DISTRIBUTIONS STATIONNAIRES D'UN SYSTÈME BONUS–MALUS ET PROBABILITÉ DE RUINE

PAR FRANÇOIS DUFRESNE

Université de Lausanne

ABSTRACT

It is shown how the stationary distributions of a bonus–malus system can be computed recursively. It is further shown that there is an intrinsic relationship between such a stationary distribution and the probability of ruin in the risk-theoretical model. The recursive algorithm is applied to the Swiss bonus–malus system for automobile third-party liability and can be used to evaluate ruin probabilities.

KEYWORDS

Bonus–malus; stationary distributions; probability of ruin.

1. INTRODUCTION

Les systèmes bonus–malus sont fréquemment utilisés en assurance automobile, notamment en Europe. Ils ont pour fonction de répartir plus équitablement les coûts entre les bons et les mauvais risques. Une classe de tarif est prévue pour le nouvel assuré puis, annuellement, un réajustement de la classe de tarif est effectué conformément à son expérience et aux règles du système. Ces règles sont fixes et ne prennent en compte, généralement, que le nombre de réclamations rapportées dans l'année précédente.

L'établissement des règles d'un système bonus–malus demeure un processus relativement arbitraire. Il est alors important de pouvoir vérifier si elles ne viennent pas en contradiction avec les buts du système et d'être en mesure d'en apprécier l'efficacité. La théorie des chaînes de Markov est généralement utilisée pour ces études dont une étape consiste en la détermination des distributions stationnaires associées au système (e.g., LOIMARANTA, 1972; VESPÄLÄINEN, 1972; LEMAIRE, 1985, ch. 17 et 1982, ch. 16). Cela revient à dire que l'on s'intéresse à la répartition à long terme des assurés parmi les classes de tarif.

Notre but est de montrer que, sous certaines conditions, la distribution stationnaire de la classe de tarif d'un risque donné peut être obtenue simplement d'une façon recursive, sans faire appel à la théorie des chaînes de Markov. Le procédé sera illustré avec un cas concret. Ensuite nous établirons les liens entre cette distribution stationnaire et la probabilité de ruine, dans les cas discret et continu.

2. LE SYSTÈME BONUS–MALUS À TEMPS DISCRET

2.1. *Le Modèle*

Soit un système bonus–malus constitué de $n+1$ classes de tarif C_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Par convention, les classes sont numérotées en ordre croissant de prime. En utilisant la terminologie de la théorie des chaînes de Markov, nous dirons que l'assuré se trouve dans l'état i quand il paie la prime de la classe C_i.

Nous considérons un assuré en particulier. Soient X_t son état au moment t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, et $X_0 = x_0$ son état initial. Nous supposons que dans chaque intervalle de temps la classification de l'assuré est modifiée selon les règles suivantes: soient $Y_1, Y_2, \ldots$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) telles que

$$\Pr(Y_t = k) = q(k), \qquad k = -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

et au temps $t+1$, l'état est donné par

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + Y_{t+1} & \text{si } 0 \leqslant X_t + Y_{t+1} \leqslant n, \\ 0, & \text{si } X_t + Y_{t+1} = -1, \\ n, & \text{si } X_t + Y_{t+1} > n. \end{cases} \tag{2}$$

Donc, il y a un recul de 1 avec une probabilité $q(-1)$, et avec probabilité $q(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, il y a un avancement de k états. Le recul a lieu quand il n'y a pas eu de réclamation dans la période précédente et les avancements correspondent au cas où une ou plusieurs réclamations ont été rapportées. Ce dernier énoncé ne tient pas compte des modifications nécessaires puisque 0 et n sont respectivement le plus petit et le plus grand état qui peuvent être atteints.

Ainsi, la prime de l'assuré est ajustée à la baisse s'il n'a pas rapporté de réclamation, à la hausse dans le cas contraire, mais sans être inférieure à la prime minimale ou supérieure à la prime maximale. Généralement, Y_t, la variation de l'état, ne dépend que du nombre de sinistres sans égard à leur sévérité.

Par la loi des probabilités totales, on obtient de ces hypothèses que

$$\Pr(X_{t+1} \leqslant x) = \sum_{y=-1}^{x} \Pr(X_t \leqslant x - y)\,q(y) \tag{3}$$

pour $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Evidemment,

$$\Pr(X_{t+1} \leqslant n) = 1. \tag{4}$$

2.2. *La Distribution Stationnaire*

Sous ces hypothèses une distribution stationnaire existe et elle ne dépend pas de l'état initial. Cette affirmation peut être démontrée en utilisant, entre autres, les propriétés des chaînes de Markov (KARLIN et TAYLOR, 1975, p. 83). Soit

