ZUR GEOMETRIE DER KÖRPERERWEITERUNGEN

WALTER BENZ

Sei $\mathfrak{L}$ ein (nicht notwendig kommutativer) Körper, sei $\mathfrak{K}$ ein (ebenfalls nicht notwendig kommutativer) echter Unterkörper von $\mathfrak{L}$. Mit $\mathfrak{L}'$ bezeichnen wir die projektive Gerade über $\mathfrak{L}$, d.h. die Menge $\mathfrak{L} \cup \{\infty\}$, wo ∞ ein neues (in die Betrachtung hereinkommendes) Element, genannt "unendlich", darstellt. Ist entsprechend $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} \cup \{\infty\}$, so ist also $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{L}'$ (das Zeichen $\subset$ bezeichne echtes Enthaltensein). Die Elemente von $\mathfrak{L}'$ nennen wir *Punkte*, die Punktmengen $(\mathfrak{K}')^\gamma$, $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$, wo $\Gamma(\mathfrak{L})$ die projektive Gruppe von $\mathfrak{L}'$ (s. § 1) darstellt, nennen wir *Ketten*. Eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte auf sich, die in beiden Richtungen Ketten in Ketten überführt, heiße eine *Kettenverwandtschaft*. Diese Forderung, daß nämlich Bilder und Urbilder von Ketten wieder Ketten sind, kann (s. § 4) (wenn $\mathfrak{K}$ im Zentrum von $\mathfrak{L}$ liegt) reduziert werden so, daß nur Ketten in Ketten übergehen sollen. Dann liegt nämlich bereits eine Kettenverwandtschaft vor. In § 8 werden auch Fälle angegeben mit $\mathfrak{K} \not\subseteq Z(\mathfrak{L})$, wo diese Reduktion möglich ist, $Z(\mathfrak{L})$ das Zentrum von $\mathfrak{L}$.

Die vorliegenden Untersuchungen sind dem Nachweis des folgenden Satzes gewidmet:

HAUPTSATZ. *Liegt in $\mathfrak{K}$ wenigstens ein von* 0 *und* 1 *verschiedenes Element des Zentrums von $\mathfrak{L}$, so ist die Gruppe* $\mathbf{M}$ *der Kettenverwandtschaften Produkt der Gruppen* $\mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K})$, $\Gamma(\mathfrak{L})$,

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L}),$$

wo $\mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K})$ *die Gruppe der Auto- und Antiautomorphismen von $\mathfrak{L}$ ist, die $\mathfrak{K}$ als Ganzes festlassen und durch $\infty \rightarrow \infty$ auf $\mathfrak{L}'$ erweitert seien.*

Die Forderung $|\mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})| > 2$, $Z(\mathfrak{L})$ das Zentrum von $\mathfrak{L}$, ist z.B. erfüllt für Char $\mathfrak{L} \neq 2$, da dann $1 \neq -1 \in \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$ ist. Aber auch im Falle Char $\mathfrak{L} = 2$ gibt es unendlich viele Fälle, wo sie erfüllt ist, z.B. wenn $\mathfrak{L}$ kommutativ und $|\mathfrak{K}| > 2$ ist. Wir merken an, daß für $|\mathfrak{K}| = 2$ und $(\mathfrak{L}:\mathfrak{K}) > 2$ die Gruppe $\mathbf{M}$ die Menge $\mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L})$ echt enthält. Für $|\mathfrak{K}| = 2$, $(\mathfrak{L}:\mathfrak{K}) = 2$ gilt jedoch $\mathbf{M} = \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L})$.

Der Beweis unseres Satzes wird in drei Abschnitten geführt:
(A) $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ und Char $\mathfrak{L} \neq 2$,
(B) $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ und Char $\mathfrak{L} = 2$,
(C) allgemeiner Fall.

Eingegangen am 19. März, 1968. Teile der vorliegenden Untersuchungen waren Gegenstand von Vorträgen, die der Verfasser in den mathematischen Kolloquien der Universitäten Hamilton, Ottawa, London (Ontario), Montreal, gehalten hat.

Die in (A), (B) benutzten Methoden sind verschieden;[1] der allgemeine Fall kann mit Hilfe eines Fährtenbegriffs (geeignete Kettendurchschnitte) auf die Fälle (A), (B) zurückgeführt werden. Der Fall (A) ist bereits in der Publikation (**3**) des Verfassers abgehandelt.

Wir geben Korollare zu unserem Hauptsatz an:

1° *Ist* $\mathfrak{K}$ *der Körper* **R** *der reellen Zahlen, ist* $\mathfrak{L}$ *der Körper* **C** *der komplexen Zahlen, so sind die zugehörigen Ketten die Kreise der vollständigen komplexen Zahlenebene* (s. etwa Schwerdtfeger (**12**, p. 11, Example 9). *Der Hauptsatz gibt demnach hier die bekannte Gruppe der Kreisverwandtschaften.*

2° *Spezialisiert auf den Fall, daß* $\mathfrak{L}$ *eine kommutative Erweiterung vom Rang* 2 *von* $\mathfrak{K}$ *ist, stellt unser Hauptsatz ein Resultat von Hoffman* (**8**, von Staudt'sches Theorem, p. 827) *dar.*

3° *Unter den Steinersystemen, die Witt in* (**13**) *betrachtet, sind auch die* (*in unserer Sprache ausgedrückten*) *Kettengeometrien* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$, *wo* $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ *Galoisfelder sind. Unser Hauptsatz gibt die Gruppen* (s. Witt, **13**, p. 268) *dieser Steinersysteme an: Seien* α, δ *natürliche Zahlen, sei* p *eine Primzahl, sei* $\mathfrak{K} = \mathrm{GF}(p^\alpha)$, $\mathfrak{L} = \mathrm{GF}(p^{\delta\alpha})$. *Die Gruppe dieses Steinersystems ist dann im Falle* $\mathfrak{K} \neq \mathrm{GF}(2)$ *vollständig gegeben durch die Menge der bereits in* (**13**, p. 269) *betrachteten Substitutionen*

$$w = \frac{az^\tau + b}{cz^\tau + d},$$

wo $a, b, c, d \in \mathfrak{L}$ *mit*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, und wo τ *ein Automorphismus von* $\mathrm{GF}(p^{\delta\alpha})$ *ist, der* $\mathrm{GF}(p^\alpha)$ *als Ganzes festläßt. Diese Automorphismen sind dabei bekanntlich alle leicht angebbar. Im Falle* $\mathfrak{K} = \mathrm{GF}(2)$ *besteht die Gruppe des Steinersystems* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$ *aus allen Permutationen von* $\mathfrak{L} \cup \{\infty\}$.

4° *Ist* k *eine Kette der Geometrie* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$, *so sei* (*in naheliegender Weise*) *unter einer Inversion an* k *jede Kettenverwandtschaft verstanden, die* k *punktweise festläßt. Die Menge der Inversionen an* k *bildet eine Untergruppe der Gruppe der Kettenverwandtschaften, die Inversionsgruppe* $I(k)$ *an* k. *Ist nun* $\mathfrak{L}$ *eine kommutative und normale Erweiterung* (im Sinne von Artin (**2**, p. 41)) *des kommutativen Körpers* $\mathfrak{K}$, $|\mathfrak{K}| > 2$, *so folgt aus unserem Hauptsatz für diesen Fall* (s. Benz (**5**, p. 169) für den Fall Char $\mathfrak{K} \neq 2$): *Die Inversionsgruppe* $I(k)$ *an* k *ist isomorph zur Galoisgruppe von* $\mathfrak{L}$ *über* $\mathfrak{K}$. *Damit hat man eine geometrische Veranschaulichung der Galoisgruppen.* (Man beachte, daß im Vorliegenden Fall Char $\mathfrak{K} = 2$ mit eingeschlossen ist, wenn nur $|\mathfrak{K}| > 2$ ist.)

[1]Wahrscheinlich läßt sich der Beweis (A) dem Beweis (B) subsumieren; ein Versuch in dieser Richtung unterblieb, weil wir den geometrisch durchsichtigen Beweis (A), der doch immerhin die Vielfalt Char $\mathfrak{L} \neq 2$ beherrscht, nicht opfern wollten.

5° *Die Frage nach allen eineindeutigen Abbildungen der reellen projektiven Geraden auf sich, die harmonische Quadrupel* (*d.h. Quadrupel vom Doppelverhältnis* -1) *in harmonische Quadrupel überführen, geht schon auf K. G. Chr. von Staudt* (s. Blaschke (**6**, p. 38)) *zurück. Ist* $\mathfrak{K}$, $|\mathfrak{K}| > 2$, *ein echter Unterkörper des Körpers* $\mathfrak{L}$, *der im Zentrum von* $\mathfrak{L}$ *liegt, so heiße das geordnete* (*aus verschiedenen Punkten bestehende*) *Quadrupel* A, B, C, D *ein* $\mathfrak{K}$-*Quadrupel, wenn* $DV(ABCD) \in \mathfrak{K}$ *ist. Wir fragen nun nach allen eineindeutigen Abbildungen der projektiven Geraden über* $\mathfrak{L}$ *auf sich, die* $\mathfrak{K}$-*Quadrupel in* $\mathfrak{K}$-*Quadrupel überführen. Der Hauptsatz zeigt, daß diese Abbildungsmenge durch* $\mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L})$ *gegeben ist.*

1. Die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{L})$. Wir definieren die Permutationen $\sigma(a, c)$, $\pi(a, c)$, ρ, $\phi(a, b, c)$, $\psi(a, b, c, p)$ von $\mathfrak{L}'$, wobei $a, b, c, p \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist:

$$\sigma(a, c): z \to \begin{cases} az + c & \text{für } z \neq \infty, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

$$\pi(a, c): z \to \begin{cases} za + c & \text{für } z \neq \infty, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

$$\rho: z \to \begin{cases} z^{-1} & \text{für } z \neq 0, \infty, \\ \infty & \text{für } z = 0, \\ 0 & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

$$\phi(a, b, c): z \to \begin{cases} azb + c & \text{für } z \neq \infty, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

$$\psi(a, b, c, p): z \to \begin{cases} a(z-p)^{-1}b + c & \text{für } z \neq p, \infty, \\ \infty & \text{für } z = p, \\ c & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Selbstverständlich können verschiedene Tripel (a, b, c) zur gleichen Permutation ϕ führen. Zu (a, b, c) führen noch genau die Tripel $(a\xi, \xi^{-1}b, c)$, ξ ein Zentrumselement $\neq 0$, zur gleichen Permutation. Entsprechendes für ψ.

Definieren wir nun $\Gamma(\mathfrak{L})$ als die von ρ und allen Permutationen $\sigma(a, c)$ mit $0 \neq a \in \mathfrak{L}$, $c \in \mathfrak{L}$ erzeugte Gruppe von Permutationen von $\mathfrak{L}'$, und $\Gamma_\pi(\mathfrak{L})$ als die von ρ und allen $\pi(a, c)$, $0 \neq a \in \mathfrak{L}$, $c \in \mathfrak{L}$ erzeugte Gruppe, und schließlich $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{L})$ als nur die Menge aller Permutationen der Gestalt $\phi(a, b, c)$, $\psi(a, b, c, p)$ mit $a, b, c, p \in \mathfrak{L}$ und $a \neq 0$, $b \neq 0$, so gilt das folgende Lemma.

LEMMA 1.1. $\Gamma(\mathfrak{L}) = \Gamma_\pi(\mathfrak{L}) = \tilde{\Gamma}(\mathfrak{L})$.

Beweis. Wir zeigen $\Gamma(\mathfrak{L}) \subseteq \Gamma_\pi(\mathfrak{L}) \subseteq \tilde{\Gamma}(\mathfrak{L}) \subseteq \Gamma(\mathfrak{L})$.

(a) $\Gamma(\mathfrak{L}) \subseteq \Gamma_\pi(\mathfrak{L})$. Dies ist nachgewiesen, wenn wir $\sigma(a, c) \in \Gamma_\pi(\mathfrak{L})$ haben für alle $a, c \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq 0$. Es ist aber

$$\sigma(a, c) = \pi(a^{-1}, 0)\rho\pi(a^{-1}, 0)\rho\pi(a, c).$$

Wir führen das Abbildungsprodukt $\alpha \cdot \beta$ in der Form $z \to z^{(\alpha\beta)} = (z^\alpha)^\beta$ aus.

