K \rightsquigarrow A_J$ induit un homomorphisme entre les localisés: $B_K = (A_K)_{p_K} \rightsquigarrow (A_J)_{p_J} = B_J$, que nous continuerons de noter $(\cdot)^K_J$ ou $(\cdot)_J$ si aucune confusion ne doit en résulter (pour $J = \emptyset$, c'est-à-dire $A_J = A$, on le notera $(\cdot)_0$). Ceci posé, comme A est noetherien, B_J est factoriel (lemme 4.1)), il existe un élément $z^n_J(p)$ de B_J tel que $\operatorname{div} \mathcal{G}^n_J B_J = \operatorname{div} z^n_J(p)$. Etudions ces éléments $z^n_J(p)$ (p fixé). Comme $\mathcal{G}^n_K B_K \subset B_K z^n_K(p)$, $\mathcal{G}^n_J B_J \subset B_J(z^n_K(p))_J$ $(K \supset J)$; et donc par définition de $z^n_J(p)$, $z^n_J(p) \in (z^n_K(p))_J B_J$. Il en résulte, en appliquant l'homomorphisme $(\cdot)^J_0$:

$$(z^n_J(p))_0 \in (z^n_K(p))_0 A_p \qquad (\forall n \geq 0) \quad J \subset K \in \mathcal{F}(I).$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1984-045-x Published online by Cambridge University Press

D'autre part, pour $n' \geq n$, l'inclusion $\mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}^{n'}$ implique, évidemment $z_J^n(p) \in B_J z_J^{n'}(p)$. Considérons alors, dans l'anneau de valuation discrète A_p, un élément maximal $(z_L^m(p))_0 A_p$ parmi les idéaux principaux $(z_J^n(p))_0 A_p$. Ce qui précède montre que pour $n \geq m$, $K \supset L$, $(z_K^n(p))_0 A_p = (z_L^m(p))_0 A_p$; et si on écrit dans B_K: $z_K^m(p) = u z_K^n(p)$ il en résulte que u_0 est une unité de A_p, les $(z_k^n(p))_0$ n'étant pas nuls puisque $\mathcal{G}_0^n \neq 0$. Mais alors u est aussi une unité de B_K: si on écrit $u = t/s$ avec $t \in A_K$, $s \notin p_K$, il vient $u_0 = t_0/s_0$ donc $t_0 \notin p$ et $t \notin p_K$, par définition de l'idéal p_K. Ainsi: $B_K z_K^m(p) = B_K z_K^n(p)$, $\forall n \geq m$, $K \supset L$. Comme F est un ensemble fini, quitte à augmenter m et agrandir L, on peut supposer que l'égalité précédente est vraie pour tout $p \in F$. En revenant à la définition des $z_J^n(p)$, on a donc:

$$\operatorname{div} \mathcal{G}_K^n(A_K)_{p_K} = \operatorname{div} \mathcal{G}_K^m(A_K)_{p_K}, \forall n \geq m, \forall K \supset L, \forall p \in F$$

Le lemme 4 (2) montre alors que $\operatorname{div} \mathcal{G}_K^n = \operatorname{div} \mathcal{G}_K^m \, \forall n \geq m$, $K \supset L$.

(c) La dernière étape consiste à montrer que si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{B}$ sont deux idéaux entiers divisoriels de A_1 pour lesquels il existe $L \in \mathcal{F}(I)$ tel que $\operatorname{div} \mathcal{G}_K = \operatorname{div} \mathcal{B}_K (\forall K \supset L)$, alors $\mathcal{G} = \mathcal{B}$. Il suffit évidemment de montrer, par exemple, que $\mathcal{B} \subset A_1 : A_1 : \mathcal{G}$. Soit donc $u \in \mathcal{B}$ et $t \in A_1 : \mathcal{G}$. Ecrivons $t = r/s$, $r \in A_1$, $s \in A_1^*$; et soit M un élément de $\mathcal{F}(I)$ contenant L pour lequel $s_M \neq 0$. Pour $K \supset M$, on a, en posant $t_K = r_K/s_K$, $t_K \mathcal{G}_K \subset A_K$, soit $t_K \in A_K : \mathcal{G}_K$. Or $\operatorname{div} \mathcal{G}_K = \operatorname{div} \mathcal{B}_K$ veut dire que $A_K : A_K : \mathcal{G}_K = A_K : A_K : \mathcal{B}_K$, comme u_k est évidemment dans le second membre, il est aussi dans le premier, donc $u_K t_K \in A_K$ et on a bien $u \, t \in A_1$.

L'anneau A_1 est bien de Krull, en vertu de ([2], §1, n° 3, Th. 2).

Remarque. L'hypothèse noethérienne est peut-être superflue, mais pour employer la même méthode qui consiste à "envoyer" les diviseurs dans un anneau factoriel, il faudrait pouvoir prouver que si P est un idéal premier de hauteur 1 de A_J, avec $P_0 \neq 0$, alors la valuation essentielle v_p est induite par une valuation essentielle de l'anneau factoriel $A_p[[X_i]]_{i \in J}$, pour un certain $p \in \operatorname{Supp} \operatorname{div} P_0$, ce qui ne semble pas évident si card $J > 1$.

Acknowledgements. Je tiens à remercier P. Samuel, pour ses remarques et suggestions qui m'ont été fort utiles.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Algèbre* (chap. I à III), nouvelle édition, Hermann (1970).

[2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann (1965).

[3] E. D. Cashwell et C. J. Everett, *The ring of number-theoretic functions*, Pacific J. Math. **9** (1959) 975–985.

[4] A. Grothendieck et J. Dieudonne, *Eléments de géométrie algébrique* (ch. 0 et ch. 3) I.H.E.S. (1961).

Faculté des Sciences de St. Jerome
13397 Marseille, Cedex 4, France