$$F(x;\ n) = \lim_{t \to \infty} \Pr(X_t \leqslant x). \tag{5}$$

Pour $t \to \infty$, d'après (3) et (4) nous avons

$$F(x;\, n) = \sum_{y=-1}^{x} F(x-y;\, n)\, q(y), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{6}$$

et

$$F(n;\, n) = 1. \tag{7}$$

L'équation (6) est une formule récursive; si on connaît $F(0;\, n)$, $F(1;\, n), \ldots,$ $F(x;\, n)$, on peut calculer $F(x+1;\, n)$, en utilisant la formule

$$q(-1)\; F(x+1;\, n) = F(x;\, n) - \sum_{y=0}^{x} F(x-y;\, n)\; q(y). \tag{8}$$

Ainsi, l'équation (6) possède une solution unique à une constante multiplicative près. Cette constante est déterminée par la condition (7).

Par conséquent $F(x;\, n)$ peut être calculée de la façon suivante. On calcule d'abord une suite de valeurs auxiliaires $A(0), A(1), A(2), \ldots,$ en choisissant $A(0) > 0$ arbitraire et en déterminant $A(1), A(2), \ldots,$ récursivement de telle sorte que

$$q(-1)\; A(x+1) = A(x) - \sum_{y=0}^{x} A(x-y) q(y). \tag{9}$$

Alors il suit

$$F(x;\, n) = \frac{A(x)}{A(n)}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

par la condition (7).

On constate que la suite des valeurs auxiliaires $A(x)$ ne dépend pas de la valeur de n. De plus, l'équation (10) nous montre que cette suite est monotone croissante. Si on écrit (9) sous la forme

$$q(-1)[A(x+1) - A(x)] = \sum_{y=0}^{x} q(y)[A(x) - A(x-y)] + \sum_{y=x+1}^{\infty} q(y)\; A(x) \tag{11}$$

cette monotonicité se voit algébriquement par induction.

2.3. *Un Nombre d'États Infini*

Considérons maintenant le cas où les états sont $0, 1, 2, \ldots,$ sans borne supérieure. Une distribution stationnaire existe si

$$E[Y_t] = \sum_{y=-1}^{\infty} y\; q(y) < 0, \tag{12}$$

i.e., s'il y a une attraction ("drift") vers le bas (voir, par exemple, KARLIN et TAYLOR, 1975, ch. 3). Evidemment, la distribution stationnaire peut alors être obtenue comme la limite

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x;\, n), \tag{13}$$

et satisfait des équations similaires à (6), (8) et (9):

$$F(x) = \sum_{y=-1}^{x} F(x-y)q(y), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

et

$$F(\infty) = 1. \tag{15}$$

Par conséquent, $F(x)$ est proportionnel à $A(x)$. Si on choisit $A(0)$ égal à $F(0)$, on a alors $A(x) = F(x)$ pour $x = 0, 1, 2, \ldots$. Heureusement, il est possible de déterminer $F(0)$. La détermination de la fonction génératice des probabilités associée à $F(x)$ nous donne une formule explicite pour $F(0)$ (équation (25)).

Soient $f(0) = F(0)$ et $f(x) = F(x) - F(x-1)$ pour $x = 1, 2, \ldots$, les probabilités de la distribution stationnaire. De l'équation (14), on obtient

$$f(0) = f(1)q(-1) + f(0)q(-1) + f(0)q(0) \tag{16}$$

et

$$f(x) = \sum_{y=-1}^{n} f(x-y)q(y), \qquad x = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

On peut exprimer la fonction génératrice des probabilités $f(x)$,

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x f(x), \tag{18}$$

par la fonction génératrice des probabilités $q(y)$,

$$H(s) = \sum_{y=-1}^{\infty} s^y q(y). \tag{19}$$

En effet, en utilisant les équations (16) et (17) dans (18), on obtient tout d'abord

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \sum_{y=-1}^{x} f(x-y)q(y) + f(0)q(-1). \tag{20}$$

Un changement de variable, $z = x - y$, nous donne

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{y=-1}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} s^y q(y) s^z f(z) - f(0)q(-1)s^{-1} + f(0)q(-1) \\ &= H(s)G(s) + f(0)q(-1)s^{-1} + f(0)q(-1). \end{aligned} \tag{21}$$

Donc,

$$G(s) = \frac{(s-1)f(0)q(-1)}{s(1-H(s))}. \tag{22}$$

Il reste à déterminer $f(0)$. Or, il faut $G(1) = 1$. En utilisant la règle de

Bernoulli–l'Hospital, on trouve

$$G(1) = \frac{f(0)q(-1)}{-H'(1)} = 1. \tag{23}$$

Il en découle que

$$G(s) = \frac{(s-1)(-H'(1))}{s(1-H(s))} \tag{24}$$

et

$$f(0) = \frac{-H'(1)}{q(-1)} = 1 - \sum_{y=1}^{\infty} \frac{yq(y)}{q(-1)}. \tag{25}$$

Il est à noter que selon l'hypothèse (12) cette dernière quantité est positive. Si l'équation (12) n'est pas satisfaite, la distribution stationnaire n'existe pas. LINDLEY (1952) a démontré que dans ce cas $A(x) \to \infty$ quand $x \to \infty$.