(b) $\Gamma_\pi(\mathfrak{K}) \subseteq \tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$. Dies ist nachgewiesen, wenn wir $\rho \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$ und $\pi(a, c) \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$ für alle $a, c \in \mathfrak{K}$ mit $a \neq 0$ haben und außerdem, daß $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$ eine Gruppe ist. Wir beachten zunächst $\rho = \psi(1, 1, 0, 0)$ und $\pi(a, c) = \phi(1, a, c)$. Daß $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$ eine Gruppe ist, hält etwas länger auf. $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$ enthält die identische Permutation in der Gestalt $\phi(1, 1, 0)$. Die Frage der Assoziativität bereitet keine Schwierigkeiten, da Abbildungen zugrundeliegen. Die inverse Permutation zu $\phi(a, b, c)$ ist $\phi(a^{-1}, b^{-1}, -a^{-1}cb^{-1})$, die zu $\psi(a, b, c, p)$ ist $\psi(b, a, p, c)$. Weiterhin gilt

$$\phi(a, b, c) \cdot \phi(a', b', c') = \phi(a'a, bb', a'cb' + c'),$$

$$\phi(a', b', c') \cdot \psi(a, b, c, p) = \psi(ab'^{-1}, a'^{-1}b, c, a'^{-1}(p - c')b'^{-1}).$$

Also haben wir mit dem Gezeigten auch

$$\psi \cdot \phi = (\phi^{-1}\psi^{-1})^{-1} = (\phi'\psi')^{-1} = (\psi'')^{-1} = \psi''',$$

wo ϕ' eine geeignete Abbildung des Typs ϕ ist, und ψ', ψ'', ψ''' geeignete Abbildungen des Typs ψ sind.

Weiterhin schreiben wir

$$\psi(a,b,c,p)\psi(a,'b',c',p') = \phi(1,1,-p) \cdot \psi(1,1,0,0) \cdot \phi(a,b,c) \cdot \psi(a',b',c',p').$$

Wenn wir beachten daß $\phi \cdot \psi$ zum Typ ψ gehört, so haben wir mit geeigneten Elementen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{p} \in \mathfrak{K}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} \neq 0$,

$$\begin{aligned} \psi(a, b, c, p)\psi(a', b', c', p') &= \phi(1, 1, -p)\psi(1, 1, 0, 0) \cdot \psi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{p}) \\ &= \phi(1, 1, -p) \cdot \psi(1, 1, 0, 0) \cdot \psi(1, 1, 0, \bar{p})\phi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}). \end{aligned}$$

Im Falle $\bar{p} = 0$ ist die rechte Seite vom Typ ϕ, da

$$\psi(1, 1, 0, 0) \cdot \psi(1, 1, 0, 0) = \phi(1, 1, 0)$$

gilt; im Falle $\bar{p} \neq 0$ ist

$$\psi(1, 1, 0, 0) \cdot \psi(1, 1, 0, \bar{p}) = \psi(\bar{p}^{-1}, -\bar{p}^{-1}, -\bar{p}^{-1}, \bar{p}^{-1}),$$

was für die vorgenannte rechte Seite

$$\phi(1, 1, -p)\psi\phi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \phi \cdot \psi' = \psi'' \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$$

ergibt. Damit ist in der Tat $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$ eine Gruppe.

(c) $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{K}) \subseteq \Gamma(\mathfrak{K})$. Es ist $\phi(a, b, c) = \rho \cdot \sigma(b^{-1}, 0) \cdot \rho \cdot \sigma(a, c)$; zum anderen gilt $\psi(a, b, c, p) = \phi(1, 1, -p) \cdot \psi(1, 1, 0, 0) \cdot \phi(a, b, c) \in \Gamma(\mathfrak{K})$, da $\psi(1, 1, 0, 0) = \rho$ und (wie gerade gezeigt) die Abbildungen vom Typ ϕ zu $\Gamma(\mathfrak{K})$ gehören.

Wir werden die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{K})$ meist in der Form $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{K})$ zugrundelegen, was nach Lemma 1.1 möglich ist. Der Beweis des Lemmas (Schritt (b)) ergibt noch, daß die Menge $\Phi(\mathfrak{K})$ der Abbildungen vom Typ ϕ eine Untergruppe von $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{K}) = \Gamma(\mathfrak{K})$ ist. Keine Abbildung vom Typ ψ hat ∞ zum Fixpunkt. Damit ist $\Phi(\mathfrak{K})$ der Stabilisator in $\Gamma(\mathfrak{K})$ des Punktes ∞, d.h. die Menge der Elemente von $\Gamma(\mathfrak{K})$, die ∞ festlassen.

Lemma 1.2. *$\Gamma(\mathfrak{L})$ ist dreifach transitiv auf $\mathfrak{L}'$, d.h. sind A, B, C verschiedene Punkte und ebenso A', B', C', so gibt es ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$ mit $A^\gamma = A'$, $B^\gamma = B'$, $C^\gamma = C'$. Der Stabilisator in $\Gamma(\mathfrak{L})$ von ∞, 0, 1 ist die Gruppe der inneren Automorphismen $\phi(a, a^{-1}, 0)$ mit $0 \neq a \in \mathfrak{L}$ von $\mathfrak{L}$; damit ist $\mathfrak{L}$ genau dann kommutativ, wenn $\Gamma(\mathfrak{L})$ minimal dreifach transitiv auf $\mathfrak{L}'$ ist.*

Beweis. Wir zeigen, daß es ein $\gamma_0 \in \Gamma(\mathfrak{L})$ gibt mit $\infty \to P$, $0 \to Q$, $1 \to R$, wo P, Q, R drei beliebige verschiedene Punkte sind: Im Falle $P = \infty$ tut dies $\sigma(R - Q, Q)$, wobei wir $R, Q \in \mathfrak{L}$ und $R \neq Q$ beachten, da $P = \infty$, Q, R verschiedene Punkte von $\mathfrak{L}'$ sind. Im Falle $P \neq \infty$ sei zunächst

$$\psi \equiv \psi(1, 1, 0, P);$$

wegen $P^\psi = \infty$ sind Q^ψ, R^ψ verschiedene Elemente von $\mathfrak{L}$ und

$$\sigma(R^\psi - Q^\psi, Q^\psi) \cdot \psi^{-1}$$

ist ein gesuchtes γ_0.

$\phi(\mathfrak{L})$ ist der Stabilisator von ∞. Die Abbildungen in $\phi(\mathfrak{L})$, die auch noch 0 und 1 festlassen, sind gegeben durch $\phi(a, a^{-1}, 0)$, $a \in \mathfrak{L}^* \equiv \mathfrak{L} - \{0\}$. Ist $\mathfrak{L}$ kommutativ, so ist $\phi(a, a^{-1}, 0)$ die identische Permutation für alle $a \in \mathfrak{L}^*$ und umgekehrt.

Der Stabilisator $\Gamma_{\infty,0,1}$ von ∞, 0, 1 ist offenbar isomorph zu $\mathfrak{L}^*/[Z(\mathfrak{L})]^*$; hier ist F^* die multiplikative Gruppe des Körpers F.

Lemma 1.3. *Sind A, B, C, D verschiedene Punkte, so gibt es ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$ mit $A^\gamma = B$, $B^\gamma = A$, $C^\gamma = D$, $D^\gamma = C$.*

Beweis. Nach Lemma 1.2 gibt es ein $\delta \in \Gamma(\mathfrak{L})$ mit $A^\delta = \infty$, $B^\delta = 0$, $C^\delta = 1$. Damit ist $D^\delta \in \mathfrak{L}^*$. Ist $\psi \equiv \psi(D^\delta, 1, 0, 0)$, so hat $\gamma = \delta\psi\delta^{-1}$ die verlangte Eigenschaft.

2. Ketten. Ist k eine Kette und ist $P \in k$, so benutzen wir Redewendungen wie "P liegt auf k", "k geht durch P" usf. Durch ∞, 0, 1 geht z.B. die Kette $\mathfrak{K}'$. Damit hat man mit Lemma 1.2

Lemma 2.1. *Durch drei verschiedene Punkte geht wenigstens eine Kette. Jede Kette enthält wenigstens drei verschiedene Punkte.*

Wir haben ferner

Lemma 2.2. *Durch drei verschiedene Punkte geht genau eine Kette genau dann, wenn $\mathfrak{K}$ im Zentrum von $\mathfrak{L}$ liegt.*

Beweis. Gibt es drei verschiedene Punkte, durch die genau eine Kette geht, so geht durch je 3 verschiedene Punkte genau eine Kette, da $\Gamma(\mathfrak{L})$ (die Gruppe enthält offenbar nur Kettenverwandtschaften) dreifach transitiv auf $\mathfrak{L}'$ ist.

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-122-1 Published online by Cambridge University Press

Nehmen wir nun an, daß durch ∞, 0, 1 genau eine Kette hindurchgeht, so muß insbesondere

$$(\mathfrak{K}')^\gamma = \mathfrak{K}' \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma_{\infty,0,1}$$

gelten. Also muß

$$a\mathfrak{K}a^{-1} = \mathfrak{K} \quad \text{für alle } a \in \mathfrak{L}^*$$

gelten. Dies bedeutet nach dem Satz von Cartan-Brauer-Hua (s. Brauer (**7**, p. 619)), daß $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ gilt, da $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$ ist.

Liegt umgekehrt $\mathfrak{K}$ im Zentrum von $\mathfrak{L}$, so ist also

$$a\mathfrak{K}a^{-1} = \mathfrak{K} \quad \text{für alle } a \in \mathfrak{L}^*,$$

d.h. $(\mathfrak{K}')^\gamma = \mathfrak{K}'$ für alle $\gamma \in \Gamma_{\infty,0,1}$. Sei nun $(\mathfrak{K}')^\delta$, $\delta \in \Gamma(\mathfrak{L})$, eine beliebige Kette durch ∞, 0, 1. Wegen $\infty, 0, 1 \in (\mathfrak{K}')^\delta$ gibt es Punkte $P, Q, R \in \mathfrak{K}'$ mit $P^\delta = \infty$, $Q^\delta = 0$, $R^\delta = 1$. Es gibt ein $\epsilon \in \Gamma(\mathfrak{K}) \subset \Gamma(\mathfrak{L})$ mit $\infty^\epsilon = P$, $0^\epsilon = Q$, $1^\epsilon = R$. Also ist $\epsilon\delta \in \Gamma_{\infty,0,1}$. Damit haben wir

$$(\mathfrak{K}')^\delta = [(\mathfrak{K}')^\epsilon]^\delta = (\mathfrak{K}')^{(\epsilon\delta)} = \mathfrak{K}'.$$

Zur Bequemlichkeit des Lesers fügen wir hier einen Beweis (Brauer (**7**, p. 619)) des Satzes von Cartan-Brauer-Hua (d.i. Lemma 2.3) bei:

LEMMA 2.3. *Aus $a\mathfrak{H}a^{-1} \subseteq \mathfrak{H}$ für alle $a \in \mathfrak{L}^*$ folgt $\mathfrak{H} \subseteq Z(\mathfrak{L})$, wenn $\mathfrak{H}$ ein echter Unterkörper von $\mathfrak{L}$ ist.*

Beweis. Für $a \in \mathfrak{L} - \mathfrak{H}$ gilt für $h \in \mathfrak{H}$

$$aha^{-1} \equiv h_1 \in \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad (1 + a)h(1 + a)^{-1} \equiv h_2 \in \mathfrak{H},$$

d.h. $ah = h_1a$ und $(1 + a)h = h_2(1 + a)$, was auf $h = h_2 + (h_2 - h_1)a$ führt. Wäre $h_2 - h_1 \neq 0$, so müßte $a \in \mathfrak{H}$ sein, was nicht der Fall ist. Also hat man $h_2 = h_1$ und damit $h = h_2$. Also ist $ah = ha$ für alle $h \in \mathfrak{H}$ und $a \in \mathfrak{L} - \mathfrak{H}$. Ist nun $h' \in \mathfrak{H}$ und $a \in \mathfrak{L} - \mathfrak{H}$, so gilt $a + h' \in \mathfrak{L} - \mathfrak{H}$ und damit

$$(a + h')h = h(a + h') \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{H}.$$

Da noch $ah = ha$ ist, hat man hieraus $h'h = hh'$. Also gilt $ah = ha$ für alle $h \in \mathfrak{H}$ und $a \in \mathfrak{L}$, was $\mathfrak{H} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ bedeutet.

Für die folgenden Betrachtungen definieren wir die Menge:

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{a \in \mathfrak{L}^*} a\mathfrak{K}a^{-1}.$$

LEMMA 2.4. *Es ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$.*

Beweis. $\mathfrak{F}$ ist ein Körper: Dies liegt auf der Hand, da alle $a\mathfrak{K}a^{-1}$, $a \in \mathfrak{L}^*$, Unterkörper von $\mathfrak{L}$ sind. Setzt man $a = 1$, so sieht man $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$. Aus $u \in \mathfrak{L}^*$ folgt $u\mathfrak{F}u^{-1} \subseteq \mathfrak{F}$, da $\mathfrak{F} \subseteq a\mathfrak{K}a^{-1}$ für alle $a \in \mathfrak{L}^*$ doch

$$u\mathfrak{F}u^{-1} \subseteq u \cdot a\mathfrak{K}a^{-1} \cdot u^{-1} = (ua)\mathfrak{K}(ua)^{-1}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-122-1 Published online by Cambridge University Press

ergibt, d.h. $u\mathfrak{F}u^{-1} \subseteq b\mathfrak{K}b^{-1}$ für alle $b \in \mathfrak{L}^*$. Mit Hilfe des Satzes von Cartan-Brauer-Hua (Lemma 2.3; hier anstelle von $\mathfrak{H}$ den Unterkörper $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$ zugrundegelegt) hat man $\mathfrak{F} \subseteq Z(\mathfrak{L})$.

Es verbleibt $\mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{F}$ zu zeigen: Ist $k \in \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$, so gilt $k = aka^{-1}$ für alle $a \in \mathfrak{L}^*$, d.h. $k \in a\mathfrak{K}a^{-1}$ für alle $a \in \mathfrak{L}^*$.

Sind A, B, C verschiedene Punkte, so verstehen wir unter der Fährte (ABC) den Durchschnitt aller Ketten, die A, B, C enthalten. Im Falle $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ fällt nach Lemma 2.2 offenbar der Fährtenbegriff mit dem Kettenbegriff zusammen. Es gilt

SATZ 2.1. 1° *Eine Kettenverwandtschaft überführt Fährten in Fährten.*

2° *Jede Punktmenge* $(\mathfrak{F}')^\gamma$, $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$, *ist eine Fährte und umgekehrt ist jede Fährte von dieser Form.*

3° *Durch drei verschiedene Punkte geht genau eine Fährte.*

4° *Eine Kette enthält mit den verschiedenen Punkten* A, B, C *die ganze Fährte* (ABC).

Beweis. Die Eigenschaft 4° folgt unmittelbar aus der Definition des Fährtenbegriffs. Zu 1°! Sei κ eine Kettenverwandtschaft, sei $\xi = (ABC)$ eine Fährte. Gemäß Definition ist

$$(ABC) = \bigcap_{A,B,C\in k} k \quad \text{und} \quad (A^\kappa B^\kappa C^\kappa) = \bigcap_{A^\kappa,B^\kappa,C^\kappa \in h} h.$$

Außerdem gilt

$$(ABC)^\kappa = \Big(\bigcap_{A,B,C\in k} k\Big)^\kappa = \bigcap_{A,B,C\in k} k^\kappa.$$

Offenbar ist deshalb

$$(ABC)^\kappa \supseteq (A^\kappa B^\kappa C^\kappa).$$

Da für eine Kette h auch $h^{\kappa^{-1}}$ eine Kette ist, und da $A^\kappa, B^\kappa, C^\kappa \in h$ offenbar $A, B, C \in h^{\kappa^{-1}}$ impliziert, so ist auch

$$(ABC)^\kappa \subseteq (A^\kappa B^\kappa C^\kappa),$$

was 1° beweist.

Um 2° zu zeigen, bestimmen wir zunächst alle Ketten, die ∞, 0, 1 enthalten: Ist $(\mathfrak{K}')^\delta$, $\delta \in \Gamma(\mathfrak{L})$, eine Kette, die ∞, 0, 1 enthält, so gibt es also Punkte $P, Q, R \in \mathfrak{K}'$ mit $P^\delta = \infty$, $Q^\delta = 0$, $R^\delta = 1$. Sei $\epsilon \in \Gamma(\mathfrak{K})$ mit $\infty^\epsilon = P$, $0^\epsilon = Q$, $1^\epsilon = R$. Sei $\mu = \epsilon\delta$. Dann ist

$$(\mathfrak{K}')^\delta = [(\mathfrak{K}')^\epsilon]^\delta = (\mathfrak{K}')^\mu \quad \text{mit } \infty^\mu = \infty,\ 0^\mu = 0,\ 1^\mu = 1.$$

Da $\Gamma_{\infty,0,1}(\mathfrak{L})$ aber aus allen Abbildungen $\phi(a, a^{-1}, 0)$, $a \in \mathfrak{L}^*$, besteht, so ist die Menge aller Ketten durch ∞, 0, 1 durch

$$\{\infty\} \cup (a\mathfrak{K}a^{-1}), \qquad a \in \mathfrak{L}^*,$$

gegeben. Dies bedeutet

$$\bigcap_{\infty,0,1\in k} k = \{\infty\} \cup \bigcap_{a\in\mathfrak{L}^*} a\mathfrak{K}a^{-1} = \mathfrak{F}'.$$

Nach 1° sind demnach alle Punktmengen $(\mathfrak{F}')^\gamma$, $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$, Fährten. Ist auf der anderen Seite (ABC) eine beliebige Fährte, so sei $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$ eine Abbildung mit $\infty^\gamma = A$, $0^\gamma = B$, $1^\gamma = C$. Mit 1° gilt

$$(ABC) = (\infty^\gamma 0^\gamma 1^\gamma) = (\infty 0 1)^\gamma = (\mathfrak{F}')^\gamma.$$

Zu 3°! Hätten wir die Ketten bezüglich des Unterkörpers $\mathfrak{F}$ anstelle des Körpers $\mathfrak{K}$ eingeführt, so ergibt die Darstellung 2° mit Lemma 2.2 (da $\mathfrak{F} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ gilt) die Aussage 3°.

Lemma 2.5. *Die Ketten sind genau gegeben durch die Punktmengen*

$$\{\infty\} \cup \{a\xi b + c \mid \xi \in \mathfrak{K}\};$$
$$\{c\} \cup \left\{a\frac{1}{\xi - p}b + c \,\middle|\, \xi \in \mathfrak{K}\right\}, \qquad p \notin \mathfrak{K}.$$

Dabei sind a, b, c, p in $\mathfrak{L}$ mit $ab \neq 0$.

Beweis. Daß die aufgeschriebenen Punktmengen Ketten sind, liegt auf der Hand, da nach Definition die Punktmengen $(\mathfrak{K}')^\gamma$, $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$, die Ketten sind. Sei auf der anderen Seite $(\mathfrak{K}')^\gamma$, $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$, eine Kette. Ist $\infty \in (\mathfrak{K}')^\gamma$, so können wir $\infty^\gamma = \infty$ annehmen; ist nämlich $P^\gamma = \infty$, $P \in \mathfrak{K}'$, so sei ein $\delta \in \Gamma(\mathfrak{K})$ hergenommen mit $\infty^\delta = P$, was $\infty^{\delta\gamma} = \infty$ ergibt mit $(\mathfrak{K}')^{(\delta\gamma)} = [(\mathfrak{K}')^\delta]^\gamma = (\mathfrak{K}')^\gamma$. Also ist o.B.d.A. γ von der Form $\phi(a, b, c)$ und $(\mathfrak{K}')^\gamma$ damit eine Punktmenge von der zuerst angegebenen Art. Im Falle $\infty \notin (\mathfrak{K}')^\gamma$ ist γ von der Form $\psi(a, b, c, p)$ mit $p \notin \mathfrak{K}$, da sonst $p^\gamma = \infty$ auf $(\mathfrak{K}')^\gamma$ läge.

Aus Lemma 2.5 ergibt sich sofort

Lemma 2.6. *Alle $\kappa \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K})$ sind Kettenverwandtschaften. Damit sind auch alle $\kappa \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L})$ Kettenverwandtschaften.*

3. Doppelverhältnisse. Wir führen den Doppelverhältnisbegriff nicht (wie üblicherweise) von vornherein als Konjugiertenklasse ein, sondern in einer auf $\Gamma(\mathfrak{L})$ zurückgehenden Weise, die es gestattet, die grundlegenden Doppelverhältniseigenschaften rasch herzuleiten (s. hierzu auch (**4**)).

Sind A, B, C verschiedene Punkte, so bezeichne $\Gamma\binom{A\ B\ C}{\infty\ 0\ 1}$ die Gesamtheit aller $\gamma \in \Gamma$, die A in ∞, B in 0, C in 1 überführen. Es seien nun A, B, C, D verschiedene Punkte. Dann sei das Doppelverhältnis $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ D & C\end{smallmatrix}\right]$, es kommt dabei auf die Stellung der einzelnen Punkte an, erklärt durch

$$\left\{D^\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Alle diese D^γ mit

$$\gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1\end{pmatrix}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-122-1 Published online by Cambridge University Press

gehören offenbar (γ ist bijektiv) zu $\mathfrak{K}^* - \{1\}$. Somit ist für die verschiedenen Punkte A, B, C, D gewiß

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \subseteq \mathfrak{K}^* - \{1\}.$$

LEMMA 3.1. *Sind A, B, C, D verschiedene Punkte und ist $\delta \in \Gamma$, so gilt*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix}.$$

Beweis. Es ist

$$\left\{ (D^\delta)^\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} A^\delta & B^\delta & C^\delta \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ D^{(\delta\gamma)} \,\middle|\, \gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} A^\delta & B^\delta & C^\delta \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ D^{\gamma'} \,\middle|\, \gamma' \in \Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

LEMMA 3.2. *Sind A, B, C, D verschiedene Punkte, so gilt*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}.$$

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 3.1 in Verbindung mit Lemma 1.3.

Ist $\alpha \in \mathfrak{K}^*$, so verstehen wir unter $\langle\alpha\rangle$ die Menge $\{a\alpha a^{-1} | \, a \in \mathfrak{K}^*\}$, d.h. eine sogenannte Konjugiertenklasse.

LEMMA 3.3. *Sind A, B, C, D verschiedene Punkte, so gibt es ein $\alpha \in \mathfrak{K}^* - \{1\}$ mit*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \langle\alpha\rangle.$$

Im Falle resp. $A = \infty$, $B = \infty$, $C = \infty$, $D = \infty$ kann für α genommen werden resp. $(B - C)^{-1}(B - D)$, $(A - C)(A - D)^{-1}$, $(B - D)(A - D)^{-1}$, $(A - C)(B - C)^{-1}$. Im Falle $\infty \notin \{A, B, C, D\}$ kann

$$\alpha = (A - C)(B - C)^{-1}(B - D)(A - D)^{-1}$$

gesetzt werden.

Beweis. Sei ϵ eine (nach Lemma 1.2 existierende) Abbildung aus $\Gamma(\mathfrak{K})$, die A in ∞, B in 0, C in 1 überführt. Also ist $\alpha \equiv D^\epsilon \in \mathfrak{K}^* - \{1\}$. Dann gilt offenbar

$$\Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} = \epsilon \cdot \Gamma\begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben damit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \left\{ D^\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (D^\epsilon)^{\epsilon^{-1}\gamma} \,\middle|\, \epsilon^{-1}\gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
$$= \left\{ \alpha^\delta \,\middle|\, \delta \in \Gamma\begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \langle\alpha\rangle,$$

letzteres aus der zweiten Behauptung von Lemma 1.2. Um den weiteren Teil von Lemma 3.3 zu beweisen, brauchen wir also z.B. nur ein $\epsilon \in \Gamma(\mathfrak{L})$ zu finden mit $A^\epsilon = \infty$, $B^\epsilon = 0$, $C^\epsilon = 1$, und $\alpha = D^\epsilon$ zu setzen. Im Falle $A = \infty$ bzw. $B = \infty$ sei ϵ gegeben durch $z \to (C-B)^{-1}(z-B)$ bzw.

$$z \to (C-A)(z-A)^{-1}.$$

Hier ist also $\alpha = (C-B)^{-1}(D-B)$ bzw. $\alpha = (C-A)(D-A)^{-1}$. Den zweiten Fall mit Lemma 3.2 verbindend haben wir für $C = \infty$ bzw. $D = \infty$ sofort

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & \infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \infty \\ A & B \end{bmatrix} = \langle (B-D)(A-D)^{-1} \rangle, \text{ bzw.,}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \infty & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \infty \\ B & A \end{bmatrix} = \langle (A-C)(B-C)^{-1} \rangle.$$

Im Falle $\infty \notin \{A, B, C, D\}$ gilt mit $\delta = \psi(1, 1, 0, A)$ jedenfalls

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\delta & B^\delta \\ D^\delta & C^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & (B-A)^{-1} \\ (D-A) & (C-A)^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \langle [(B-A)^{-1} - (C-A)^{-1}]^{-1}[(B-A)^{-1} - (D-A)^{-1}] \rangle.$$