2.4. *Exemple Numérique*

La procédure récursive pour évaluer la distribution stationnaire d'un système bonus–malus sera illustrée avec le système suisse. Ce système possède 22 classes de tarifs qui sont numérotées ici de 0 à 21. Le nouvel assuré doit payer la prime de la classe 9. Par la suite, s'il ne rapporte aucun sinistre durant une année il passe à la classe de tarif immédiatement inférieure, à moins qu'il ne se trouve déjà à la classe 0. Si, au contraire, il procède à k réclamations, $k = 1, 2, \ldots$, il paiera pour l'année suivante la prime de la classe située à $3k$ au dessus de sa classe actuelle, mais au plus la prime de la classe 21.

Le tableau 1 donne le niveau des primes de ce système en pourcentage de la prime de base, celle de la classe 9. Nous supposons que le nombre de réclamations $N_t, t = 1, 2, \ldots$, d'un assuré donné est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\vartheta > 0$. On a donc pour le système suisse:

$$q(-1) = e^{-\vartheta}, \qquad q(3) = \vartheta e^{-\vartheta}, \qquad q(6) = \vartheta^2 e^{-\vartheta}/2, \ldots \tag{26}$$

TABLEAU 1

SYSTÈME BONUS–MALUS SUISSE.
PRIMES EN POURCENTAGE DE LA PRIME DE BASE

x	%	x	%	x	%
0	45	8	90	16	185
1	50	9	100	17	200
2	55	10	110	18	215
3	60	11	120	19	230
4	65	12	130	20	250
5	70	13	140	21	270
6	75	14	155		
7	80	15	170		

La variable aléatoire Y_t qui donne la modification de l'état (à l'intérieur des limites admissibles) est donc définie par

(27)
$$Y_t = \begin{cases} 3N_t & \text{si } N_t \geqslant 1, \\ -1 & \text{si } N_t = 0, \end{cases}$$

pour $t = 1, 2, \ldots$. Par conséquent, l'espérance de Y_t est donnée par

(28)
$$\begin{aligned} E[Y_t] &= E[3N_t] - \Pr(N_t = 0) \\ &= 3\vartheta - e^{-\vartheta}. \end{aligned}$$

Si on considère le système bonus–malus ayant un nombre infini d'états correspondant au système suisse, il faut pour obtenir une distribution stationnaire que

(29)
$$\sum_{y=-1}^{\infty} yq(y) = 3\vartheta - e^{-\vartheta} < 0,$$

c'est-à-dire $\vartheta < 0.257628$ d'après (12). Dans ce cas, on trouve

(30)
$$f(0) = 1 - 3\vartheta e^{\vartheta},$$

et on constate que la condition (29) est équivalente à $f(0)$ positif.

Considérons 8 niveaux de risque, soient $\vartheta_i = 0.05i, i = 1, 2, \ldots, 8$. Dans les 5 premiers cas la distribution stationnaire du système possédant un nombre infini d'états existe. Donc, en prenant $f(0)$ selon l'équation (30) les fonctions auxiliaires $A(x)$ sont égales à $F(x)$. Pour $\vartheta = 0.30, 0.35$ et 0.40, on prend arbitrairement $A(0) = 1$. Le tableau 2 présente les valeurs obtenues en appliquant récursivement la formule (9). On constate que toutes ces fonctions sont croissantes.

Pour déterminer la distribution stationnaire du système suisse original, il suffit d'utiliser la relation (10). Donc, les fonctions de répartition stationnaires sont obtenues en divisant $F(x)$ par $F(21)$ ou $A(x)$ par $A(21)$. Le tableau 3 contient les fonctions de répartition stationnaires résultant de ces opérations. Les fonctions de probabilité associées sont données au tableau 4.

3. PROBABILITÉ DE RUINE: MODÈLE DISCRET

Considérons maintenant le surplus (les réserves "libres") U_t d'un assureur à la fin d'une période de temps $t, t = 0, 1, 2, \ldots$, et soit $U_0 = u$ le surplus initial, u entier non-négatif. Nous supposons qu'à chaque période le surplus est modifié de la façon suivante:

(31)
$$U_{t+1} = U_t + Z_{t+1} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

où les Z_{t+1} sont des variables aléatoires i.i.d. telles que

(32)
$$\Pr(Z_t = z) = v(z), \qquad z = 1, 0, -1, -2, \ldots.$$

L'assureur fait donc un gain de 1 avec probabilité $v(1)$ et une perte de k avec probabilité $v(-k), k = 1, 2, \ldots$. Ce modèle n'est évidemment raisonnable que si les intervalles de temps sont très courts.