Der Beweis ist erbracht, wenn wir beachten

$$[(B-A)^{-1} - (C-A)^{-1}]^{-1} = [(B-A)^{-1}((C-A) - (B-A))(C-A)^{-1}]^{-1}$$
$$= (C-A)(C-B)^{-1}(B-A)$$

und ebenso

$$(B-A)^{-1} - (D-A)^{-1} = (B-A)^{-1}(D-B)(D-A)^{-1}.$$

LEMMA 3.4. *Sind A, B, C, D verschiedene Punkte mit*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \langle \alpha \rangle,$$

so ist

$$\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} = \langle \alpha^{-1} \rangle \quad \textit{und} \quad \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = \langle 1 - \alpha \rangle.$$

Beweis. Es gilt mit $\rho = \psi(1, 1, 0, 0)$ (beachte $\rho^2 = 1$)

$$\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} = \left\{ D^\delta \,\middle|\, \delta \in \Gamma\begin{pmatrix} B & A & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ (D^{\delta\rho})^\rho \,\middle|\, \delta\rho \in \Gamma\begin{pmatrix} B & A & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \rho = \Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ (D^\gamma)^\rho \,\middle|\, \gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aus $D^\gamma \in \langle\alpha\rangle$ folgt aber $(D^\gamma)^\rho = 1/D^\gamma \in \langle\alpha^{-1}\rangle$. Mit $\phi \equiv \phi(-1, 1, 1)$ ist genauso (auch hier $\phi^2 = 1$)

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = \left\{ D^\delta \,\middle|\, \delta \in \Gamma\begin{pmatrix} A & C & B \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (D^\gamma)^\rho \,\middle|\, \gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} A & B & C \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \langle 1 - \alpha \rangle;$$

denn $D^\gamma \in \langle\alpha\rangle$ impliziert $(D^\gamma)\phi = 1 - D^\gamma \in \langle 1 - \alpha\rangle$.

Definieren wir $\langle\infty\rangle = \{\infty\}$ und lassen wir auch $\langle 0\rangle = \{0\}$, $\langle 1\rangle = \{1\}$ zu, so wollen wir jetzt auch $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ D & C \end{smallmatrix}\right]$ für den Fall definieren, daß A, B, C, D genau drei verschiedene Punkte sind:

Sei $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ D & C \end{smallmatrix}\right]$ resp. $\langle\infty\rangle$, $\langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, wenn im Schema $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ D & C \end{smallmatrix}\right)$ resp. eine Kolonne, Diagonale, Zeile gleiche Punkte enthält. Vereinbaren wir schließlich noch, daß wir die Klasse $\langle\alpha\rangle$ einfach in der Form α aufschreiben wollen, wenn $\langle\alpha\rangle = \{\alpha\}$ ist (Fall $\alpha = \infty$ oder $\alpha \in Z(\mathfrak{L})$), so haben wir

LEMMA 3.5. *Gilt $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$, sind A, B, C verschiedene Punkte, so ist die nach Lemma 2.2 eindeutig bestimmte Kette (der Kettenbegriff fällt hier mit dem Fährtenbegriff zusammen) durch A, B, C gegeben durch*

$$(ABC) = \left\{ X \,\middle|\, \begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}' \right\}.$$

Beweis. Sei $(\mathfrak{K}')^\gamma$, $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$, die Kette durch A, B, C. Wir können $\infty^\gamma = A$, $0^\gamma = B$, $1^\gamma = C$ annehmen. Ist nun $P \in \mathfrak{K}' - \{\infty, 0, 1\}$, so gilt nach Lemma 3.1,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ P^\gamma & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ P & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{K},$$

d.h. $P^\gamma \in (ABC)$. Ist umgekehrt X ein Punkt $\neq A, B, C$ mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{K},$$

so gilt

$$\langle X^{\gamma^{-1}} \rangle = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ X^{\gamma^{-1}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ X & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{K},$$

d.h. $X^{\gamma^{-1}} \in \mathfrak{K}$; damit ist $X \in (\mathfrak{K}')^\gamma$.

Mit unseren bisherigen Betrachtungen ist auch ein Anschluß an verfasser (**3**, § 2, pp. 351–355) hergestellt. Von dorther können wir die Gültigkeit unseres in der Einleitung zitierten Hauptsatzes übernehmen im Falle

(A) $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ und Char $\mathfrak{L} \neq 2$.

Da wir jedoch einen Großteil der in (**3**, § 3, pp. 351–358) angegebenen Zwischenresultate hier auch für den Fall Char $\mathfrak{L} = 2$ benötigen, wird der Fall (A) in den vorliegenden Betrachtungen vollständig mit enthalten sein.

4. Eine Berührrelation. In diesem Paragraphen setzen wir $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ und $|\mathfrak{K}| > 2$ voraus. Keine Einschränkung (wie in (**3**)) über die Charakteristik von $\mathfrak{L}$ wird benötigt. $\mathfrak{K}$ ist kommutativ, da $\mathfrak{K}$ im Zentrum von $\mathfrak{L}$ liegt. $\mathfrak{L}$ als Vektorraum über $\mathfrak{K}$ betrachtend, sei $\mathfrak{A}$ der $(\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$-dimensionale affine Raum über $\mathfrak{K}$. Die Punkte von $\mathfrak{A}$ können damit mit den Elementen von $\mathfrak{L}$ identifiziert werden. Sind P, Q verschiedene Punkte, so ist

$$\{\alpha P + (1 - \alpha)Q | \alpha \in \mathfrak{K}\}$$

die Verbindungsgerade von P und Q. Ist g eine Gerade von $\mathfrak{A}$, als Punktmenge betrachtet, so stellt $g \cup \{\infty\} \equiv g'$ eine Kette durch ∞ dar: Sind nämlich P, Q verschiedene Punkte von g, so gilt

$$\{\alpha P + (1 - \alpha)Q | \alpha \in \mathfrak{K}\} \cup \{\infty\} = \left\{X \in \mathfrak{L}' \,\middle|\, \begin{bmatrix} \infty & P \\ X & Q \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}'\right\}.$$

Ist vice versa k eine Kette durch ∞, so ist $k_0 \equiv k - \{\infty\}$ eine Gerade von $\mathfrak{A}$: Sind P, Q (nach Lemma 2.1) untereinander und von ∞ verschiedene Punkte auf k, so ist also $P, Q \in \mathfrak{L}$ und außerdem

$$\left\{X \in \mathfrak{L}' \,\middle|\, \begin{bmatrix} \infty & P \\ X & Q \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}'\right\} - \{\infty\} = \{\alpha P + (1 - \alpha)Q | \alpha \in \mathfrak{K}\}.$$

Definition. Sind a, b Ketten durch den Punkt P, so setzen wir aPb genau dann, wenn es ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$ mit $P^\gamma = \infty$ gibt so, daß die Geraden $a_0{}^\gamma$, $b_0{}^\gamma$ parallel sind.

LEMMA 4.1. *Sind a, b Ketten durch P mit $a \cap b = \{P\}$ und mit aPb, so gilt für jedes $\delta \in \Gamma(\mathfrak{L})$, das P in ∞ überführt, $a_0{}^\delta || b_0{}^\delta$, d.h. $a_0{}^\delta$, $b_0{}^\delta$ sind parallel in $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Sei zunächst $P = \infty$. Der Stabilisator von ∞ in $\Gamma(\mathfrak{L})$ ist die Gruppe $\Phi(\mathfrak{L})$ von § 1. Wir zeigen, daß alle $\phi \in \Phi(\mathfrak{L})$, auf $\mathfrak{L}$ beschränkt, Affinitäten von $\mathfrak{A}$ sind: $z \to \alpha z \beta + \gamma$ mit α, β, $\gamma \in \mathfrak{L}$ und $\alpha \neq 0 \neq \beta$ überführt aber tatsächlich Geraden in Geraden (da $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ Ketten durch ∞ in Ketten durch ∞ überführt) und parallele Geraden in parallele Geraden; sind nämlich (N, Q), (R, S) parallele Geraden, d.h. gilt $S - R = \lambda(Q - N)$ mit einem $\lambda \in \mathfrak{K}^*$, so ist (man beachte $\lambda \in Z(\mathfrak{L})$)

$$\begin{aligned}(\alpha S\beta + \gamma) - (\alpha R\beta + \gamma) = \alpha(S - R)\beta &= \lambda\alpha(Q - N)\beta \\ &= \lambda[(\alpha Q\beta + \gamma) - (\alpha N\beta + \gamma)].\end{aligned}$$

Aus aPb folgt nun die Existenz eines $\delta_0 \in \Gamma(\mathfrak{L})$ mit $a_0{}^{\delta_0} || b_0{}^{\delta_0}$ und (wegen $P = \infty$) $\delta_0 \in \Phi(\mathfrak{L})$. Also ist $a_0{}^\delta || b_0{}^\delta$ eine Folge des Affinitätscharakters von $\delta_0{}^{-1}\delta \in \Phi(\mathfrak{L})$. Der Fall $P \neq \infty$ erledigt sich so: Die Gesamtheit der Abbildungen aus $\Gamma(\mathfrak{L})$, die P in ∞ überführen, ist durch $\psi(1, 1, 0, P) \cdot \Phi(\mathfrak{L})$ gegeben. Gilt nun $a_0{}^{\delta_0} || b_0{}^{\delta_0}$ für ein $\delta_0 \in \psi \cdot \Phi$, so folgt für jedes $\delta \in \psi \cdot \Phi$ offenbar $a_0{}^\delta || b_0{}^\delta$, da $\delta_0{}^{-1}\delta \in \Phi$ ist.

LEMMA 4.2. (i) *Aus aPb, $a \neq b$, folgt $a \cap b = \{P\}$. Aus $P \in a$ folgt aPa. Es ist bPa eine Folge von aPb. Schließlich ergibt aPb, bPc auch aPc.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-122-1 Published online by Cambridge University Press

(ii) *Ist k eine Kette, sind P, Q Punkte mit $P \in k$, $Q \notin k$, so gibt es genau eine Kette k' durch P, Q mit kPk'.*

(iii) *Folgt aus $a \cap b = \{P\}$ stets aPb, so ist $\mathfrak{L}$ eine kommutative quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}$.*

Beweis. (i) und (ii) folgen aus entsprechenden Eigenschaften für die Parallelitätsrelation in $\mathfrak{A}$; insbesondere ist (ii) eine Folge des euklidischen Parallelenaxioms. Zu (iii): Hier ist $\mathfrak{A}$ die affine Ebene über $\mathfrak{K}$. Ist $l_0 \in \mathfrak{L}$ mit $l_0 \notin \mathfrak{K}$, so ist $1, l_0$ eine Basis von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$: Sei $l \in \mathfrak{L}$. Dann zeichne man durch l die Parallele zur Geraden $(0, 1)$, die die Gerade $(0, l_0)$ in $\alpha l_0, \alpha \in \mathfrak{K}$, schneiden möge. Also gilt $l = \alpha l_0$ oder $l \neq \alpha l_0$ und $l - \alpha l_0 = \lambda(1 - 0)$ mit einem $\lambda \in \mathfrak{K}^*$; insgesamt ist $l = \lambda + \alpha l_0$ mit $\lambda \in \mathfrak{K}$. Da noch $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ gilt, muß $\mathfrak{L}$ kommutativ sein.

SATZ 4.1. *Es seien a, b Ketten durch den Punkt P mit $a \cap b = \{P\}$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig*

(i) aPb;

(ii) Es *gibt Punkte A, A', B, B', F mit*

A, A' sind verschiedene Punkte auf $a - b$,

B, B' sind verschiedene Punkte auf $b - a$,

$F \notin a \cup b$,

$PFAB$, $PFA'B'$ sind je konzyklische Quadrupel, d.h. je gemeinsam einer und derselben Kette angehörend.