TABLEAU 2
SYSTÈME BONUS-MALUS SUISSE
FONCTIONS DE RÉPARTITION

	F(x)					A(x)		
x	$\vartheta =$ .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40
0	.842309	.668449	.477175	.267158	.036981	1.0000	1.0000	1.0000
1	.885495	.738750	.554398	.326308	.047484	1.3499	1.4191	1.4918
2	.930896	.816445	.644118	.398553	.060971	1.8221	2.0138	2.2255
3	.978624	.902311	.748359	.486794	.078289	2.4596	2.8577	3.3201
4	.986683	.930363	.797893	.541140	.091279	3.0201	3.7052	4.5530
5	.992997	.954336	.843859	.595688	.105334	3.6718	4.7613	6.1956
6	.997364	.973059	.883807	.647865	.120009	4.4097	6.0517	8.3525
7	.998516	.981824	.909215	.688602	.133366	5.1696	7.5264	11.0525
8	.999270	.988353	.930436	.726306	.146942	6.0115	9.2967	14.5478
9	.999690	.992783	.947188	.760004	.160438	6.9312	11.4029	19.0464
10	.999837	.995266	.959216	.788605	.173462	7.9180	13.8812	24.7967
11	.999922	.996982	.968780	.814226	.186412	8.9953	16.8270	32.1911
12	.999965	.998092	.976141	.836792	.199172	10.1655	20.3188	41.6851
13	.999982	.998766	.981662	.856435	.211672	11.4328	24.4510	53.8635
14	.999991	.999213	.985957	.873816	.224013	12.8106	29.3509	69.5019
15	.999996	.999499	.989245	.889089	.236160	14.3062	35.1567	89.5759
16	.999998	.999678	.991749	.902480	.248103	15.9291	42.0347	115.3411
17	.999999	.999794	.993679	.914278	.259869	17.6916	50.1858	148.4167
18	1.000000	.999869	.995156	.924644	.271449	19.6049	59.8441	190.8737
19	1.000000	.999916	.996286	.933752	.282846	21.6818	71.2880	245.3726
20	1.000000	.999946	.997154	.941763	.294067	23.9368	84.8487	315.3307
21	1.000000	.999966	.997819	.948805	.305111	26.3847	100.9170	405.1318
22	1.000000	.999978	.998328	.954994	.315983	29.0422	119.9567	520.4044
23	1.000000	.999986	.998719	.960436	.326684	31.9272	142.5175	668.3739
24	1.000000	.999991	.999018	.965220	.337218	35.0593	169.2503	858.3140
25	1.000000	.999994	.999247	.969425	.347588	38.4595	200.9268	1102.1298
26	1.000000	.999996	.999423	.973122	.357795	42.1509	238.4611	1415.1030
27	1.000000	.999998	.999558	.976371	.367842	46.1583	282.9366	1816.8495
28	1.000000	.999998	.999661	.979228	.377732	50.5088	335.6368	2332.5496
29	1.000000	.999999	.999740	.981740	.387468	55.2319	398.0828	2994.5258
30	1.000000	.999999	.999801	.983947	.397051	60.3593	472.0768	3844.2684

TABLEAU 3

SYSTÈME BONUS-MALUS SUISSE

FONCTIONS DE RÉPARTITION

$F(x;21)$

x	$\vartheta=$ .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40
0	.842309	.668472	.478218	.281574	.121205	.037901	.009909	.002468
1	.885496	.738776	.555609	.343915	.155630	.051161	.014062	.003682
2	.930896	.816473	.645526	.420058	.199833	.069060	.019955	.005493
3	.978624	.902342	.749994	.513060	.256590	.093221	.028317	.008195
4	.986684	.930395	.799636	.570339	.299167	.114465	.036715	.011238
5	.992997	.954368	.845704	.627830	.345231	.139163	.047180	.015293
6	.997364	.973093	.885739	.682822	.393327	.167133	.059967	.020617
7	.998516	.981857	.911202	.725757	.437107	.195934	.074580	.027281
8	.999270	.988387	.932470	.765496	.481601	.227841	.092122	.035909
9	.999690	.992817	.949258	.801011	.525836	.262697	.112993	.047013
10	.999837	.995300	.961313	.831157	.568520	.300098	.137550	.061206
11	.999922	.997016	.970898	.858160	.610964	.340929	.166741	.079458
12	.999965	.998127	.978274	.881943	.652784	.385280	.201342	.102893
13	.999982	.998800	.983807	.902646	.693752	.433312	.242288	.132953
14	.999992	.999247	.988112	.920965	.734202	.485531	.290842	.171554
15	.999996	.999533	.991408	.937062	.774011	.542217	.348373	.221103
16	.999998	.999712	.993917	.951176	.813155	.603727	.416527	.284700
17	.999999	.999829	.995851	.963610	.851719	.670527	.497298	.366342
18	1.000000	.999903	.997331	.974536	.889673	.743042	.593003	.471140
19	1.000000	.999950	.998464	.984135	.927025	.821758	.706403	.605661
20	1.000000	.999981	.999334	.992579	.963802	.907221	.840777	.778341
21	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