Beweis. Aus (i) folgt (ii). Seien zum Beweis dieser Aussage A, A' untereinander und von P verschiedene Punkte auf a. Sei

$$\gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} P & A & A' \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist nach Lemma 4.1 jedenfalls $a_0{}^\gamma \| b_0{}^\gamma$. Sei $\xi \in \mathfrak{K} - \{0, 1\}$; wegen $|\mathfrak{K}| > 2$ gibt es solch ein Element. Sei B ein Punkt auf $b - a$. Wir erklären Punkte B', F durch

$$(B')^\gamma = B^\gamma + 1 - \xi^{-1}, \qquad (F)^\gamma = \xi B^\gamma.$$

Es ist $B \neq B'$, da sonst $\xi = 1$ wäre. Es ist $B' \in b - a$; denn die eindeutig bestimmte Parallele durch B^γ zu $(0, 1)$ (diese ist $b_0{}^\gamma$) enthält $(B')^\gamma \neq \infty$. Wegen $\xi B^\gamma \neq \infty$ ist $F \neq P$; weiterhin ist $F^\gamma \notin a_0{}^\gamma \cup b_0{}^\gamma$, da $F^\gamma \in a_0{}^\gamma$ auf $\xi B^\gamma \in \mathfrak{K}$, d.h. auf $B \in a$ führte, und $F^\gamma \in b_0{}^\gamma$ auf $\xi B^\gamma = B^\gamma + \mu$ mit $\mu \in \mathfrak{K}$, was wegen $\xi \neq 1$ auch $B^\gamma \in \mathfrak{K}$ ergäbe. Schließlich ist

$$\begin{bmatrix} P & F \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^\gamma & F^\gamma \\ B^\gamma & A^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & \xi B^\gamma \\ B^\gamma & 0 \end{bmatrix} = (\xi B^\gamma)^{-1}(\xi - 1)B^\gamma \in \mathfrak{K}$$

und

$$\begin{bmatrix} P & F \\ B' & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & \xi B^\gamma \\ B^\gamma + 1 - \xi^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$
$$= (\xi B^\gamma - 1)^{-1}((\xi - 1)B^\gamma - 1 + \xi^{-1}) = 1 - \xi^{-1} \in \mathfrak{K}.$$

Aus (ii) folgt (i). Die Punkte A, A', B, B', F müssen paarweise verschieden sein. Sei

$$\gamma \in \Gamma\begin{pmatrix} P & A & A' \\ \infty & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $(B')^\gamma$ liegt auf der Geraden $(F^\gamma, (A')^\gamma)$. Dies ergibt, wenn man noch $F^\gamma \in (A^\gamma, B^\gamma)$ berücksichtigt:

$$F^\gamma = \lambda B^\gamma, \qquad \lambda \in \mathfrak{K} - \{0, 1\}, \tag{1}$$

$$(B')^\gamma = \alpha F^\gamma + (1 - \alpha) = (1 - \alpha) + \alpha\lambda B^\gamma, \qquad \alpha \in \mathfrak{K} - \{0, 1\}. \tag{2}$$

Wir zeigen $(B')^\gamma - B^\gamma \in \mathfrak{K}$, was $a_0{}^\gamma || b_0{}^\gamma$ ergibt und den Beweis beendet. Wäre $(B')^\gamma - B^\gamma \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$, so ergäbe (2) zunächst $\alpha\lambda - 1 \neq 0$, was auf

$$S \equiv \frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda - 1} B^\gamma - \frac{1}{\alpha\lambda - 1} (B')^\gamma \in (B^\gamma, (B')^\gamma) \quad \text{führt.}$$

(Man beachte bei diesen Rechnungen $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$.) Wegen (2) ist auch

$$S = \frac{\alpha - 1}{\alpha\lambda - 1} \in \mathfrak{K} = (A^\gamma, (A')^\gamma).$$

Damit wäre aber $S \in a_0{}^\gamma \cap b_0{}^\gamma$, was $\infty = S \in \mathfrak{K}$ ergäbe.

Unter der Voraussetzung $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ ist jede eineindeutige Abbildung κ von $\mathfrak{L}'$ auf sich, die jede Kette wieder in eine Kette überführt, bereits eine Kettenverwandtschaft: Ist nämlich k eine Kette, so seien A, B, C verschiedene Punkte auf k. Durch $A^{\kappa^{-1}}$, $B^{\kappa^{-1}}$, $C^{\kappa^{-1}}$ geht nach Lemma 2.2 genau eine Kette a. Also ist a^κ eine Kette, die $(A^{\kappa^{-1}})^\kappa = A$, B, C enthält. Nach Lemma 2.2 ist demnach $a^\kappa = k$ und $k^{\kappa^{-1}} = a$ damit tatsächlich eine Kette.

Korollar zu Satz 4.1. *Ist κ eine Kettenverwandtschaft, so ist aPb mit $a^\kappa P^\kappa b^\kappa$ gleichwertig.*

Beweis. Wir brauchen nur zu zeigen, daß $a^\kappa P^\kappa b^\kappa$ aus aPb folgt, da κ^{-1} auch eine Kettenverwandtschaft ist. Im Falle $a = b$ ist nichts zu zeigen. Sei also $a \cap b = \{P\}$. Satz 4.1 führt auf geeignete Punkte A, A', B, B', F. Die zugehörigen κ-Bilder dieser Punkte zeigen nach Satz 4.1 dann $a^\kappa P^\kappa b^\kappa$.

In den weiteren Betrachtungen werden wir den folgenden Satz von Hua (**8**) (s. für einen Beweis z.B. Artin (**1**, pp. 37–40)) zweimal verwenden.

Satz (Hua). *Sei $x \to x'$ ein Automorphismus der additiven Gruppe $\mathfrak{L}^+$ des Körpers $\mathfrak{L}$ mit $1' = 1$ und $(x^{-1})' = (x')^{-1}$ für alle $x \in \mathfrak{L}^*$. Dann ist $x \to x'$ ein Automorphismus oder aber ein Antiautomorphismus von $\mathfrak{L}$.*

5. Der Fall (A).

Hier sei also $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ und Char $\mathfrak{L} \neq 2$.

Satz 5.1. *Es seien A, B, C, D verschiedene Punkte auf einer Kette k. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig*

(a) $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle;$

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-122-1 Published online by Cambridge University Press

(b) *Es gibt verschiedene Punkte F, G, H mit $F, G, H \notin k$;*
$AHGD$, $BHFD$ sind knozyklische Quadrupel;
$(FGD)D(ABD)$;
$(AFD)D(CHD)D(BGD)$.

Beweis. Sei $X \to X'$ eine Abbildung aus $\Gamma\binom{D\ C\ B}{\infty\ 0\ 1}$. Gelte (a). Aus

$$\{-1\} = \langle -1 \rangle = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}$$

(Lemma 3.1) folgt (Lemma 3.3) $A' = -1$. Sei $i \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$. Die Punkte F, G, H seien durch $F' = i - 1$, $G' = i + 1$, $H' = \frac{1}{2}i$ gegeben. Wir beachten dabei Char $\mathfrak{L} \neq 2$. Für die Punkte F, G, H gilt (b), da (b) für die gestrichenen Größen gilt, und da $X' \to X$ als Kettenverwandtschaft die Berührrelation erhält (Korollar zu Satz 4.1). Gelte nun (b). Wieder legen wir die Abbildung $X \to X'$ zugrunde. Aus $(F'G'D')D'(A'B'D')$ folgt $(F', G')||(0, 1)$. Dies bedeutet $G' - F' \equiv 2\lambda \in \mathfrak{K}^*$. Setzt man $i = \frac{1}{2}(F' + G')$, so ist $F' = i - \lambda$, $G' = i + \lambda$. Ist $A' = \alpha \in \mathfrak{K}^* - \{1\}$, so folgt aus $(AFD)D(BGD)$ zunächst $(A', F')||(B', G')$ und damit $F' - A' = \mu(G' - B')$ mit einem $\mu \in \mathfrak{K}^*$. Hiermit gilt $i - \lambda - \alpha = \mu(i + \lambda - 1)$, was $\mu = 1$, $\alpha = 1 - 2\lambda$ ergibt, wenn wir $i \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ beachten, da $i \in \mathfrak{K}$ auf $F' \in \mathfrak{K}$, d.h. auf $F \in \mathfrak{K}$ führte. (C', H') (B', G') bedeutet $H' = \nu(i + \lambda - 1)$ mit $\nu \in \mathfrak{K}^*$. Aus der konzyklischen Lage von A', H', G', D' und B', H', F', D' schließlich folgt $\lambda = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$. Damit ist $A' = \alpha = 1 - 2\lambda = -1$, was

$$\langle -1 \rangle = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix},$$

d.h. (a) ergibt.

Das Korollar zu Satz 4.1 zusammen mit Satz 5.1 führen auf.

SATZ 5.2. *Ist κ eine Kettenverwandtschaft, so ist*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle \quad mit \quad \begin{bmatrix} A^\kappa & B^\kappa \\ D^\kappa & C^\kappa \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle$$

gleichwertig für je vier verschiedene Punkte A, B, C, D.

Beweis. Da κ^{-1} auch eine Kettenverwandtschaft ist, genügt der Nachweis, daß

$$\begin{bmatrix} A^\kappa & B^\kappa \\ D^\kappa & C^\kappa \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle$$

gilt, sobald

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle$$

gilt. Wegen $-1 \in \mathfrak{K}$ ist A, B, C, D ein konzyklisches Quadrupel. Nach Satz 5.1 hat man geeignete Punkte F, G, H. Die Punkte A, B, C, D, F, G, H der Abbildung κ unterworfen, hat man für diese κ-Bilder die Lage- und Berührbeziehungen

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-122-1 Published online by Cambridge University Press

von (b) nach dem Korollar zu Satz 4.1. Also, da (a) aus (b) in Satz 5.1 folgt, gilt

$$\begin{bmatrix} A^\kappa & B^\kappa \\ D^\kappa & C^\kappa \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle.$$

Schließlich benötigen wir den bekannten Satz (s. z.B. **12**, p. 121; wir geben einen Beweis in unseren Bezeichnungen) (sei Char $\mathfrak{K} \neq 2$).

SATZ. *Ist $l \to l'$ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{K} \cup \{\infty\}$ auf sich mit $\infty' = \infty$, $0' = 0$, $1' = 1$ so, daß für je vier verschiedene Punkt A, B, C, D mit*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle \quad \textit{auch} \quad \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle$$

folgt, so ist $l \to l'$ auf $\mathfrak{K}$ ein Automorphismus oder aber ein Antiautomorphismus von $\mathfrak{K}$.

Beweis. Seien x, y verschiedene Elemente aus $\mathfrak{K}$. Dann sind $x, y, \frac{1}{2}(x + y), \infty$ verschiedene Punkte mit (Lemma 3.3)

$$\begin{bmatrix} x & y \\ \infty & \frac{1}{2}(x+y) \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle.$$

Also gilt

$$\begin{bmatrix} x' & y' \\ \infty & (\frac{1}{2}(x+y))' \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle,$$

was nach Lemma 3.3 auf $2(\frac{1}{2}(x + y))' = x' + y'$ führt, eine Formel, die gewiß auch für $x = y$ richtig ist. $y = 0$ ergibt $2(\frac{1}{2}x)' = x'$ für alle $x \in \mathfrak{K}$. Damit ist $(x + y)' = 2(\frac{1}{2}(x + y))' = x' + y'$ für alle $x, y \in \mathfrak{K}$. Also stellt $l \to l'$ einen Automorphismus von $\mathfrak{K}^+$, der additiven Gruppe von $\mathfrak{K}$, dar, für den nach Annahme auch noch $1' = 1$ gilt. Natürlich ist $(-1)' = -1$, da $0 = 0' = (1 + (-1))' = 1 + (-1)'$ gilt. Sei jetzt $x \in \mathfrak{K} - \{0, 1, -1\}$ genommen. (Im Falle $|\mathfrak{K}| = 3$ ist nichts mehr zu zeigen.) Dann sind x, x^{-1}, $1, -1$ verschiedene Punkt mit

$$\begin{bmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \left\langle (x+1)\frac{1}{x^{-1}+1}(x^{-1}-1)\frac{1}{x-1} \right\rangle$$
$$= \left\langle x(1+x^{-1})\frac{1}{x^{-1}+1}x^{-1}(1-x)\frac{1}{x-1} \right\rangle = \langle -1 \rangle.$$

Also gilt

$$\begin{bmatrix} x & (x^{-1})' \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \langle -1 \rangle.$$

Aus

$$-1 = (x'+1)\frac{1}{(x^{-1})'+1}((x^{-1})'-1)\frac{1}{x'-1}$$

folgt

$$-\frac{1}{x'+1}(x'-1) = \frac{1}{(x^{-1})'+1}((x^{-1})'-1),$$

d.h.

$$\frac{2}{x'+1} - 1 = -\frac{1}{x'+1}((x'+1)-2) = 1 - \frac{2}{(x^{-1})'+1}.$$

Aus

$$\frac{1}{(x^{-1})'+1} = 1 - \frac{1}{x'+1} = \frac{1}{x'+1}(x'+1-1) = \frac{1}{x'+1}x'$$

ergibt sich $(x^{-1})' + 1 = (x')^{-1}(x'+1)$, d.h. $(x^{-1})' = (x')^{-1}$, eine Formel, die natürlich auch für $x \in \{1, -1\}$ richtig ist. Damit ist mit dem Satz von Hua die Behauptung bewiesen.