TABLEAU 4
SYSTÈME BONUS-MALUS SUISSE
FONCTIONS DE RÉPARTITION

f(x;21)

x	ϑ = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40
0	.842309	.668472	.478218	.281574	.121205	.037901	.009909	.002468
1	.043186	.070304	.077392	.062341	.034425	.013260	.004153	.001214
2	.045400	.077698	.089917	.076144	.044203	.017899	.005893	.001811
3	.047728	.085869	.104468	.093002	.056758	.024161	.008362	.002702
4	.008060	.028053	.049642	.057278	.042577	.021244	.008398	.003043
5	.006314	.023973	.046067	.057492	.046064	.024698	.010465	.004054
6	.004367	.018724	.040035	.054992	.048096	.027970	.012787	.005324
7	.001152	.008764	.025464	.042935	.043780	.028801	.014613	.006664
8	.000754	.006529	.021268	.039739	.044494	.031907	.017542	.008628
9	.000420	.004430	.016788	.035516	.044234	.034856	.020870	.011104
10	.000146	.002483	.012055	.030145	.042685	.037401	.024558	.014193
11	.000085	.001716	.009585	.027004	.042443	.040831	.029191	.018252
12	.000043	.001110	.007377	.023783	.041820	.044352	.034601	.023434
13	.000017	.000674	.005533	.020703	.040969	.048031	.040947	.030061
14	.000009	.000447	.004304	.018319	.040449	.052219	.048553	.038601
15	.000005	.000286	.003296	.016097	.039809	.056686	.057531	.049549
16	.000002	.000179	.002509	.014114	.039144	.061510	.068155	.063597
17	.000001	.000117	.001934	.012434	.038564	.066800	.080771	.081642
18	.000000	.000074	.001481	.010926	.037955	.072515	.095705	.104798
19	.000000	.000047	.001133	.009599	.037352	.078716	.113400	.134521
20	.000000	.000030	.000870	.008444	.036776	.085463	.134375	.172680
21	.000000	.000019	.000666	.007421	.036198	.092779	.159223	.221659

https://doi.org/10.2143/AST.18.1.2014958 Published online by Cambridge University Press

Nous définissons la probabilité de survie comme la probabilité que le surplus demeure toujours non-négatif. Cette probabilité est la probabilité complémentaire de la probabilité de ruine et dépend notamment du niveau du surplus initial et sera alors notée $R(u)$. Par la loi des probabilités totales, on a

$$R(u) = \sum_{z=-u}^{1} R(u+z)\, v(z), \qquad u = 0, 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

et la fonction $R(u)$ doit respecter la condition

$$R(\infty) = 1, \tag{34}$$

si $E[Z] > 0$. Dans le cas contraire la ruine est certaine, i.e. $R(u) = 0$.

En comparant l'équation (33) et la condition (34) pour la probabilité de survie avec l'équation (14) et la condition (15) pour la distribution stationnaire d'un système bonus–malus possédant un nombre infini d'états, on conclut aisément que

$$R(x) = F(x), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

si

$$v(-y) = q(y), \qquad y = -1, 0, 1, 2, \ldots. \tag{36}$$

Cette dualité qui existe entre la distribution stationnaire d'un processus aléatoire avec barrière réfléchissante et la probabilité d'absorption dans le cas d'un processus avec barrière absorbante est bien connue (e.g., COX et MILLER, 1965, p. 65).

On peut, par conséquent, calculer la probabilité de ruine du modèle discret de façon récursive: il suffit d'adapter le schème récursif décrit à la section 2.3 conformément aux relations (35) et (36). Cette procédure a d'ailleurs été suggérée par Giezendanner *et al.* (1972) pour déterminer des bornes supérieure et inférieure à la probabilité de ruine dans le modèle continu. Il s'agit d'approximer convenablement le modèle continu par des modèles discrets.

Grâce aux relations (35), (36) et (25), on trouve que la probabilité de survie avec un surplus initial nul est

$$R(0) = 1 + \sum_{y=-\infty}^{-1} \frac{y v(y)}{v(1)}. \tag{37}$$

Si on définit maintenant $R(u;\, b)$, la probabilité que le surplus de l'assureur atteigne un montant b, entier et supérieur à u, avant que la ruine ne se réalise, on a comme précédemment

$$R(u;\, b) = \sum_{z=-u}^{1} R(u+z;\, b) v(z), \qquad u = 0, 1, 2, \ldots, b-1. \tag{38}$$

Naturellement, la fonction $R(u;\, b)$ doit satisfaire la condition suivante

$$R(b;\, b) = 1. \tag{39}$$

La fonction $R(x)$ satisfait l'équation (38); la condition (39) implique

$$R(x;\ b) = \frac{R(x)}{R(b)}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, b. \tag{40}$$

Cette relation n'est valable que si $E[Z] > 0$. Mais en comparant les équations (38) et (39) avec (6) et (7), et en prenant $v(-y) = q(y)$, $y = -1, 0, 1, 2, \ldots$, on a aussi

$$R(x;\ b) = F(x;\ b), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, b. \tag{41}$$

Par conséquent, la technique utilisée pour évaluer $F(x;\ n)$ quand $E[Y] \geqslant 0$, peut servir à calculer $R(x;\ b)$ quand $E[Z] \leqslant 0$.

4. LE SYSTÈME BONUS–MALUS EN TEMPS CONTINU

Nous considérons maintenant un système bonus–malus en temps continu et dont le domaine des états est lui aussi continu. Un tel système peut être obtenu comme cas limite d'un système discret. Durant l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ l'assuré paie le montant $b(x)\ dt$ s'il occupe l'état x à l'instant t. On dit que $b(x) > 0$ est une densité de prime.

4.1. *Le Modèle*

Soit $X(t)$ l'état d'un assuré donné à l'instant $t, t \geqslant 0$, et $X(0) = x_0$ l'état initial. Nous posons l'hypothèse que le nombre de réclamations par unité de temps possède une distribution de Poisson de paramètre $\vartheta > 0$. Dans un court intervalle de temps $(t, t + dt)$, la probabilité de ne produire aucune réclamation est $1 - \vartheta dt$ et nous supposons que dans ce cas

$$X(t + dt) = \begin{cases} X(t) - dt, & \text{si } X(t) > dt, \\ 0, & \text{si } 0 \leqslant X(t) \leqslant dt. \end{cases} \tag{42}$$

Une réclamation est rapportée dans l'intervalle $(t, t + dt)$ avec une probabilité $\vartheta\ dt$ et alors

$$X(t + dt) = X(t) + Y - dt, \tag{43}$$

où Y est une variable aléatoire positive, indépendante des observations antérieures et dont la fonction de répartition $P(y)$ ne varie pas dans le temps. Il y a donc un saut d'une amplitude aléatoire si $P(y)$ n'est pas dégénérée. Ce cas pourrait être celui d'un système tenant compte de la sévérité des sinistres.

Soit $\bar{F}(x, t)$ la fonction de répartition de $X(t)$. Les hypothèses précédentes et la loi des probabilités totales conduisent à l'équation suivante:

$$\bar{F}(x, t + dt) = \bar{F}(x + dt, t)(1 - \vartheta\ dt) + \left\{ \int_0^x \bar{F}(x - y, t)\ dP(y) \right\} \vartheta\ \mathrm{d}t. \tag{44}$$

https://doi.org/10.2143/AST.18.1.2014958 Published online by Cambridge University Press

De cette équation, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{F}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\bar{F}(x,t)-\vartheta\bar{F}(x,t)+\vartheta\int_0^x\bar{F}(x-y,t)\,dP(y). \tag{45}$$

Supposons que $X(t)$ possède une distribution stationnaire quand $t\to\infty$. Soit

$$\bar{F}(x)=\lim_{t\to\infty}\bar{F}(x,t), \tag{46}$$

alors, de (45), on a l'équation intégro-différentielle

$$\bar{F}'(x)=\vartheta\bar{F}(x)-\vartheta\int_0^x\bar{F}(x-y)\,dP(y). \tag{47}$$

Si on définit $\bar{f}(x)=\bar{F}'(x)$, $p(y)=P'(y)$ et $\bar{f}_0=\bar{F}(0)$, on obtient en posant $x=0$ dans (47)

$$\bar{f}(0)=\vartheta\bar{f}_0, \tag{48}$$

et en dérivant l'équation (47):

$$\bar{f}'(x)=\vartheta\bar{f}(x)-\vartheta\bar{f}_0p(x)-\vartheta\int_0^x\bar{f}(x-y)\,dP(y). \tag{49}$$

Le système bonus–malus qui vient d'être décrit et les équations (42) à (49) sont mathématiquement équivalents au problème du temps "virtuel" d'attente de la théorie des files d'attente (un seul serveur). L'accroissement Y de l'état dans le système bonus–malus correspond au temps de service du consommateur nouvellement arrivé dans la file d'attente. L'état $X(t)$ correspond, lui, au temps que le nouveau consommateur doit attendre avant le début de son service.