Ist nun κ eine beliebige Kettenverwandtschaft, so sei γ eine Abbildung aus $\Gamma(\mathfrak{L})$ mit $\infty^\gamma = (\infty^\kappa)$, $0^\gamma = (0^\kappa)$, $1^\gamma = (1^\kappa)$ (Lemma 1.2). Es ist auch $\mu = \kappa\gamma^{-1}$ eine Kettenverwandtschaft. Für diese gilt $\infty^\mu = \infty$, $0^\mu = 0$, $1^\mu = 1$. Aus Satz 5.2 zusammen mit der letzten Betrachtung folgt $\mu \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K})$, d.h.

$$\kappa \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L}).$$

Da umgekehrt alle Abbildungen aus $\mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L})$ Kettenverwandtschaften sind (Lemma 2.6), ist der Hauptsatz im Falle (A) bewiesen.

6. Der Fall (B). Hier setzen wir also $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ und außerdem Char $\mathfrak{L} = 2$ voraus. Weiterhin sei $2 < |\mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})|$, was also einfach hier $|\mathfrak{K}| > 2$ bedeutet. Übrigens ist der Fall $|\mathfrak{K}| = 2$ vollständig überschaubar: Hier ist jede Permutation von $\mathfrak{L}'$ eine Kettenverwandtschaft. Analog zur letzten Betrachtung in § 5 müssen wir zum Beweis des Hauptsatzes im Falle B zeigen, daß eine Kettenverwandtschaft, die ∞, 0, 1 zu Fixpunkten hat, zu $\mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K})$ gehört. Sei κ eine solche Kettenverwandtschaft, die wir auch in der Form $X \to X'$ aufschreiben. Die Beschränkung von κ auf $\mathfrak{L}$ ist eine Affinität von $\mathfrak{A}$ (s. § 4), was das Korollar zu Satz 4.1 (hier $P = \infty$) ergibt. An dieser Stelle geht entscheidend der Satz 4.1 ein. Aus grundlegenden Sätzen der affinen Geometrie geht dann die Existenz eines Automorphismus τ von $\mathfrak{K}$ hervor, so daß insgesamt gilt

(1) $(l_1 + l_2)' = l_1 + l_2$ für $l_1, l_2 \in \mathfrak{L}$,

(2) $(\alpha l)' = \alpha^\tau l'$ für $\alpha \in \mathfrak{K}$, $l \in \mathfrak{L}$.

Setzen wir in (2) $l = 1$ ein und beachten $1' = 1$ (1 ist ja ein Fixpunkt von κ), so folgt

(3) $\alpha = (\alpha \cdot 1)' = \alpha^\tau \cdot 1' = \alpha^\tau$.

Damit ist die Beschränkung von κ auf $\mathfrak{K}$ durch $\alpha^\kappa = \alpha^\tau$ gegeben; dort ist also κ ein Automorphismus. Der Beweis des Hauptsatzes (im Falle (B)) ist damit zurückgeführt (mit Hilfe des Satzes von Hua) auf die Behauptung

(*) Für alle $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ gilt $(y^{-1})' = (y')^{-1}$.

Die Formeln (1), (2), (3) wurden für eine beliebige Kettenverwandtschaft, die ∞, 0, 1 zu Fixpunkten hat, hergeleitet. Das halten wir fest im

LEMMA 6.1. *Ist ω eine Kettenverwandtschaft mit $\infty^\omega = \infty$, $0^\omega = 0$, $1^\omega = 1$, so gilt*

$$(l_1 + l_2)^\omega = l_1^\omega + l_2^\omega \quad \text{für } l_1, l_2 \in \mathfrak{L},$$
$$(\alpha l)^\omega = \alpha^\omega l^\omega \quad \text{für } \alpha \in \mathfrak{K}, l \in \mathfrak{L}.$$

Außerdem ist $\mathfrak{K}^\omega = \mathfrak{K}$.

Sei $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$. Dann ist auch $y - 1 \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$. Wir betrachten die nach Lemma 4.2 (β) eindeutig bestimmte Kette s durch $y - 1$, 0 mit $(\infty 01)0s$. Setzen wir in Lemma 4.1 $\delta = \psi(1, 1, 0, 0)$ (hier ist $0^\psi = \infty$), so ist also $(\infty 01)^\delta || s^\delta$, was wegen $(\infty 01)^\delta = (\infty 01)$ und $(y - 1)^\delta = 1/(y - 1)$ auf

$$s = \{0\} \cup \left\{ x \in \mathfrak{L}^* \,\middle|\, \frac{1}{x} - \frac{1}{y - 1} \in \mathfrak{K} \right\} \tag{3}$$

führt. Diese Kette s geht gegenüber ω (von Lemma 6.1) über in die Kette s^ω, für die aus $(\infty 01)0s$ (nach dem Korollar zu Satz 4.1, hier wird dieser Satz wieder entscheidend benötigt) $(\infty^\omega 0^\omega 1^\omega)0^\omega s^\omega$, d.h. $(\infty 01)0s^\omega$ folgt. ω ist eine Kettenverwandtschaft, für die $(\infty 01)$ eine Fixkette ist; aus $y - 1 \notin \mathfrak{K}$ folgt also $(y - 1)^\omega \notin \mathfrak{K}$. Aus $(\infty 01)0s^\omega$ und 0, $(y - 1)^\omega \in s^\omega$ folgt

$$s^\omega = \{0\} \cup \left\{ \xi \in \mathfrak{L}^* \,\middle|\, \frac{1}{\xi} - \frac{1}{y^\omega - 1} \in \mathfrak{K} \right\}, \tag{4}$$

wobei wir noch $(y - 1)^\omega = y^\omega - 1$ nach Lemma 6.1 beachten. Wegen $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ ist $y \neq 0$ und $1 - 1/y \neq 0$.

Aus

$$\frac{1}{1 - y^{-1}} - \frac{1}{y - 1} = \frac{1}{(y - 1)y^{-1}} - \frac{1}{y - 1} = (y - 1)\frac{1}{y - 1} \in \mathfrak{K}$$

folgt (nach (3)) $1 - y^{-1} \in s$. Also ist $1 - (y^{-1})^\omega = (1 - y^{-1})^\omega \in s^\omega$. Aus (4) folgt (beachte $(1 - y^{-1})^\omega \neq 0$)

$$\epsilon \equiv \frac{1}{1 - (y^{-1})^\omega} - \frac{1}{y^\omega - 1} \in \mathfrak{K},$$

d.h.

$$\frac{1}{1 - (y^{-1})^\omega} = \frac{1}{y^\omega - 1} + \epsilon = (1 + \epsilon(y^\omega - 1))\frac{1}{y^\omega - 1}.$$

Da $1 + \epsilon(y^\omega - 1) \neq 0$ ist, folgt $1 - (y^{-1})^\omega = (y^\omega - 1)(1 + \epsilon(y^\omega - 1))^{-1}$, d.h. $(y^{-1})^\omega = (\epsilon + (1 + \epsilon)y^\omega)((1 + \epsilon) + \epsilon y^\omega)^{-1}$, wobei wir Char $\mathfrak{L} = 2$ benutzt haben.

Diese Betrachtung halten wir fest im

LEMMA 6.2. *Ist ω eine Kettenverwandtschaft mit $\infty^\omega = \infty$, $0^\omega = 0$, $1^\omega = 1$, so gibt es zu jedem $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ ein $\epsilon = \epsilon(\omega, y) \in \mathfrak{K}$ mit*

$$(y^{-1})^\omega = (\epsilon + (1 + \epsilon)y^\omega)((1 + \epsilon) + \epsilon y^\omega)^{-1}.$$

Wir zeigen nun

LEMMA 6.3. *Ist ω eine Kettenverwandtschaft mit $\infty^\omega = \infty$, $0^\omega = 0$, $1^\omega = 1$, so sind im Vektorraum $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ für ein $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ die Elemente $1, y, y^2$ linear unabhängig, wenn die Elemente $1, y^\omega, (y^\omega)^2$ es sind.*

Beweis. Angenommen, es gäbe nicht durchweg verschwindende Elemente u, v, w aus $\mathfrak{K}$ mit $uy^2 + vy + w = 0$. Es ist $u \neq 0$, da sonst $vy + w = 0$ wäre, was im Falle $v = 0$ auch noch $w = 0$ ergäbe, und im Falle $v \neq 0$ auf $y \in \mathfrak{K}$ führte. Auch w ist $\neq 0$, da sonst $uy + v = 0$ wegen $u \neq 0$ doch $y \in \mathfrak{K}$ ergäbe. Damit ist

$$y^{-1} = \gamma y + \beta, \qquad \gamma \in \mathfrak{K}^*, \beta \in \mathfrak{K}, \tag{5}$$

mit $\gamma = -u/w$, $\beta = -v/w$. Mit Lemma 6.1 und Lemma 6.2 folgt aus (5)

$$\gamma^\omega y^\omega + \beta^\omega = (y^{-1})^\omega = (\epsilon + (1 + \epsilon)y^\omega)((1 + \epsilon) + \epsilon y^\omega)^{-1},$$

d.h. (wir beachten, daß $\mathfrak{K}$ im Zentrum von $\mathfrak{L}$ liegt, und daß Char $\mathfrak{L} = 2$ ist)

$$[\gamma^\omega \epsilon](y^\omega)^2 + [\gamma^\omega(1 + \epsilon) + \beta^\omega \epsilon + 1 + \epsilon]y^\omega + [\epsilon + \beta^\omega(1 + \epsilon)] \cdot 1 = 0. \tag{6}$$

Nun sind aber nach Annahme $1, y^\omega, (y^\omega)^2$ linear unabhängig. Da alle Koeffizienten von (6) in $\mathfrak{K}$ liegen wegen $\mathfrak{K}^\omega = \mathfrak{K}$ (beachte $(\infty 0 1)^\omega = (\infty 0 1)$), so folgt

$$\begin{cases} \gamma^\omega \epsilon = 0, \gamma^\omega(1 + \epsilon) + \beta^\omega \epsilon + 1 + \epsilon = 0, \\ \epsilon + \beta^\omega(1 + \epsilon) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Aus $\gamma \neq 0$ (s. (5)) folgt $\gamma^\omega \neq 0$. (ω ist eineindeutig), d.h. mit (7) $\epsilon = 0$. Dann ergibt (7) weiterhin

$$\gamma^\omega = 1, \qquad \beta^\omega = 0,$$

d.h. $\gamma = 1$ und $\beta = 0$. Mit (5) bedeutet dies $y^{-1} = y$, d.h. $y^2 = 1$ oder $y = 1$ (beachte Char $\mathfrak{L} = 2$), was $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ widerspricht. Damit ist unsere Annahme zum Widerspruch geführt und also die lineare Unabhängigkeit von $1, y, y^2$ gezeigt.

LEMMA 6.4. *Ist ω eine Kettenverwandtschaft mit $\infty^\omega = \infty$, $0^\omega = 0$, $1^\omega = 1$, so sind im Vektorraum $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ für ein $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ die Elemente $1, y^\omega, (y^\omega)^2$ linear unabhängig, wenn die Elemente $1, y, y^2$ es sind.*

Beweis. $\Omega \equiv \omega^{-1}$ ist ebenfalls eine Kettenverwandtschaft, die ∞, 0, 1 zu Fixpunkten hat. Aus $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ folgt $Y \equiv y^\omega \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$. Die Elemente 1, $y = Y^\Omega, y^2 = (Y^\Omega)^2$ sind linear unabhängig. Lemma 6.3 verwendet (die dortigen y, ω jetzt durch Y, Ω ersetzt), ergibt die lineare Unabhängigkeit von $1, Y, Y^2$, d.h. von $1, y^\omega, (y^\omega)^2$.