Donc, la forme générale de la distribution stationnaire désirée et la condition sous laquelle elle existe, peuvent être déterminées en prenant les transformées de Laplace de (48) et (49) (e.g., COX et MILLER, 1965, ch. 5). Si

$$g^*(u)=\int_0^\infty e^{-ux}\bar{f}(x)\,dx \tag{50}$$

et

$$h^*(u)=\int_0^\infty e^{-uy}p(y)\,dy, \tag{51}$$

en prenant la transformée de Laplace de (49), on a

$$ug^*(u)-\bar{f}(0)-\vartheta g^*(u)+\vartheta\bar{f}_0h^*(u)+\vartheta g^*(u)h^*(u)=0 \tag{52}$$

d'où

$$g^*(u)=\frac{\bar{f}(0)[1-h^*(u)]}{u-\vartheta+\vartheta h^*(u)}. \tag{53}$$

Soit

$$\mu_h = -\frac{d}{du} h^*(u)\bigg|_{u=0}$$

le saut moyen. En prenant $u \to 0$ dans (53), on obtient

(54) $$g^*(0) = \frac{\bar{f}(0)\ \mu_h}{1 - \vartheta\mu_h}.$$

En utilisant la relation (48) et la condition de normalisation

(55) $$\bar{f}_0 + \int_0^\infty \bar{f}(x)\ dx = \bar{f}_0 + g^*(0) = 1,$$

on trouve, si on pose $\rho = \vartheta\mu_h$,

(56) $$g^*(u) = \frac{\vartheta(1-\rho)[1 - h^*(u)]}{u - \vartheta + \vartheta h^*(u)}.$$

On a aussi de (54) et (55) que $\bar{f}_0 = 1 - \vartheta\mu_h$, alors si $w^*(u)$ est la transformée de Laplace du processus à l'équilibre, il suit

(57) $$w^*(u) = \bar{f}_0 + g^*(u) = \frac{1-\rho}{1 - \rho d^*(u)},$$

ou

(58) $$d^*(u) = \frac{1 - h^*(u)}{u\mu_h}$$

La fonction $d^*(u)$ est elle aussi la transformée de Laplace d'une fonction de densité de probabilité. Cette fonction est donnée par

(59) $$\bar{p}(z) = \frac{1}{\mu_h}\ [1 - P(y)].$$

D'après l'équation (57), la distribution stationnaire est une distribution géométrique composée et elle existe si $\rho = \vartheta\mu_h < 1$. La transformée de Laplace (57) correspond à l'équation (24) pour la fonction génératrice des probabilités dans le cas discret.

Dans le cas spécial où les sauts sont constants, la distribution stationnaire est alors un mélange de convolutions de distributions uniformes continues.

4.2. *Domaine des États Borné*

Si dans le modèle continu l'état ne peut pas être supérieur à une valeur $b > 0$, i.e. lorsqu'une réclamation a lieu

(60) $$X(t + dt) = b \qquad \text{si} \qquad X(t) + Y - dt > b,$$

les équations pour la distribution stationnaire sont les mêmes que dans le cas précédent, à l'exception de la condition de normalisation. Il est à noter qu'une distribution stationnaire existe dans ce cas quel que soit ϑ, et est indépendante de l'état initial. Soient $\bar{f}(x;\, b)$ la fonction de densité de probabilité stationnaire de l'état $X(t)$ en présence d'une borne supérieur b et $\bar{f}_0(b)$ la masse de probabilité à zéro. On trouve, en procédant de la même façon que dans le cas sans barrière supérieure,

$$\bar{f}'(x;\, b) = \vartheta \bar{f}(x;\, b) - \vartheta \bar{f}_0(b) p(x) - \vartheta \int_0^x \bar{f}(x-y;\, b)\, dP(y) \tag{61}$$

et

$$\bar{f}(0;\, b) = \vartheta \bar{f}_0(b), \tag{62}$$

pour $0 \leqslant x \leqslant b$. En prenant la transformée de Laplace de (61) et en utilisant la relation (62), on peut montrer que la solution à ces équations est unique à une constante multiplicative près. Cette constante doit être telle que

$$\bar{F}(b;\, b) = \bar{f}_0(b) + \int_0^b \bar{f}(x;\, b)\, dx = 1. \tag{63}$$

Quand $\vartheta \mu_h < 1$, $\bar{f}(x)$ satisfait (61) et à cause de la condition (63), on a

$$\bar{f}(x;\, b) = \frac{\bar{f}(x)}{\bar{F}(b)}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant b. \tag{64}$$

Mais si $\vartheta \mu_h \geqslant 1$, l'équation (64) n'a plus de sens puisque $\bar{f}(x)$ n'existe pas. On doit chercher par d'autres moyens une solution aux équations (61), (62) et (63).