Wir wenden uns jetzt wieder der Behauptung

(*) Für alle $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ gilt $(y^{-1})' = (y')^{-1}$

zu, auf die wir den Hauptsatz zurückgeführt hatten. Wir zeigen:

LEMMA 6.5. *Sind für ein $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ die Elemente* 1, y, y^2 *linear unabhängig im Vektorraum $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$, so gilt* $(y^{-1})' = (y')^{-1}$.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathfrak{K} - \{0, 1\}$, wobei wir unsere Voraussetzung $|\mathfrak{K}| > 2$ beachten. Da $X \rightarrow X'$ eine Kettenverwandtschaft war mit $\infty' = \infty$, $0' = 0$, $1' = 1$, so haben wir $\alpha' \neq 0, 1$ und (Lemma 6.1) $\alpha' \in \mathfrak{K}$. Es ist $\alpha y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$. Wir benutzen jetzt Lemma 6.2, indem wir jetzt $X \rightarrow X'$ die dortige Abbildung ω sein lassen und statt des dortigen y jetzt αy nehmen: Mit $\eta = \epsilon(', \alpha y) \in \mathfrak{K}$ gilt dann

$$[(\alpha y)^{-1}]' = (\eta + (1 + \eta)(\alpha y)')((1 + \eta) + \eta(\alpha y)')^{-1}. \tag{8}$$

Nach Lemma 6.1 ist aber auch ($\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$)

$$[(\alpha y)^{-1})]' = [\alpha^{-1} \cdot y^{-1}]' = (\alpha^{-1})'(y^{-1})' = (\alpha')^{-1}[y^{-1}]'. \tag{9}$$

Wiederum Lemma 6.2 benutzend mit $\epsilon = \epsilon(', y) \in \mathfrak{K}$ haben wir

$$(y^{-1})' = (\epsilon + (1 + \epsilon)y')((1 + \epsilon) + \epsilon y')^{-1}. \tag{10}$$

(8), (9), (10) ergeben (in (8) noch einmal Lemma 6.1 verwendend)

$$(\alpha')^{-1}(\epsilon + (1 + \epsilon)y')((1 + \epsilon) + \epsilon y')^{-1} = (\eta + (1 + \eta)\alpha' y')((1 + \eta) + \eta\alpha' y')^{-1}. \tag{11}$$

Wegen $(\epsilon + (1 + \epsilon)y')((1 + \epsilon) + \epsilon y') = ((1 + \epsilon) + \epsilon y')(\epsilon + (1 + \epsilon)y')$ (es liegt ja doch $\mathfrak{K}$ im Zentrum von $\mathfrak{L}$ und ϵ ist in $\mathfrak{K}$) hat man

$$(\epsilon + (1 + \epsilon)y')((1 + \epsilon) + \epsilon y')^{-1} = ((1 + \epsilon) + \epsilon y')^{-1}(\epsilon + (1 + \epsilon)y').$$

Hiermit ergibt (11)

$$(\epsilon + (1 + \epsilon)y')((1 + \eta) + \eta\alpha' y') = \alpha'((1 + \epsilon) + \epsilon y')(\eta + (1 + \eta)\alpha' y'),$$

d.h. $u(y')^2 + vy' + w = 0$ mit

$$\begin{cases} u = (1 + \epsilon)\eta\alpha' + (\alpha')^2\epsilon(1 + \eta), \\ v = (1 + \epsilon)(1 + \eta) + (\alpha')^2(1 + \epsilon)(1 + \eta), \\ w = \epsilon(1 + \eta) + \alpha'(1 + \epsilon)\eta. \end{cases} \tag{12}$$

Da $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ ist, und 1, y, y^2 linear unabhängig sind, folgt nach Lemma 6.4 die lineare Unabhängigkeit von 1, y', $(y')^2$. Die Größen u, v, w in (12) müssen also alle 0 sein.

$w = 0$ ergibt

$$\epsilon(1 + \eta) = \alpha'(1 + \epsilon)\eta,$$

was mit $u = 0$ auf

$$\epsilon(1 + \eta) = \epsilon(1 + \eta)(\alpha')^2$$

führt. Wäre

$$\epsilon(1+\eta) \neq 0,$$

so hätte man $(\alpha')^2 = 1$, d.h. $\alpha' = 1$, was nicht der Fall ist. Also gilt

$$\epsilon(1+\eta) = 0. \tag{13}$$

Ist $\eta = 1$, so ergibt (8) mit (9)

$$(\alpha')^{-1}[y^{-1}]' = [(\alpha y)']^{-1} = (\alpha' y')^{-1} = (\alpha')^{-1}(y')^{-1},$$

d.h. die Behauptung

$$[y^{-1}]' = (y')^{-1}.$$

Ist $\eta \neq 1$, so ergibt (13) $\epsilon = 0$. Hiermit gilt nach (12)

$$v = (1+\eta)(1+(\alpha')^2) \neq 0$$

wegen $\alpha' \neq 1$, was wegen $v = 0$ nicht zutrifft. Damit ist Lemma 6.5 bewiesen.

Mit Lemma 6.5 ist die Behauptung (*) zurückgeführt auf

(**) Für alle $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$, für die die Elemente $1, y, y^2$ linear abhängig sind, gilt $(y^{-1})' = (y')^{-1}$.

Mit Lemma 6.3 können wir statt (**) sogar schreiben: Zu zeigen ist noch:

(***) Für alle $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$, für die die Tripel $1, y, y^2$ und $1, y', (y')^2$ je linear abhängig sind, gilt $(y^{-1})' = (y')^{-1}$.

Sei nun $y \in \mathfrak{L} - \mathfrak{K}$ ein Element, für das $1, y, y^2$ und $1, y', (y')^2$ je linear abhängig sind. Gibt es ein solches für das Paar $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ nicht, so ist nichts mehr zu zeigen. Die Erweiterungen $\mathfrak{K}(y), \mathfrak{K}(y')$ von $\mathfrak{K}$ sind kommutative quadratische Erweiterungen von $\mathfrak{K}$. Genügt y der Gleichung

$$y^2 + \mu y + \nu = 0, \qquad \mu, \nu \in \mathfrak{K}, \tag{14}$$

so ist gewiß

$$\nu \neq 0 \tag{15}$$

und

$$\nu \neq 1 \quad \text{im Falle } \mu = 0. \tag{16}$$

Wir erinnern dabei daran, daß Char $\mathfrak{L} = 2$ vorausgesetzt ist. Offenbar gilt

$$\frac{1}{\xi + y} = \frac{\xi + \mu + y}{\xi^2 + \mu\xi + \nu} \quad \text{für } \xi \in \mathfrak{K}. \tag{17}$$

Hier ist natürlich $\xi^2 + \mu\xi + \nu \neq 0$ für alle $\xi \in \mathfrak{K}$, da $x^2 + \mu x + \nu$ irreduzibel über $\mathfrak{K}$ ist. Mit (1), (2) ergibt (17) für $\xi = 0$,

$$(y^{-1})' = \frac{\mu' + y'}{\nu'}. \tag{18}$$

Aus Lemma 6.2 folgt

$$(19)\qquad (y^{-1})' = (\epsilon + (1+\epsilon)y')((1+\epsilon)+\epsilon y')^{-1}, \qquad \epsilon \in \mathfrak{K}.$$

Hier ist $\epsilon \neq 0$, da sonst

$$(y^{-1})' = y', \text{ d.h. } y^{-1} = y, \text{ d.h. } y = 1 \text{ wäre.}$$

Mit $\alpha = 1 + \epsilon^{-1} \in \mathfrak{K}$ ergeben (18), (19)

$$(20)\qquad (y')^2 + [\mu' + \alpha(1+\nu')]y' + (\nu' + \alpha\mu') = 0;$$

und (19) hat das Aussehen

$$(21)\qquad (y^{-1})' = \frac{1+\alpha y'}{\alpha + y'}.$$

Nach Lemma 2.5 ist

$$(22)\qquad \{0\} \cup \{(\xi - y)^{-1} \mid \xi \in \mathfrak{K}\}$$

eine Kette, die übrigens ganz in $\mathfrak{K}(y)$ liegt. Aus $|\mathfrak{K}| > 2$ und Char $\mathfrak{K} = 2$ folgt

$$(23)\qquad |\mathfrak{K}| \geqq 4.$$

Die Kette (22) enthält die verschiedenen Punkte (sei $k \in \mathfrak{K} - \{0, 1\}$)

$$(24)\qquad 0,\ y^{-1},\ (1+y)^{-1},\ (k+y)^{-1}.$$

Da $X \to X'$ eine Kettenverwandtschaft ist, müssen auch die Bilder der Punkte (24) konzyklisch liegen. Mit (17) lauten diese Bilder (wir beachten (1), (2), (3))

$$(25)\qquad 0' = 0, \quad (y^{-1})' = \frac{\mu' + y'}{\nu'}, \quad ((1+y)^{-1})' = \frac{1+\mu'+y'}{1+\mu'+\nu'},$$

$$((k+y)^{-1})' = \frac{k' + \mu' + y'}{(k')^2 + \mu' k' + \nu'}.$$

Ist $\mathfrak{K}(y)$ inseparable Erweiterung von $\mathfrak{K}$, so gilt in (14) $\mu = 0$. Hier ergibt

$$\begin{bmatrix} 0' & (y^{-1})' \\ ((k+y)^{-1})' & ((1+y)^{-1})' \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}$$

mit (25), wenn wir $\mu' = 0$ wegen $\mu = 0$ beachten,

$$(26)\qquad (y')^2(k' + \lambda) + y'(k' + \nu')(1+\lambda) + \nu'(1 + \lambda k') = 0,$$

wo λ (von k abhängend) ein geeignetes Element von $\mathfrak{K}$ ist. Subtrahieren wir von der Gleichung (26) die mit $k' + \lambda$ durchmultiplizierte Gleichung (20), so muß der y'-Koeffizient der entstehenden Gleichung Null sein (und damit auch der y'-freie Term), da sonst sich $y' \in \mathfrak{K}$ ergäbe. Dies bedeutet

$$(27)\qquad (k' + \lambda)\alpha(1+\nu') = (k' + \nu')(1+\lambda), \qquad (k'+\lambda)\nu' = \nu'(1+\lambda k').$$

Wegen $\nu' \neq 0$ nach (15) ergibt die zweite dieser Gleichungen

$$(1 + \lambda)(1 + k') = 0,$$

d.h. $\lambda = 1$ wegen $k' \neq 1$ (aufgrund von $k \neq 1$). Die erste der Gleichungen (27) lautet dann

$$(k' + 1)\alpha(1 + \nu') = 0,$$

was wegen $k' \neq 1$ und $\nu' \neq 1$ nach (16) auf $\alpha = 0$ führt. Dies bedeutet nach (21)

$$(y^{-1})' = (y')^{-1}.$$

Sei nun $\mathfrak{K}(y)$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}$. Also ist μ in (14) ungleich Null. O.B.d.A. können wir hier $\mu = 1$ annehmen: Im anderen Falle würden wir von vornherein $Y = y/\mu$ und $\mathfrak{K}(Y)$ betrachtet haben. Ist dann erst $(Y^{-1})' = (Y')^{-1}$ hergeleitet, so steht wegen (2) auch $(y^{-1})' = (y')^{-1}$ zur Verfügung. Sei also $\mu = 1$ und damit auch $\mu' = 1$. Hier ergibt

$$\begin{bmatrix} 0 & (y^{-1})' \\ ((k + y)^{-1})' & ((1 + y)^{-1})' \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}$$

mit (25) die Gleichung

$$(y')^2 + y'\left(1 + \frac{\nu' + \lambda}{k' + 1}\right) + \lambda = 0 \tag{28}$$

mit einem geeigneten $\lambda \in \mathfrak{K}$. Wir beachten dabei noch $k \in \mathfrak{K} - \{0, 1\}$, was $k' \neq 1$ ergibt. Dieselbe Überlegung, die zu (27) führte, ergibt hier (wir beachten $\mu' = 1$ in (20))

$$\alpha(1 + \nu') = \frac{\nu' + \lambda}{k' + 1}, \qquad \nu' + \alpha = \lambda.$$

Die zweite dieser Gleichungen in die erste eingesetzt ergibt:

$$\alpha(1 + \nu')(1 + k') = \alpha.$$

Wäre $\alpha \neq 0$, so hätte man $(1 + \nu')(1 + k') = 1$ für jedes $k \in \mathfrak{K} - \{0, 1\}$. Wegen (23) bedeutet dies einen Widerspruch. Also gilt $\alpha = 0$, was mit (21) auf $(y^{-1})' = (y')^{-1}$ führt. Damit ist (***) nachgewiesen und der Hauptsatz im Falle (B) vollständig bewiesen.

7. Der Fall (C). Hier setzen wir über den echten Unterkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{L}$ nur voraus, daß er wenigstens drei verschiedene Elemente mit dem Zentrum von $\mathfrak{L}$ gemeinsam habe,

$$|\mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})| > 2,$$

eine Forderung, die im Falle $\operatorname{Char} \mathfrak{L} \neq 2$ wegen $-1 \in \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$ und $|\{0, 1, -1\}| = 3$ von selbst erfüllt ist. Wie bereits in den früheren Fällen gehandhabt, betrachten wir zum Beweis des Hauptsatzes im Falle C eine

Kettenverwandtschaft κ der Geometrie $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$, die ∞, 0, 1 zu Fixpunkten hat. Nach Satz 2.1, hier 1°, überführt κ Fährten in Fährten. Demnach ist κ eine Kettenverwandtschaft der Geometrie $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}$, wo (s. § 2)

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{a \in \mathfrak{L}^*} a\mathfrak{K}a^{-1} = \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$$

ist. Da $\mathfrak{F}$ im Zentrum von $\mathfrak{L}$ liegt, und da außerdem $|\mathfrak{F}| = |\mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})| > 2$ ist, können wir wegen Satz 2.1. 2° den Hauptsatz für die Fälle A, B benutzen. Also gilt $\kappa \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F})$. Betrachten wir das Bild der Kette $\mathfrak{K}'$ gegenüber κ. Offenbar gilt $\infty, 0, 1 \in (\mathfrak{K}')^{\kappa}$ Beim Beweis von Satz 2.1 2° wurden alle Ketten durch ∞, 0, 1 bestimmt. Diese sind die Ketten

$$\{\infty\} \cup \{a\xi a^{-1} | \ \xi \in \mathfrak{K}\},$$

wo $a \in \mathfrak{L}^*$ ist. Also gilt mit einem geeigneten $a \in \mathfrak{L}^*$ jedenfalls

$$(\mathfrak{K}')^{\kappa} = \{\infty\} \cup \{a\xi a^{-1} | \ \xi \in \mathfrak{K}\}.$$

Betrachten wir nun die Kettenverwandtschaft

$$\kappa_1 = \kappa \cdot \phi(a^{-1}, a, 0),$$

die ebenfalls ∞, 0, 1 zu Fixpunkten hat; Satz 2.1 1°, 2° in Verbindung mit dem Hauptsatz für die Fälle A, B ergibt ebenfalls

$$\kappa \cdot \phi(a^{-1}, a, 0) \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}).$$

Wegen $(\mathfrak{K}')^{\kappa_1} = \mathfrak{K}'$ gilt auch

$$\kappa \cdot \phi(a^{-1}, a, 0) \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}).$$

Wegen $\phi(a^{-1}, a, 0) \in \Gamma(\mathfrak{L})$ ist damit

$$\kappa \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L}).$$

Für eine beliebige Kettenverwandtschaft K sei ein $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{L})$ hergenommen mit $\infty^K = \infty^\gamma$, $0^K = 0^\gamma$, $1^K = 1^\gamma$. Für $K\gamma^{-1}$ gilt nach dem Gezeigten $K\gamma^{-1} \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L})$, was auf

$$K \in \mathbf{A}(\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) \cdot \Gamma(\mathfrak{L}) \text{ führt.}$$

Mit Lemma 2.6 ist dann der Hauptsatz vollständig bewiesen.

8. Der Quaternionenkörper. Sei $\mathfrak{K}$ der Körper **C** der komplexen Zahlen und sei $\mathfrak{L}$ der Quaternionenkörper **Q** über dem Körper **R** der reellen Zahlen. Für diese Geometrie $\mathbf{C} \subset \mathbf{Q}$ wollen wir zeigen, daß eine eineindeutige Abbildung von $\mathbf{Q}'$ auf sich, die Ketten in Ketten überführt, die Eigenschaft hat, daß auch ihre Umkehrabbildung Ketten in Ketten überführt. Diese Situation liegt ja (wie gezeigt) immer im Falle $\mathfrak{K} \subseteq Z(\mathfrak{L})$ vor. Zunächst gilt

SATZ 8.1. *Ist Φ eine Fährte, ist $P \notin \Phi$ ein Punkt, so gibt es genau eine Kette durch P, Φ.*

Beweis. Wegen der dreifachen Transitivität (Lemma 1.2) von $\Gamma(\mathbf{Q})$ können wir annehmen, daß Φ die Fährte $(\infty 01)$ ist. Wir beachten, daß wegen $\mathbf{C} \not\subseteq Z(\mathbf{Q})$ offenbar $(\infty 01)$ keine Kette ist. Wegen

$$(\infty 01) = \mathfrak{F}' = [\mathbf{C} \cap Z(\mathbf{Q})]' = \mathbf{R}',$$

da $\mathbf{R}$ das Zentrum von $\mathbf{Q}$ ist, haben wir also in P einen Punkt aus $\mathbf{Q} - \mathbf{R}$ vor uns. Nun gilt aber

$$\bigcup_{a \in \mathbf{Q}^*} a\mathbf{C}a^{-1} = \mathbf{Q} \tag{28}$$

und

$$a\mathbf{C}a^{-1} \cap b\mathbf{C}b^{-1} = \mathbf{R}, \tag{29}$$

letztere Gleichung, wenn a, b Elemente aus $\mathbf{Q}^*$ sind so, daß $a^{-1}b$ nicht im Normalisator von $\mathbf{C}^*$ liegt. Ist nun (nach (28)) $P \in a\mathbf{C}a^{-1}$, so geht durch P, Φ die Kette $\{\infty\} \cup a\mathbf{C}a^{-1}$. Gäbe es zwei verschiedene Ketten durch P, Φ, so wäre $P \in a\mathbf{C}a^{-1} \cap b\mathbf{C}b^{-1}$ mit

$$a\mathbf{C}a^{-1} \neq b\mathbf{C}b^{-1}.$$

Also liegt $a^{-1}b$ nicht im Normalisator von $\mathbf{C}$, also gilt mit (29)

$$P \in a\mathbf{C}a^{-1} \cap b\mathbf{C}b^{-1} = \mathbf{R},$$

was nicht der Fall ist. Damit ist Satz 8.1 bewiesen.

KOROLLAR. *Eine eineindeutige Abbildung κ von $\mathbf{Q}'$ auf sich, die Ketten der Geometrie $\mathbf{C} \subset \mathbf{Q}$ in Ketten überführt, hat die Eigenschaft, daß auch ihre Umkehrabbildung Ketten in Ketten überführt.*

Beweis. Ist t eine Kette, so kann sie wegen $\mathbf{C} \not\subseteq Z(\mathbf{Q})$ keine Fährte sein. Seien A, B, C verschiedene Punkte von t, sei Φ die Fährte (ABC), sei $P \in t - \Phi$. Wir betrachten die Fährte $\Psi = (A^{\kappa^{-1}}B^{\kappa^{-1}}C^{\kappa^{-1}})$, die ebenfalls keine Kette sein kann. Deshalb gibt es wenigstens zwei verschiedene Ketten x, y durch Ψ. Wäre $P^{\kappa^{-1}} \in (A^{\kappa^{-1}}B^{\kappa^{-1}}C^{\kappa^{-1}})$, so wäre $P^{\kappa^{-1}} \in x \cap y$, d.h. $P \in x^{\kappa} \cap y^{\kappa}$. Da aber nach (29) der Durchschnitt zweier verschiedener Ketten mit wenigstens drei gemeinsamen Punkten schon eine Fährte ist, gilt $P \in (ABC)$, was nicht der Fall ist. (Dieser Beweis, daß aus

$$P^{\kappa^{-1}} \in (A^{\kappa^{-1}}B^{\kappa^{-1}}C^{\kappa^{-1}})$$

die Aussage $P \in (ABC)$ folgt, kann nicht von vornherein mit Satz 2.1 1° geführt werden, da noch nicht feststeht, ob κ eine Kettenverwandtschaft ist.) Also ist $P^{\kappa^{-1}} \notin \Psi$. Nach Satz 8.1 geht durch $P^{\kappa^{-1}}$, Ψ genau eine Kette s. Also enthält s^{κ} den Punkt P und auch die Punkte A, B, C. Also enthält nach Satz 2.1 4° die Kette s^{κ} die Fährte Φ. Durch P, Φ geht nach Satz 8.1 aber genau eine Kette. Wegen $P \in t$, $t \supset \Phi$ gilt damit $s^{\kappa} = t$. Also gilt $t^{\kappa^{-1}} = s$, d.h. $t^{\kappa^{-1}}$ ist eine Kette, was zu beweisen war.

Die Überlegungen dieses Paragraphen (Satz 8.1, Korollar hierzu) bleiben richtig bei der folgenden allgemeineren Situation:

Es sei $\mathfrak{K}$ ein echter Unterkörper des Körpers $\mathfrak{L}$ mit

(a) $|\mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})| > 2$;

(b) $\mathfrak{L} = \bigcup_{a \in \mathfrak{L}^*} a\mathfrak{K}a^{-1}$;

(c) $a\mathfrak{K}a^{-1} \cap b\mathfrak{K}b^{-1} = \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$, wenn $a^{-1}b$ nicht im Normalisator von $\mathfrak{K}^*$ liegt.

Diese Eigenschaften waren gerade erfüllt im Falle $\mathfrak{K} = \mathbf{C}$, $\mathfrak{L} = \mathbf{Q}$.

Die Forderung (c) ist natürlich schon erfüllt, wenn gilt

(c′) $\mathfrak{K} \cap c\mathfrak{K}c^{-1} = \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$ unter der Voraussetzung, daß c nicht im Normalisator von $\mathfrak{K}^*$ liegt.

Eine hinreichende Bedingung für (c′) ist

(c*) $(\mathfrak{K}: [\mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})])$, $(\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$, je endlich und Primzahl > 1.

Denn betrachten wir für $c \in \mathfrak{L}^*$ den Körper $c\mathfrak{K}c^{-1}$, so liegt der Körper $\mathfrak{Z} = \mathfrak{K} \cap c\mathfrak{K}c^{-1}$ zwischen $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \cap Z(\mathfrak{L})$ und $\mathfrak{K}$. Aus $(\mathfrak{K}:\mathfrak{F}) = (\mathfrak{K}:\mathfrak{Z}) \cdot (\mathfrak{Z}:\mathfrak{F})$ und $(\mathfrak{K}:\mathfrak{F})$ prim folgt $(\mathfrak{Z}:\mathfrak{F}) = 1$ oder $(\mathfrak{K}:\mathfrak{Z}) = 1$, was auf $\mathfrak{Z} = \mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}$ führt. Im Falle $\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}$ liegt c im Normalisator von $\mathfrak{K}^*$, denn

$$(\mathfrak{L}:\mathfrak{K}) = (\mathfrak{L}:c\mathfrak{K}c^{-1}) \cdot (c\mathfrak{K}c^{-1}:\mathfrak{K})$$

führt auf $c\mathfrak{K}c^{-1} = \mathfrak{K}$, da $(\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$ prim ist; für $\mathfrak{Z} = \mathfrak{F}$ ist dies nicht der Fall wegen der Annahme $(\mathfrak{K}:\mathfrak{F}) > 1$. (c*) ist z.B. erfüllt im Falle $\mathfrak{L} = \mathbf{Q}$ und $\mathfrak{K} = \mathbf{C}$.

Literaturverzeichnis

1. E. Artin, *Geometric algebra* (Intersicence, New York, 1957).
2. ——— *Galois theory*, Notre Dame Mathematical Lectures, no. 2 (Univ. Notre Dame, Notre Dame, Indiana, 1944).
3. W. Benz, *Nichtkommutative Möbiusgeometrie*, Math. Nachr. *38* (1968), 349–359.
4. ——— *Die 4-Punkt Invarianten in der projektiven Geraden über einen Schiefkörper*, Ann. Polon. Math. *21* (1968), 97–101.
5. ——— *Die Galoisgruppen als Gruppen von Inversionen*, Math. Ann. *178* (1968), 169–172.
6. W. Blaschke, *Projektive Geometrie* (Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel-Hannover, 1948).
7. R. Brauer, *On a theorem of H. Cartan*, Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 619–620.
8. A. Hoffman, *Chains in the projective line*, Duke Math. J. *18* (1951), 827–830.
9. L.-K. Hua, *On the automorphisms of a sfield*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *35* (1949), 386–389.
10. ——— *Über Semi-Homomorphismen von Ringen und ihre Anwendung in der projektiven Geometrie*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) *8* (*55*) (1953), 143–148. (Russian)
11. G. Pickert, *Projektive Ebenen*, Grundlehren der Math. Wiss., Band LXXX (Springer-Verlag, Berlin, 1955).
12. H. Schwerdtfeger, *Geometry of complex numbers*, Mathematical expositions, No. 13 (Univ. Toronto Press, Toronto, Ontario, 1962).
13. E. Witt, *Über Steiner'sche Systeme*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *12* (1938), 265–275.

Ruhr-Universität Bochum,
Bochum, West Germany;
University of Waterloo,
Waterloo, Ontario