5. PROBABILITÉ DE RUINE: MODÈLE CONTINU

Soient $U(t)$ le surplus d'un assureur à l'instant t, $t \geqslant 0$, et $U(0) = u$ le surplus initial. On suppose que le nombre de réclamations par unité de temps est distribué selon une loi de Poisson de paramètre λ. Les montants de ces réclamations sont des variables aléatoires i.i.d. selon $P(y)$, et la somme cumulative de ces montants au temps t est $S(t)$. L'assureur reçoit un montant $c > 0$ de primes par unité de temps. Le surplus au temps t est donc

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{65}$$

Par définition, on considère que la ruine se réalise si le surplus devient éventuellement négatif. Soit $\bar{R}(u)$ la probabilité de survie,

$$\bar{R}(u) = \Pr(U(t) \geqslant 0 \text{ pour } t \geqslant 0), \tag{66}$$

c'est-à-dire la probabilité que la ruine ne se réalise pas sur un horizon infini de temps. L'équation intégro-différentielle et la transformée de Laplace associées à la probabilité de survie sont bien connues (e.g., FELLER, 1966, ch. XIV; SEAL, 1969, ch. 4; BOWERS *et al.* 1987, pour les expressions en terme de probabilité de ruine). Ces équations sont essentiellement équivalentes aux équations (47) et (57) pour la distribution stationnaire d'un système bonus–malus en temps et états continus. De FELLER (1966, p. 469), on tire la relation suivante:

$$\bar{R}'(u) = (\lambda/c)\bar{R}(u) - (\lambda/c)\int_0^u \bar{R}(u-y)\, dP(y). \tag{67}$$

En comparant (67) avec l'équation (47) et en prenant $\vartheta = \lambda/c$, on déduit la relation suivante:

$$\bar{R}(u) = \bar{F}(u), \qquad u \geqslant 0, \tag{68}$$

en autant que

$$\lambda\mu < c, \tag{69}$$

où

$$\mu = \int_0^\infty y\, dP(y). \tag{70}$$

La condition (69) signifie que la marge de sécurité incluse dans les primes est positive. Si cette marge est négative ou nulle, la ruine est certaine et la distribution du système bonus–malus correspondant n'existe pas. Quand le surplus initial est nul, la probabilité de survie est donnée par l'expression bien connue

$$\bar{R}(0) = 1 - \lambda\mu/c. \tag{71}$$

Comme dans le cas discret, on peut définir $\bar{R}(u;\, b)$ la probabilité que le surplus atteigne un niveau $b > 0$ avant que la ruine ne survienne. $\bar{R}(u;\, b)$ engendre une équation intégro-différentielle tout à fait similaire à celle de $\bar{R}(u)$. En utilisant la condition supplémentaire

$$\bar{R}(b;\, b) = 1, \tag{72}$$

on conclut que

$$\bar{R}(u;\, b) = \frac{\bar{R}(u)}{\bar{R}(b)}. \tag{73}$$

On retrouve la relation (73) dans les travaux de DICKSON et GRAY (1984) qui discutent la probabilité de ruine en présence d'une barrière supérieure absorbante. La correspondance de $\bar{R}(u;\, b)$ avec la distribution stationnaire est de la même forme que dans les cas précédents.

BIBLIOGRAPHIE

BOWERS, N. L., GERBER, H. U., HICKMAN, J. C., JONES, D. A. et NESBITT, C. J. (1987) *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Chicago.

COX, D. R. et MILLER, H. D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*. Methuen, Londres.

DICKSON, D. C. M. et GRAY, J. R. (1984) Exact solutions for ruin probability in the presence of an absorbing upper barrier. *Scandinavian Actuarial Journal* **3**, 174–186.

FELLER, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2è éd. Wiley, New York.

GIEZENDANNER, E., STRAUB, E. et WETTENSCHWILER, K. (1972) Zur Berechnung von Ruinwarscheinlichkeiten. *Transactions of the 19th International Congress of Actuaries*: Oslo.

KARLIN, S. et TAYLOR, H. M. (1975) *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York.
LEMAIRE, J. (1985) *Automobile Insurance: Actuarial Models*. Kluwer, Amsterdam.
LEMAIRE, J. (1982) *L'assurance automobile: problèmes*. Labor, Bruxelles.
LINDLEY, D. V. (1952) The theory of queues with a single server. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **48**, 277–289.
LOIMARANTA, K. (1972) Some asymptotic properties of bonus systems, *ASTIN Bulletin* **6**, 233–245.
SEAL, H. L. (1969) *Stochastic Theory of a Risk Business*. Wiley, New York.
VEPSÄLÄINEN, S. (1972) Applications to a theory of bonus systems. *ASTIN Bulletin* **6**, 212–221.

FRANÇOIS DUFRESNE
Ecole des HEC, Université de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland.